BHS II K 142-1

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: II Sk
B Nr. 142

TECHNISCHE THERMODYNAMIK.

TECHNISCHE

THERMODYNAMIK

VON

Dr. GUSTAV ZEUNER,

KÖNIGL. SÄCHS. GEHEIMER RATH UND PROFESSOR,
DIRECTOR DES KÖNIGL. POLYTECHNICUMS ZU DRESDEN.

DRITTE, VOLLSTÄNDIG NEU BEARBEITETE AUFLAGE

DER

„GRUNDZÜGE DER MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE“.

ERSTER BAND.

FUNDAMENTALSÄTZE DER THERMODYNAMIK.
LEHRE VON DEN GASEN.

MIT 73 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BIBLIOTHEK
DER K.B.GENERAL
BERGW.U.SALINEN
ADMINISTR.

LEIPZIG
VERLAG VON ARTHUR FELIX
1887.

Verfasser und Verleger behalten sich das Recht der Uebersetzung dieses Werkes in andere Sprachen vor.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

VORWORT.

Die erste Auflage des vorliegenden Buches erschien 1859 unter dem Titel »Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie«. Diese kleine, nur zwölf Druckbogen umfassende Schrift verfolgte den Zweck, die Resultate der bis dahin erschienenen, zerstreuten Arbeiten verschiedener Autoren, vereinigt mit den Ergebnissen eigener Untersuchungen, die sich insbesondere auf das Verhalten der Dämpfe bezogen, übersichtlich im Zusammenhange darzulegen, zugleich aber auch die Aufmerksamkeit der Maschinen-Ingenieure auf die grosse Bedeutung hinzulenken, welche die neue Wärmelehre für die weitere Ausbildung der theoretischen Maschinenlehre erwarten liess.

Unter demselben Titel erschien im Jahre 1866, neu bearbeitet und in bedeutend erweitertem Umfange, die zweite Auflage des Buches; dieselbe war, wie ich in der Vorrede aussprach, speciell für Techniker bestimmt, obgleich der allgemeine theoretische Theil ausführlicher gehalten ist, als es zur Einführung in das Studium der hier einschlagenden technischen Fragen nöthig gewesen wäre. Diese Auflage ist, von Maurice Arnthal und Achille Cazin übersetzt, auch in französischer Sprache erschienen unter dem Titel »Théorie mécanique de la

chaleur. Paris. Gauthier-Villars. 1869«, wie auch schon Hirn in seinem Werke »Exposition analytique et expérimentale de la Théorie mécanique de la chaleur. Paris 1862« die erste Auflage meines Buches in einem besonderen Abschnitte in Uebersetzung wiedergegeben hatte.

Nachdem die deutsche Ausgabe vergriffen war und mehrere Jahre gänzlich im Buchhandel gefehlt hatte, entschloss ich mich, den Vorstellungen der Verlagshandlung folgend, im Jahre 1877 einen neuen Abdruck der zweiten Auflage erscheinen zu lassen, weil andere von mir übernommene Verpflichtungen mir die Bearbeitung einer neuen, dritten Auflage unmöglich machten; demselben habe ich, unter Weglassung einiger Stellen, als Anhang nur eine Abhandlung beigefügt, welche ich unter dem Titel »Theorie der überhitzten Wasserdämpfe« in der »Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure« Bd. 11. 1866 veröffentlicht hatte, im Uebrigen aber an der Anordnung und speciellen Bearbeitung des ganzen Stoffes Aenderungen nicht getroffen.

Bei der Ausarbeitung der hier vorliegenden dritten Auflage der »Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie« musste ich nun aber von einer einfachen Umarbeitung der vorausgegangenen Auflagen und blosser Beifügung der erforderlichen Ergänzungen vollständig absehen. Ich habe daher, um hervortreten zu lassen, dass ein ganz neu bearbeitetes Werk vorliegt, den Titel »Technische Thermodynamik« gewählt, der das neue Ziel, welches mir vorschwebte, am besten zum Ausdruck zu bringen scheint. In den letzten zwanzig Jahren sind in den modernen Sprachen eine ganze Reihe von zum Theil vortrefflichen Werken über Thermodynamik, grösseren Theiles von Physikern verfasst, erschienen, und die Fortschritte, welche dieser verhältnissmässig junge Zweig der Physik aufweist, sind sicherlich als sehr bedeutende zu bezeichnen. Ein schärferer Hinblick auf die Erfolge dieser Forschungen ergiebt aber auch,

dass die wissenschaftliche Technik einen grossen, wenn man nicht sogar sagen darf, bis heute den grössern Vortheil von den Ergebnissen jener Forschungen gezogen hat. Es mag dies zum grossen Theil darin seinen Grund haben, dass bei dem ursprünglichen Aufbau und dem weiteren Ausbau der Thermodynamik gerade Ingenieure und Vertreter der Ingenieur-Wissenschaften — es mögen nur die Namen Carnot, Clapeyron, Rankine, Hirn, Grashof genannt werden, — hervorragenden Antheil genommen haben. Die neuen Errungenschaften der Technik auf thermodynamischem Gebiete zusammenzufassen, erschien mir als die wichtigste Aufgabe dieser Neubearbeitung.

Es leitete mich aber auch ein besonderer Grund, eine Unterscheidung zwischen der physikalischen und technischen Behandlung der Thermodynamik zu treffen, und zwar die Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer technischer Bildungsanstalten. Die Einführung in das Studium gewisser Theile der technischen Mechanik und der theoretischen Maschinenlehre erfordert an den technischen Hochschulen eine andere Behandlung der Thermodynamik, als derselben in den Handbüchern der Physik und in den Vorträgen über allgemeine Physik zu Theil werden kann. Die Anordnung und Auswahl des Stoffes in dem vorliegenden neuen Buche unter Benutzung der technischen Terminologie und eigenartiger graphischer Darstellungen, die dem jungen Ingenieur früh geläufig werden müssen, entspricht im Allgemeinen der Art der Behandlung, welche ich während meiner mehr als dreissigjährigen Lehrthätigkeit in meinen »Vorlesungen über Thermodynamik, als Einleitung in die Maschinentheorie« für angemessen und fruchtbringend erkannt zu haben glaube.

Die Fülle des bearbeiteten Stoffes liess es mir zweckmässig erscheinen, auch um das Buch handlicher zu machen, die Schrift in zwei Bände zu trennen; der erste Band umschliesst die Fundamentalsätze der Thermodynamik und die Lehre von den Gasen, worauf der zweite Band die Lehre von den Dämpfen und das

Verhalten fester und flüssiger Körper behandelt. Während der zweite Band in den speciell technischen Anwendungen sich naturgemäss mit besonderer Ausführlichkeit der Theorie der Dampfmaschinen mit Einschluss der Kaltdampfmaschinen (Kälteerzeugungsmaschinen) zuwendet, hat im ersten Bande die Theorie der Heiss- und Kaltluftmaschinen und der Feuerluftmaschinen, als deren Hauptrepräsentant heut zu Tage der Gasmotor anzusehen ist, eine gründliche Bearbeitung gefunden.

Der Fachkenner wird aber auch schon bei der Durchsicht des Inhaltsverzeichnisses und beim flüchtigen Durchblättern des Buches erkennen, dass nicht nur in Bezug auf die technischen Anwendungen der Thermodynamik hier zahlreiche neue Untersuchungsergebnisse niedergelegt worden sind.

Für die freundliche Mithülfe, welche mir Herr Oberlehrer Dr. Georg Helm in Dresden bei der Bearbeitung und Correctur des Buches leistete, spreche ich ihm auch hier meinen Dank aus.

Dresden, den 12. April 1887.

Dr. Gustav Zeuner.

Inhaltsverzeichniss des ersten Bandes.

Seite

Einleitung . 1

Erster Abschnitt.

Fundamentalsätze der Thermodynamik.

§ 1. Vorbemerkungen . 19
§ 2. Von der innern Arbeit 22
§ 3. Von der äussern Arbeit 24
§ 4. Ableitung der ersten Hauptgleichung 28
§ 5. Ableitung der zweiten Hauptgleichung 29
§ 6. Untersuchung verschiedener Druckcurven 33
§ 7. Bestimmung der Wärmemengen auf graphischem Wege 37
§ 8. Beziehung zwischen den Functionen S und P 40
§ 9. Von den umkehrbaren Kreisprocessen 43
§ 10. Vom Carnot'schen Kreisprocess 48
§ 11. Physikalische Bedeutung der Function S 51
§ 12. Umformung der Fundamentalgleichungen 57
§ 13. Universelle Bedeutung der Carnot'schen Function 60
§ 14. Ueber die Abbildung der umkehrbaren Druckcurven und Indicatordiagramme . 66
§ 15. Von den nicht umkehrbaren Processen 72
§ 16. Ueber die Abbildung des nicht umkehrbaren Processes 75
§ 17. Das Wärmegewicht beim nicht umkehrbaren Process 77

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Gasen.

§ 18. Vorbemerkungen . 83
§ 19. Zustandsgleichung der Gase 87
§ 20. Ueber Gasmischungen 100
§ 21. Specifische Wärme der Gase 108
§ 22. Erste Hauptgleichung der Thermodynamik unter Berücksichtigung des Verhaltens der Gase 114

Seite

§ 23. Zweite Hauptgleichung der Thermodynamik unter Berücksichtigung des Verhaltens der Gase. — Bestimmung der Carnot'schen Function 122
§ 24. Die innere Arbeit (Energie) der Gase 125
§ 25. Die Wärmegleichungen und das Wärmegewicht der Gase . . . 127
§ 26. Die isothermische und isodynamische Curve der Gase 131
§ 27. Die adiabatische Curve der Gase 134
§ 28. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase . 136

Anwendungen.

Physikalischer Theil.

I. Zustandsänderungen der Gase auf umkehrbarem Wege.

§ 29. Die polytropische Curve der Gase 142
§ 30. Weitere Eigenschaften der polytropischen Curve 147
§ 31. Die Construction der polytropischen Curve und deren Abbildung 149
§ 32. Druckcurve der Gase, wenn die Wärmemenge der Druckänderung oder der Volumenänderung proportional ist 152

II. Zustandsänderungen der Gase auf nicht umkehrbarem Wege.

§ 33. Expansion der Gase unter verschiedenen Umständen 153
§ 34. Mischungen verschiedener Gasmengen 161
§ 35. Ueberströmen eines Gases aus einem Gefässe in ein anderes bei constantem Gefässvolumen 167
§ 36. Einströmen der freien atmosphärischen Luft in ein Gefäss . . . 172
§ 37. Ausströmen der atmosphärischen Luft aus einem Gefässe in die freie Atmosphäre 177
§ 38. Ueberströmen eines Gases aus einem Gefässe in ein anderes bei veränderlichem Gefässvolumen und unter Wärmemittheilung 186
§ 39. Anwendungen und specielle Aufgaben 196

III. Ueber die strömende Bewegung und über den Ausfluss der Gase.

§ 40. Grundformeln für die strömende Bewegung einer Flüssigkeit . . 212
§ 41. Ueber die strömende Bewegung der Gase 219
§ 42. Ausfluss der Gase durch einfache Mündungen bei constantem Druck 220
§ 43. Einführung des »Ausflussexponenten« in die Ausflussformeln . . 226
§ 44. Discussion der Ausflussformel 230
§ 45. Ausfluss unter constantem Druck bei kleinen Druckdifferenzen . 235
§ 46. Ausfluss bei abnehmendem Druck und starkem Ueberdruck . . 238
§ 47. Ausfluss bei abnehmendem Druck und geringem Ueberdruck . 243
§ 48. Versuche über den Ausfluss der Luft durch einfache Mündungen. 245
§ 49. Ausfluss durch abgerundete Mündungen 250
§ 50. Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren 255
§ 51. Ausfluss durch Mündungen in dünner Wand (Contraction) . . . 257
§ 52. Schlussbemerkungen über die strömende Bewegung der Gase . . 261

Seite

Anwendungen.

Technischer Theil.

I. Theorie der Luftmaschinen.

§ 53. Vorbemerkungen . 262

A. Heissluftmaschinen.

a. Geschlossene Heissluftmaschinen.

§ 54. Der Carnot'sche Process einer geschlossenen Luftmaschine . . . 264
§ 55. Der Process einer geschlossenen Luftmaschine zwischen zwei Paaren polytropischer Curven 269
§ 56. Ueber den theoretisch vollkommenen Process der Heissluftmaschinen 274
§ 57. Kreisprocess einer Luftmaschine zwischen zwei Isothermen und einem beliebigen Paar polytropischer Curven 278
§ 58. Ueber die disponible Arbeit calorischer Maschinen überhaupt. . 283
§ 59. Praktische Unausführbarkeit des Carnot'schen Processes bei Luftmaschinen . 291
§ 60. Theorie des Regenerators. 297
§ 61. Geschlossene Heissluftmaschinen ohne Regenerator. Erste Anordnung (System Rider) . 306
§ 62. Geschlossene Heissluftmaschinen ohne Regenerator. Zweite Anordnung (System Lehmann) 311
§ 63. Theorie der im Vorstehenden besprochenen Maschinenanordnungen 313
§ 64. Anwendungen und numerische Beispiele. 318
§ 65. Geschlossene Heissluftmaschinen ohne Regenerator. Dritte Anordnung (System Laubereau-Schwartzkopff) 323
§ 66. Geschlossene Heissluftmaschinen mit Regenerator. Erste Anordnung (System Rider) . 332
§ 67. Geschlossene Heissluftmaschinen mit Regenerator. Zweite Anordnung . 342
§ 68. Heissluftmaschinen mit Regenerator und continuirlicher durch Kurbeln erzeugter Kolbenbewegung 347
§ 69. Geschlossene Heissluftmaschine von Ericsson 357

b. Offene Heissluftmaschinen.

§ 70. Maschinen ohne und mit Regenerator 363

B. Kaltluftmaschinen.

a. Geschlossene Kaltluftmaschinen.

§ 71. Umkehrung der Ericsson'schen geschlossenen Heissluftmaschine. 365
§ 72. Umkehrung der Rider'schen geschlossenen Heissluftmaschine . . 374

b. Offene Kaltluftmaschinen.

§ 73. Umkehrung der Ericsson'schen geschlossenen Heissluftmaschine unter Weglassung des Heizapparates 377

Seite

II. Theorie der Feuerluftmaschinen.

§ 74. Vorbemerkungen . 380
§ 75. Ueber den »Arbeitswerth« der Brennstoffe 385
§ 76. Ueber die verschiedenen Arten der Feuerluftmaschinen 393
§ 77. Ueber das Verhalten brennbarer Gase bei der Entzündung . . . 395
§ 78. Ueber das Verhalten des Steinkohlenleuchtgases bei der Entzündung . 401
§ 79. Ueber den Heizwerth brennbarer Gase 405
§ 80. Thermodynamische Gleichungen für den Verbrennungsprocess eines Gases . 411
§ 81. Betrachtung ausgeführter Gasmaschinen (System Lenoir) 422
§ 82. Betrachtung ausgeführter Gasmaschinen (System Otto) 429
§ 83. Calorimetrische Untersuchung der Gasmaschine von Otto 436
§ 84. Schlussbemerkungen . 445

Einleitung.

Die Untersuchungen der Eigenschaften des Lichtes haben zu der jetzt allgemein herrschenden Ansicht geführt, dass im ganzen Weltraume ein elastischer Stoff, der »Aether«, verbreitet ist, dessen Theilchen schwingender Bewegungen fähig sind; ein Stoff, welcher alle Körper durchdringt, und dessen Elasticität und Dichtigkeit durch den Einfluss der Körpertheile bestimmt wird, zwischen denen er lagert.

Aehnlich wie von einem schwingenden Körper die ihn umgebende Luft in Schwingungen versetzt wird, die sich nach allen Richtungen wellenförmig verbreiten und die, in das Ohr gelangend, unter Umständen die Empfindung des Tones erzeugen, ebenso gehen von einem leuchtenden Körper Schwingungen des Aethers aus, die in unser Auge tretend unter gewissen Verhältnissen den Lichteindruck hervorbringen.

In dem einen Falle schwingen die Lufttheilchen, im andern Falle die Aethertheilchen um ihre Gleichgewichtslagen, und die Fortpflanzung des Schalles, beziehungsweise des Lichtes, besteht darin, dass vom Mittelpunkte der Erschütterungen aus nach allen Richtungen hin immer neue Theilchen in Schwingungen gerathen, angeregt auf Kosten der Energie der vorhergehenden.

Wie die Empfindung der Tonhöhe von der Anzahl der Schwingungen abhängt, welche die Lufttheilchen in einer Secunde machen, so wird die Farbenempfindung bestimmt durch die Zahl der Aetherschwingungen in einer Secunde.

Die Hypothese, dass das Licht kein Stoff, sondern etwas dem Schalle Analoges sei, dass es in der Fortpflanzung oscil-

latorischer Bewegungen der kleinsten Theile eines eigenthümlichen Mittels bestehe (Undulations- oder Vibrationshypothese), wurde zuerst von Huyghens (1690) ausgeführt; aber erst seit Anfang dieses Jahrhunderts, seit durch die Arbeiten von Young und Fresnel und durch die mathematischen Untersuchungen von Cauchy, Green u. A. dargelegt wurde, dass mittelst dieser Hypothese alle bekannten Erscheinungen des Lichtes, die Beugung, Polarisation, Interferenz und Doppelbrechung klar und einfach sich erklären lassen, ist die Undulationstheorie allgemein angenommen und die von Newton aufgestellte Emanationstheorie, wonach das Licht ein Stoff sein soll, dessen Theilchen von den leuchtenden Körpern mit grosser Geschwindigkeit ausgesendet werden, verlassen worden.

Die allgemeine Annahme der Undulationstheorie bei Erklärung der Lichterscheinungen hat aber dahin geführt, die Imponderabilien, die unwägbaren Stoffe überhaupt aus der Physik nach und nach zu verbannen; mehr und mehr verbreitet sich die Ansicht, dass, wie das Licht, auch die Wärme, die Elektricität und der Magnetismus Aeusserungen von Bewegung der kleinsten Theile ein und desselben Stoffes, des Aethers, sind.

Die Annahme der Undulationstheorie für das Licht führte wenigstens zunächst zu der Folgerung, dass die strahlende Wärme eine Bewegung kleinster Theile sein müsse.

Aus den schönen Versuchen Melloni's geht unzweifelhaft hervor, dass die strahlende Wärme, wie das Licht, in Transversalschwingungen des alle Körper durchdringenden Aethers besteht.

Die Schwingungen einer Stimmgabel können wir durch den Tastsinn wahrnehmen, wie durch das Gehör, ja die dem letzteren nicht wahrnehmbaren Schwingungen von sehr geringer Schwingungszahl entgehen doch dem ersteren nicht; — so empfinden wir auch die Aetherschwingungen als Licht wie als Wärme, und Schwingungen, die zu langsam erfolgen, um das Auge zu reizen, werden doch als Wärme wahrgenommen. Die Fläche, auf der man ein Spectrum des Sonnenlichtes entwickelt, wird auch erwärmt, aber während die Lichtstärke der Spectralfarben ihr Maximum im Gelb erreicht, findet hinsichtlich der Erwärmung eine andere Vertheilung statt.

Erzeugt man das Spectrum durch ein Steinsalzprisma, weil

dieses die Wärmestrahlen am vollkommensten durchlässt, so zeigt sich im Violett die Erwärmung am geringsten, nimmt nach dem Roth hin mehr und mehr zu und erreicht im dunkeln Raum ausserhalb des Roth erst das Maximum, um weiterhin wieder abzunehmen. Die Erwärmung kann bis auf zwei Dritttheile des sichtbaren Spectrums über das äusserste Roth von der Schwingungszahl 395 Billionen hinaus nach der Seite der geringeren Brechbarkeit noch verfolgt werden.

Das Wärmespectrum fällt sonach zum Theil auf das optische Spectrum, zum Theil in den dunkeln Raum jenseits des Roth.

Man muss daraus schliessen, dass es ausser den sichtbaren Strahlen, den eigentlichen Lichtstrahlen, noch Strahlen giebt, die wir nicht sehen, die sich aber durch Erwärmung kund geben.

Der Vollständigkeit wegen mag noch erinnert werden, dass die Untersuchung der anderen Seite des Spectrums, ausserhalb des Violett, zu nicht weniger interessanten Resultaten geführt hat. Strahlen, bei denen die Anzahl der Aetherschwingungen mehr als 764 Billionen in der Secunde beträgt, entgehen wieder dem Auge, gleichwie Schallschwingungen von sehr grosser Schwingungszahl dem Ohre nicht wahrnehmbar sind; aber jene Aetherschwingungen sind nichtsdestoweniger vorhanden und äussern sich vornehmlich durch chemische Aenderungen, die sie in gewissen Körpern hervorbringen.

Aus dem Erwähnten geht hervor, dass das sichtbare Spectrum nur ein Theil eines grösseren und zwar der kleinere Theil eines solchen ist; man hat häufig die sichtbare Farbenreihe mit einer Tonleiter verglichen, in welcher sich jeder Farbenton auf Grund der bekannten Schwingungszahlen der verschiedenen Farben bestimmen lässt; diese akustische Eintheilung zeigt, dass der sichtbare Theil nicht ganz eine Octave, das ganze Spectrum aber, soweit jetzt die Kenntniss reicht, gegen vier Octaven umfasst.

Ein Körper, welcher im Stande ist, den ihn umgebenden Aether in Schwingungen zu versetzen, und diese Eigenschaft kommt allen Körpern zu, sendet also verschiedenartige Strahlen aus, und unter diesen tritt eine gewisse Art auf, die unsere Gefühlsnerven afficiren und im gewöhnlichen Sinne erwärmend wirken. Eine andere Art dieser Strahlen, bei denen die Schwingungszahlen zwischen die vorhin bezeichneten Grenzen fallen, kann ausserdem in unserm

Auge die Empfindung des Lichtes hervorbringen. Wieder andere dieser Strahlen, und zwar im Allgemeinen solche, denen eine noch grössere Schwingungszahl zukommt, als den »leuchtenden« Strahlen, bekunden ihre Anwesenheit durch ihre chemischen Wirkungen und durch die Fluorescenz.

Die Resultate der Untersuchungen des Spectrums, die wir nur kurz hervorgehoben haben und nach denen die strahlende Wärme unzweifelhaft in der Fortpflanzung oscillatorischer Bewegung des den Raum erfüllenden Aethers besteht, führen nun ohne Weiteres zu der sehr wahrscheinlichen Annahme, dass auch die in einem Körper enthaltene Wärme zunächst in Schwingungen kleinster Theile ihren Grund haben möge.

Denn welche Anschauung man sich auch über die Constitution der Körper machen möge, immer bleibt doch die Bewegungsübertragung zwischen den Körpern und dem Aether unabweisbar.

Stellt man sich vor, dass auf einen Körper Wärmestrahlen fallen, so werden die schwingenden Aethertheilchen ihre Bewegung zum Theil auf die Körpertheilchen oder auf die im Körper enthaltenen Aethertheilchen oder auf beide zugleich übertragen und die im Körper schon vorhandenen Bewegungen verstärken.

Man sagt dann, der Körper sei erwärmt worden; derselbe kann bei der Berührung an unsern Gefühlsnerven dieselbe Empfindung hervorbringen, wie die Wärmestrahlen selbst.

Umgekehrt können sich die Bewegungen im Innern des Körpers auch auf den ihn umgebenden Aether übertragen; man sagt dann, der Körper strahle Wärme aus.

Nur in einem Punkte gingen die Ansichten auseinander, nämlich in der Frage, ob die sogenannte Wärmebewegung in der Bewegung der Atome, d. h. der materiellen Theile des Körpers, oder in der Bewegung der im Körper angesammelten Aethertheilchen ihren Grund hat.

Redtenbacher nahm an, dass die Aetheratome, die sehr klein im Verhältniss zu ihren gegenseitigen Abständen und zu den Körperatomen sind, abstossend auf einander wirken und von den Körperatomen angezogen werden. In Folge der Wirkung dieser Kräfte wird der Aether die Moleküle und Atome atmosphärenartig umgeben. Diese Atmosphären, deren Dichtigkeit von innen nach aussen abnimmt, bilden mit ihrem Kern ein individuelles

Ganzes. Ein Atom mit seiner Aetherhülle nennt Redtenbacher eine Dynamide, während nach ihm eine Vereinigung von Atomen (Molekül) mit gemeinschaftlicher Aetheratmosphäre eine zusammengesetzte Dynamide genannt wird*).

Er dachte sich dann, die Wärmebewegung bestehe in radialen Bewegungen der die Körperatome oder Moleküle umgebenden Aetherhüllen; diese Hüllen ziehen sich zusammen und dehnen sich aus. Im vollkommenen Ruhezustande dieser Hüllen sind die Körper absolut kalt. Findet zwischen der Anziehung und Abstossung der einzelnen Dynamiden Gleichgewicht statt, so haben die Körper ein selbstständiges Volumen. Ist hingegen die Abstossung überwiegend, so bedarf es einer die Dynamidenvereinigung umschliessenden festen Hülle; das letztere entspricht dem gasförmigen Zustande; im ersten Falle können die Körper sich im festen oder tropfbar flüssigen Zustande befinden; im flüssigen Zustand sind die Dynamiden gegenseitig frei verschiebbar, ohne ihren gegenseitigen Abstand, also das Gesammtvolumen zu ändern.

Eine andere Ansicht hat Clausius**) mit weittragendem Erfolge vertreten. Nach ihm besteht die Wärmebewegung in der Bewegung der Moleküle, d. h. der materiellen Theile der Körper, und zwar ist diese Bewegung bei festen, flüssigen und gasförmigen Körpern verschieden. Im festen Zustande bewegen sich die Moleküle um gewisse Gleichgewichtslagen, sie schwingen, und zwar unter Einwirkung der Kräfte, die sie gegenseitig auf einander ausüben. Neben geradlinig schwingenden Bewegungen der Moleküle können auch drehende Schwingungen um den Schwerpunkt und Bewegungen der Bestandtheile, d. h. der Atome des Moleküls, auftreten.

Im flüssigen Zustande findet eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung statt, die kinetische Energie oder lebendige Kraft der Bewegung ist im Verhältniss der gegenseitigen Anziehung der Moleküle nicht stark genug, sie ganz von einander

*) Redtenbacher, »Dynamidensystem«. »Grundzüge einer mechanischen Physik«. Mannheim 1857.

**) Clausius, Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. Poggendorff's Annalen. Bd. 100. S. 353. — Clausius, Ueber das Wesen der Wärme, verglichen mit Licht und Schall. Ein populärer Vortrag. Zürich 1857.

zu trennen, sie erhalten sich auch ohne äusseren Druck innerhalb eines gewissen Volumens.

Im gasförmigen Zustande sind die Moleküle ganz aus den Sphären ihrer gegenseitigen Anziehung gekommen, bewegen sich nach dem Trägheitsgesetze geradlinig fort, wirken beim Zusammentreffen nach den Gesetzen des elastischen Stosses auf einander und rotiren; wahrscheinlich mögen auch bei Gasen gleichzeitig oscillirende Bewegungen der Bestandtheile, der Atome in den Molekülen, stattfinden.

Dass die Haupteigenschaften der Gase durch die Wirkungen geradlinig fortschreitender Bewegung der Moleküle ihre Erklärung finden können, hat vor Clausius schon Krönig*) durch einfache Rechnungen nachgewiesen, ja die Idee, welche diesen und zum Theil den Rechnungen von Clausius zu Grunde liegt, reicht noch viel weiter zurück. Ausführlicheres hierüber findet sich schon in den Schriften von Le Sage**).

Später fand die Hypothese von Clausius bedeutsame Förderung durch Maxwell und Boltzmann. Neuerdings scheint man sich von der Ausbildung solcher besonderen Hypothesen über die Art der Bewegung, die wir als Wärme empfinden, wieder abzuwenden. Insbesondere lehrt v. Helmholtz wichtige Sätze der Wärmelehre durch die Gesetze der Mechanik zu begründen, ohne dass er engere Beschränkungen über die besondere Art der Bewegungsvorgänge einführt***).

Es ist überhaupt von hohem Interesse, den Gang der Ent-

*) »Grundzüge einer Theorie der Gase«. Poggendorff's Annalen. Bd. 99. S. 315.

**) Deux traités de physique mécanique publiés par Pierre Prevost. Genève et Paris 1818. Die erste Abtheilung enthält die Arbeiten von Le Sage, in welchen über die Constitution der Gasarten ganz ähnliche Ansichten ausgesprochen werden, wie diejenigen, auf die man in neuerer Zeit durch die Sätze der mechanischen Wärmetheorie wieder zurückgekommen ist. Le Sage führt eine Reihe von Schriftstellern an (p. 126), die vor ihm schon ähnlich sich ausgesprochen; mit besonderer Bestimmtheit geschah dies von Daniel Bernoulli.

***) v. Helmholtz, Zur Thermodynamik chemischer Processe. Sitzungsberichte Berlin. Akad. 1882. — Derselbe: Principien der Statik monocyklischer Systeme. Journal für reine u. angew. Math. 1884. — Derselbe: Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. Journal für reine u. angew. Math. 1886.

wickelung unserer mechanischen Theorie des Lichtes mit dem der Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie oder Thermodynamik zu vergleichen.

In der Theorie des Lichtes geht man sofort von einer ganz bestimmten Bewegungsart des Aethers aus; man nimmt an, dass die Aethertheilchen Bahnen um ihre Gleichgewichtslagen unter der Einwirkung einer Kraft beschreiben, die der Entfernung des Theilchens von der Gleichgewichtslage direct proportional und anziehend wirkt, und diese einfache Hypothese über die Art der Lichtbewegung führte dann zu Entdeckungen, die wir zu den herrlichsten in den Naturwissenschaften zählen.

Einen davon wesentlich verschiedenen Weg gingen die Untersuchungen in der Lehre von der »Wärme«, seitdem man die Ansicht, die Wärme sei ein Stoff, hatte fallen lassen. Von den zahlreichen hierher gehörigen Arbeiten sind es nur wenige, deren Ausgangspunkt in der Annahme einer bestimmten A r t der Wärmebewegung lag, und diese Untersuchungen beziehen sich nur auf das Verhalten der Gasarten.

Im Uebrigen enthielt man sich, wie es auch im weiteren Verlauf der vorliegenden Schrift geschehen soll, bei den mathematischen Entwickelungen bestimmte Voraussetzungen über die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen, zu machen.

Wenn man doch hier und da auf die wahrscheinliche Constitution der Körper und ihren Bewegungszustand hindeutet, so geschieht es nur, um das Verständniss und Verfolgen der mathematischen Darstellungen zu erleichtern.

Man könnte daher sagen, dass die mechanische Wärmetheorie auf einfacheren Sätzen ruht, als die Lehre vom Licht, in der man neben der Annahme, dass das Licht eine Bewegung kleinster Theile eines Stoffes sei, gleichzeitig eine bestimmte Hypothese über die A r t dieser Bewegung den Untersuchungen zu Grunde legt.

In der neueren Wärmelehre macht man zunächst ganz einfach nur die Annahme, dass die f ü h l b a r e Wärme in einem Körper eine Molekularbewegung sei. Ein Erwärmen oder Erkalten eines Körpers besteht in einer Verstärkung oder Schwächung dieser Bewegung. Ist der Körper Wärmestrahlen von gewisser Stärke ausgesetzt, oder steht er mit einem Körper in Berührung, in welchem die Bewegung stärker ist, so k a n n sich seine eigene

Molekularbewegung verstärken, er wird fühlbar erwärmt, während das Erkalten in Abgabe von Bewegung an andere Körper oder den ihn umgebenden Aether besteht.

Als Maass für die Stärke der Bewegung eines materiellen Punktes von bestimmter Masse, der sich mit einer gewissen Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bewegt, dient aber die kinetische Energie oder lebendige Kraft, diejenige Arbeit, welche nöthig ist, die Masse aus der Ruhe in diese Geschwindigkeit zu versetzen, oder welche man gewinnt, wenn die Masse aus der Geschwindigkeit zur Ruhe übergeht, gleichgültig auf welche Weise diese Geschwindigkeitsänderungen bewirkt werden mögen.

Stellen wir uns nun den Körper als eine Verbindung materieller Punkte vor (Körper- und Aether-Atome), die mit gewissen Kräften auf einander wirken und die in schwingender und rotirender Bewegung irgend welcher Art begriffen sind, so ist, von welcher Art auch die Anordnung der Bestandtheile und von welcher Grösse augenblicklich auch die Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes sein mag, doch im ganzen System in einem gewissen Augenblicke eine bestimmte mechanische Arbeit angehäuft.

Die gesammte kinetische Energie zunächst ist eine bestimmt angebbare und ist die halbe Summe aller Producte aus den Massen der sämmtlichen materiellen Punkte, jede multiplicirt mit dem Quadrate der augenblicklichen Geschwindigkeit des betreffenden Punktes; es besteht also eine Verstärkung oder Schwächung der Molekularbewegung in einem Körper in einer Vermehrung oder Verminderung der Summe der Energien aller einzelnen schwingenden Bewegungen.

Bezeichnen wir diese im Körper angehäufte Arbeit (vorübergehend) mit dem Namen »Schwingungsarbeit«, so lässt sich aus allem Gesagten zunächst schliessen, dass die fühlbare Wärme in einem Körper in einem gewissen Zusammenhang mit dieser Schwingungsarbeit steht, und der zunächst liegende Gedanke ist der, dass ein fühlbares Erwärmen oder Erkälten eines Körpers geradezu nur in Vermehrung oder Verminderung der Schwingungsarbeit besteht. Damit ist aber noch keineswegs ausgesprochen, dass ein Zuführen von Wärme zu einem Körper jederzeit eine Vermehrung der Schwingungsarbeit zur Folge haben müsse; auch

ohne die gewöhnlichen Erfahrungen lässt sich dass Gegentheil erwarten.

Ein System verbundener materieller Punkte, die durch Kräfte auf einander wirken und die sich in schwingender Bewegung befinden, wird nämlich durch irgend welche Einwirkungen, die es nach aussen hin auf ein anderes System ausübt, nicht nur insofern Aenderungen erleiden, als sich die Schwingungsarbeit ändert, sondern es wird sich im Allgemeinen auch die gegenseitige Stellung der Mittellagen der schwingenden materiellen Punkte ändern können; welches nun auch die Kräfte sein mögen, welche bei Aenderungen dieser Art zur Wirkung gelangen oder überwunden werden müssen, immer werden diese Aenderungen Arbeit erfordern oder es wird durch dieselbe Arbeit frei. Die Kräfte, von denen hier die Rede ist, sind aber zweierlei Art; wir haben die Kräfte, mit welchen die materiellen Punkte des Körpers selbst auf einander wirken (anziehende oder abstossende) zu unterscheiden von den Kräften, welche von aussen her auf das System wirken, die herrühren von den Wirkungen eines zweiten Systems auf das erstere. Die Kräfte der letzteren Art äussern sich im Allgemeinen durch Pressungen gegen die gesammte Oberfläche des Körpers oder gegen einen Theil desselben. Die ganze Arbeit nun, die in solchem Falle in Folge der Aenderung der Anordnung der kleinsten Theile des Körpers oder des Systems materieller Punkte aufgenommen oder abgegeben wird, soll kurz die Disgregationsarbeit*) genannt werden.

Man kann sich jetzt dahin aussprechen, dass jede Zustandsänderung eines Körpers mit einer Aufnahme oder Abgabe von Schwingungsarbeit oder Disgregationsarbeit oder von beiden zugleich verbunden ist.

Betrachtet man nun genauer die Aenderungen, die an einem Körper sich zeigen, dem man Wärme mittheilt oder entzieht, so

*) Das Wort »Disgregation« hat Clausius zuerst benutzt; Clausius versteht darunter den Grad der Zertheilung eines Körpers und spricht, wenn eine Aenderung der Anordnung der kleinsten Theile eines Körpers in der Art, wie es im Text angedeutet wurde, stattfindet, von »Aenderungen der Disgregation des Körpers«. S. »Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit«. Poggendorff's Annalen 1862. Bd. 116. S. 73. Sowie: Clausius, »Abhandlungen über die mechan. Wärmetheorie«. Braunschweig 1864. Abhandlung VI.

zeigen sich im Allgemeinen auch Volumenänderungen, meist unter Ueberwindung äusserer Kräfte (Pressungen). Wir schliessen daraus, dass die einem Körper zugeführte Wärme im Allgemeinen also auch eine Aenderung der Anordnung der Bestandtheile bewirkt, dass dabei sonach Disgregationsarbeit verbraucht oder gewonnen wird; die Wärmemenge steht dabei ohne Zweifel ebenfalls in einem gewissen Zusammenhange mit dieser Disgregationsarbeit. Da ein solcher Zusammenhang auch mit der gleichzeitig stattfindenden Aenderung der Schwingungsarbeit besteht, so tritt vor Allem die Frage heran, welche Beziehungen zwischen den genannten Grössen wohl stattfinden mögen.

In dieser Hinsicht geht man nun in der mechanischen Wärmetheorie von folgender Annahme aus:

Die Wärmemenge, welche man einem Körper zuführt oder entzieht, ist der Summe der gleichzeitig stattfindenden Aenderungen der Schwingungs- und der Disgregationsarbeit des Körpers *direct proportional*.

Diese Hypothese ist es, welche allen unsern weitern Untersuchungen zu Grunde liegt und deren Wahrscheinlichkeit wir im Folgenden, bevor wir sie als Grundlage der mathematischen Entwickelung benutzen, noch näher zu prüfen haben.

Nach der genannten Annahme kann man eine gewisse Wärmemenge demnach unmittelbar durch die Arbeit messen, welche durch dieselbe geleistet worden ist, und daher hat man obigen Grundsatz auch einfach mit den Worten ausgesprochen: »Wärme und Arbeit sind äquivalent«. Die Aufnahme von Wärme von Seiten eines Körpers erscheint mit einer Aufnahme von Arbeit gleichbedeutend. Die Wärmeaufnahme besteht in einer Vermehrung, die Wärmeabgabe in einer Verminderung der Schwingungs- und Disgregationsarbeit des Körpers. Ist diese Annahme richtig, so muss man zunächst schliessen, dass man an einem Körper auch direct durch Arbeitsverrichtung (durch Compression etc.) ähnliche Aenderungen hervorzubringen vermag, die sonst durch Wärmezuleitung erreicht werden, und dass umgekehrt durch Arbeitsabgabe von Seite des Körpers (durch Ausdehnung desselben unter Ueberwindung eines äussern Druckes) ähnliche Aenderungen im Innern vorgehen, die wir beobachten, wenn derselbe Wärme ausstrahlt oder durch Leitung an andere Körper abgiebt.

Wir müssen im Weitern schliessen, dass die aufgenommene Wärme oder Arbeit, die eben im Allgemeinen zur Vermehrung der Schwingungsarbeit (der fühlbaren Wärme) und zur Veränderung der Anordnung der Bestandtheile verwendet wird, in solchen Fällen, wo die Disgregationsarbeit Null oder verschwindend klein ist, sich nur durch Erhöhung der Schwingungsarbeit, d. h. Vermehrung der fühlbaren Wärme (Erhöhung der Temperatur) äussert.

Man muss fernerhin auf die Möglichkeit schliessen, dass unter Umständen auch die fühlbare Wärme ungeändert bleiben kann und daher die ganze, einem Körper zugeleitete Wärme nur zur Aenderung der Anordnung der Bestandtheile verbraucht wird.

Die angegebenen Schlüsse finden aber auch wirklich durch die Erfahrung ihre Bestätigung, ja die hierher gehörigen Erscheinungen, die wir sogleich näher hervorheben werden, sind es gerade gewesen, welche zuerst auf die Annahme der Aequivalenz von Wärme und Arbeit geführt haben.

Es ist längst bekannt, dass bei der Reibung zweier Körper, ferner beim Stoss, überhaupt immer dann, wenn bei Wechselwirkung zweier Körper Arbeit verschwindet, oder, wie es gewöhnlich ausgesprochen wird, wenn dabei Arbeitsverluste stattfinden, jederzeit eine Erwärmung der Körper beobachtet wird, die unter Umständen sehr beträchtlich ausfallen kann.

Graf Rumford*) war der erste, welcher diese bekannte Erscheinung bestimmter auffasste und den Schluss zog, dass man durch mechanische Arbeit Wärme erzeugen könne, und der auch den Zusammenhang zwischen der verbrauchten Arbeit und der erzeugten Wärmemenge zu ermitteln suchte.

Er verglich die Arbeit, die beim Ausbohren eines Kanonenrohres aufgewendet wurde, mit der Stärke der Erwärmung des Rohres, welche Erwärmung er durch die Temperaturerhöhung von Wasser bestimmte, welches das Rohr umgab. Der Versuch ergab kein entscheidendes Resultat, weil die Wärmeverluste nicht berücksichtigt wurden und weil hier offenbar nur ein Theil der Arbeit auf Vermehrung der Schwingungsarbeit, der fühlbaren Wärme, der Rest aber als Disgregationsarbeit (Abtrennen der

*) Phil. Trans. 1798. »An Experimental Inquiry concerning the Source of the Heat which is excited by Friction«.

Metalltheile beim Bohren) verwendet wurde, welch' letzterer Theil sich direct nicht ermitteln lässt.

Humphry Davy*) schloss sich der Ansicht Rumford's an und suchte die Richtigkeit derselben durch andere Versuche darzulegen. Er zeigte, dass zwei Eisstücke, die unter der Glocke der Luftpumpe bei 0° Temperatur an einander gerieben werden, zum Schmelzen kommen und schloss, dass die Bewegung die Ursache der entwickelten Wärme sei, die sich hier durch Schmelzen des Eises äussert.

Das grosse Verdienst, den Satz über Aequivalenz von Wärme und Arbeit zuerst in bestimmter Weise ausgesprochen zu haben, gebührt aber dem Deutschen Dr. J. R. Mayer in Heilbronn. Seine im Jahre 1842 erschienene Abhandlung »Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur«**) enthält auf wenig Seiten die interessantesten Schlüsse.

Mayer sprach sich mit grosser Klarheit über die Frage aus; er zeigte, dass man Wasser in einem Gefässe durch Schütteln (Arbeitsverrichtung) erwärmen, die Temperatur desselben erhöhen könne; er schliesst, dass man durch Arbeitsverrichtung (Compression) unter hohem Drucke Eis in Wasser müsse verwandeln können, was später durch Mousson's Versuche***) bestätigt wurde, und sagt am Ende seiner Abhandlung ausdrücklich: »Wir müssen ausfindig machen, wie hoch ein bestimmtes Gewicht über den Erdboden erhoben werden müsse, dass seine Fallkraft äquivalent sei der Erwärmung eines gleichen Gewichtes Wasser von 0° auf 1° C.«

Die genannte Höhe giebt er dann zu 365 Meter an.

Mayer hat daher zuerst bestimmt ausgesprochen, dass die durch Arbeitsverrichtung erzeugte Wärmemenge der aufgewandten Arbeit proportional sei, dass das Eine durch das Andere direct gemessen werden könne, während vor ihm nur erkannt und ausgesprochen worden war, dass überhaupt zwischen Wärme und Arbeit ein gewisser Zusammenhang bestehen möge.

*) Researches on Heat, Light and Respiration in Boddoe's West Country Contributions. Vergl. Joule, Phil. Trans. for 1842.

**) Annalen von Wöhler und Liebig. Maiheft 1842.

***) Mousson, Einige Thatsachen, betreffend das Schmelzen und Gefrieren des Wassers. Poggendorff's Annalen. Bd. 105.

Weittragende Folgerungen aus diesen Anschauungen zu ziehen blieb Späteren, in erster Linie von Helmholtz und W. Thomson, vorbehalten.

Die genannte Proportionalität musste nun aber zunächst durch zuverlässige Versuche festgestellt werden, bevor man mit Aussicht auf Erfolg zur mathematischen Behandlung der Frage übergehen konnte.

Zum Messen der Wärmemengen nimmt man bekanntlich als Einheit diejenige Wärmemenge an, durch welche die Gewichtseinheit Wasser (1 Kilogramm) von 0° auf 1° Celsius erwärmt wird. Wenn nun wirklich Wärme und Arbeit äquivalent sind, so kann man, wie Mayer zuerst geschlossen hat, Wärmemengen auch in gleicher Art messen, wie Arbeit, nur muss bekannt sein, welche Wärmemenge (in Wärmeeinheiten, in Calorien) der Arbeitseinheit (einem Meterkilogramm) oder welche Arbeit einer Wärmeeinheit entspricht.

Diese Frage hat nun aber durch die schönen und vielartigen Versuche des Engländers Joule in unzweifelhafter Weise ihre Beantwortung gefunden.

Dessen Versuche zeigen nicht nur, dass durch Arbeit Wärme erzeugt werden kann, sondern, dass auch die erzeugte Wärmemenge jederzeit der aufgewandten Arbeit direct proportional ist. Die verschiedenen Versuche führten durchgängig auf nahezu die gleiche Beziehung, und zwar stellte sich heraus, dass durch eine Arbeit von 424 Meterkilogramm eine Wärmemenge erzeugt wird, die gerade die Wärmeeinheit ausmacht, d. h. eine Wärmemenge, durch die man ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° Celsius erwärmen kann.

Der Arbeitswerth 424 Meterkilogramm heisst das »Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit« oder kurz das »mechanische Wärmeäquivalent«, während man umgekehrt die Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit (1 mkg) entspricht, das »Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit« nennt.

Der von Joule gefundene Werth des mechanischen Wärmeäquivalents ist später auch durch andere Versuche bestätigt worden.

Joule gebührt also unzweifelhaft das Verdienst, diese wichtige Grösse zuerst zuverlässig bestimmt zu haben; ebenso unzweifelhaft ist aber auch, dass Mayer zuerst auf die Existenz

dieser wichtigen Constanten hingewiesen hat. Wenn Mayer, wie die eben angeführte Stelle seiner Abhandlung zeigt, diese Constante zu klein angiebt (er bestimmte den Werth aus Beobachtungen über die aus der Compression eines Gases frei werdende Wärmemenge), so lag es nur daran, dass einzelne Grössen, die Mayer in seine Rechnungen einzuführen hatte, damals noch nicht genau genug bestimmt waren.

Die Versuche zur Ermittelung des Werthes des mechanischen Wärmeäquivalentes müssen mit grosser Sorgfalt angeordnet und ausgeführt werden; es handelt sich darum, genau die Arbeit zu ermitteln, welche vollständig zur Erzeugung fühlbarer Wärme verwendet wird und dann diese Wärmemenge selbst zu bestimmen.

Beides ist nur möglich, wenn man zur Aufnahme der erzeugten Wärme solche Körper wählt, bei denen während des Versuches eine Aenderung der Anordnung der Bestandtheile nicht stattfindet.

Es muss, wie erwähnt, alle aufgewandte Arbeit zur Erhöhung der Schwingungsarbeit, d. h. der fühlbaren Wärme verwendet werden; kein Theil oder nur ein verschwindend kleiner Theil davon darf sich als Disgregationsarbeit der directen Beobachtung entziehen.

Wie nun Joule*) und spätere Experimentatoren, unter denen als der erste Hirn zu nennen ist, diese Bedingungen erfüllt haben, ist heute in allen Lehrbüchern der Physik auseinander gesetzt, es darf daher auf dieselben hier verwiesen werden.

Durch zahlreiche Versuche ist so zunächst dargethan worden, dass man in einem Körper durch mechanische Arbeit dieselben Erscheinungen hervorzubringen vermag, wie durch Wärmemittheilung; es wäre daher nur noch die Frage aufzuwerfen, ob bei einem Körper bei Arbeitsabgabe, wenn derselbe unter Ueberwindung eines äussern Druckes sich ausdehnt, auch diejenigen Aenderungen beobachtet werden, die sonst bei Wärmeverlust des Körpers durch Ausstrahlung oder Ableitung stattfinden und ob die vom Körper verrichtete Arbeit in der gleichen Beziehung zu der Verminderung der im Körper enthaltenen Wärme steht.

Wenn nun schon nach allem bis jetzt Erwähnten ohne Weiteres

*) Joule, Phil. Transactions for the year 1850. p. 1.

diese Frage bejahend beantwortet werden muss, so mag doch noch hervorgehoben werden, dass auch in dieser Beziehung Beobachtungen vorliegen.

Zunächst ist auf die längst bekannte Thatsache hinzuweisen, dass die Temperatur eines Gases abnimmt, wenn sich dasselbe unter Drucküberwindung, arbeitsverrichtend, ausdehnt; es verschwindet also Wärme, und die verschwundene Wärmemenge wird zu der gewonnenen Arbeit in dem bestimmten, schon angegebenen Verhältnisse stehen. Directe Beobachtungen liegen hier nicht vor, wohl aber ist für Dampf der betreffende Nachweis von Hirn*) geliefert worden.

Hirn beobachtete, welche Wassermenge während einer bestimmten Zeit im Dampfkessel einer grossen Dampfmaschine in Dampf verwandelt und in den Dampfcylinder geführt wurde. Nach Regnault's Versuchen war, weil Spannung und Temperatur dieses Dampfes beobachtet wurden, die Wärmemenge in demselben bekannt. Der Dampf wurde nach seinem Austritte aus dem Cylinder condensirt und aus der Menge und Temperatur des Einspritzwassers und des condensirten Dampfes die Wärmemenge berechnet, welche der Dampf beim Eintritte in den Condensator noch enthielt.

Nach der mechanischen Wärmetheorie, also nach den oben entwickelten Ansichten, muss die im Dampfe enthaltene Wärme bei seinem Austritte aus dem Dampfcylinder »geringer« sein, als die Wärmemenge, die ihm beim Eintritte innewohnte, und zwar muss die Differenz genau der vom Dampfe verrichteten Arbeit entsprechen, welch' letztere durch Bremsversuche ermittelt wurde. Eine solche Differenz hat Hirn nun nicht nur beobachtet, sondern Clausius**) hat auch gezeigt, dass die bei Hirn's Dampfmaschine verschwundene Wärmemenge zu der verrichteten Arbeit in dem Verhältniss stand, wie es die Theorie fordert.

Bei den verschiedenen Versuchen wurde für jede verschwundene Wärmeeinheit 399 bis 427 Meterkilogramm Arbeit geleistet und das Mittel aus allen erhaltenen Werthen betrug 413 Meter-

*) Hirn, Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur, présentées à la société de physique de Berlin. Paris 1858.

**) Hirn, a. a. O. S. 134. (Bericht über die genannte Arbeit an die physikalische Gesellschaft zu Berlin von Prof. Dr. Clausius.)

kilogramm; es ergiebt sich also nahezu der von Joule gegebene Werth.

Die Abweichung erklärt sich leicht aus den Schwierigkeiten, welche bei Versuchen in so grossartigem Maassstabe (die Dampfmaschinen entwickelten über 100 Pferdestärken) zu überwinden sind; man muss vielmehr staunen über die Gewandtheit, mit welcher der geschickte Experimentator, dem die mechanische Technik auch die Lösung höchst wichtiger anderer Fragen schon zu danken hat, die Versuche ausführte.

Fassen wir schliesslich die Resultate der angeführten experimentellen Untersuchungen zusammen, so lässt sich wohl der erste Grundsatz der Thermodynamik, »dass Wärme und Arbeit äquivalent sind«, als erwiesen ansehen; d. h. wir sind berechtigt, bei den folgenden Untersuchungen von der Annahme auszugehen: »dass man aus Wärme Arbeit gewinnen, dass man umgekehrt Wärme durch Arbeit erzeugen kann; dass ferner dabei der verbrauchten oder erzeugten Wärmeeinheit eine Arbeit von 424 Meterkilogrammen und umgekehrt der Arbeitseinheit eine Wärmemenge von $\frac{1}{424}$ Wärmeeinheiten entspricht, unter Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge verstanden, welche erforderlich ist, ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° Celsius zu erwärmen.«

ERSTER ABSCHNITT.

Fundamentalsätze der Thermodynamik.

§ 1. Vorbemerkungen.

Die Zustandsänderungen eines Körpers, welche mit einer Mittheilung von Wärme verbunden sind und die ohne Weiteres als eine Folge derselben angesehen werden können, werden zunächst unter der Voraussetzung des Gleichgewichtszustandes der Untersuchung unterworfen; es wird also angenommen, dass weder am gesammten Körper, noch in seinen Theilen sichtbare, mit Geschwindigkeitsänderungen verbundene Ortsveränderungen vorliegen.

Ausserdem werde vorausgesetzt, dass zwar Aenderungen des Aggregatzustandes, nicht aber gleichzeitige chemische Aenderungen, also nach den hierüber bestehenden Anschauungen Veränderungen innerhalb der Moleküle in der Gruppirung ihrer Atome auftreten.

Unter diesen einschränkenden Annahmen, wozu aber noch eine weitere, sogleich zu erwähnende Annahme tritt, ist der Zustand eines Körpers durch sein Gewicht, sein Volumen und seinen Druck vollständig bestimmt.

Da man aber der Einfachheit wegen, sei es nun, dass man an einen Körper von endlicher Ausdehnung oder an kleinste Theile desselben denkt, die maassgebenden Grössen auf die Gewichtseinheit Körpermenge beziehen kann, so kommt nur das auf die Gewichtseinheit bezogene Volumen, das »specifische Volumen« und der »Druck« in Betracht.

Als »specifischen Druck« bezeichnet man den in Gewichtseinheiten auf die Flächeneinheit (in Kilogramm auf ein Quadratmeter) bezogenen Druck. Hierbei wird aber und hierin liegt die weitere, vorhin angezeigte Einschränkung, vorausge-

setzt, dass der Druck für alle durch die betreffenden Punkte hindurchgehenden Ebenen gleich gross ist; eine Annahme, die wenigstens für tropfbar flüssige und luftförmig flüssige Körper jederzeit zutreffend ist; setzt man nun weiterhin noch voraus, dass dieser Druck an allen Punkten eines Körpers, also auch in allen Theilen seiner Oberfläche gleich gross ist, so entsteht ein Körper, wie er den folgenden Untersuchungen zunächst zu Grunde gelegt werden soll. Ein Körper der bezeichneten Art kann (im weiteren, als dem gebräuchlichen Sinne) als homogen oder (nach Grashof) als ein »Körper von gleichförmigem Wärmezustand« bezeichnet werden.

Uebrigens wird der Einblick in die folgenden Betrachtungen, sofern man nicht von vornherein nur an tropfbare oder luftförmige durch ein Gefäss umschlossene Flüssigkeiten denken will, durch die Annahme erleichtert, dass der in Untersuchung stehende Körper von einer elastischen Hülle umgeben ist, die bei dem vorausgesetzten Gleichgewicht einen auf alle Oberflächenelemente gleichen und normal gegen dieselben gerichteten Druck ausübt. Wird nun der Gewichtseinheit eines Körpers der angenommenen Beschaffenheit von aussen her die unendlich kleine Wärmemenge dQ, in Wärmeeinheiten gemessen gedacht, zugeführt, so sind damit im Zustande des Körpers folgende Aenderungen verbunden.

Es findet erstens eine Verstärkung der Molekularbewegung statt; die um Gleichgewichtslagen schwingenden kleinsten Theile des Körpers erleiden Aenderungen ihrer Geschwindigkeit und ihrer Entfernung von der Gleichgewichtslage, in Folge deren die in der Gesammtheit aller Molekularbewegungen angehäufte Arbeit eine Veränderung erfährt. Es möge die in Arbeitseinheiten (Meterkilogramm) gemessene Zunahme der Energie dieser Molekularbewegungen mit dW bezeichnet werden.

Es wird zweitens eine Veränderung der Mittellagen der kleinsten Theile des Körpers eintreten, deren Entfernung von einander als sehr gross gegen die Schwingungsweiten angesehen werden. Da aber diese Theile mit gewissen Kräften auf einander einwirken, so wird mit der Lagenveränderung ein Arbeitsaufwand, eine Veränderung der Energie der Lage oder der potentiellen Energie verbunden sein. Es werde diese Arbeitsquantität, im Sinne des Verbrauches, mit dJ bezeichnet.

Endlich wird drittens eine Veränderung des Gesammt-

volumens des Körpers stattfinden. Wird hierbei an eine Ausdehnung gedacht, so wird der von aussen gegen die Körperoberfläche wirkende Druck überwunden und einer unendlich kleinen Ausdehnung eine Arbeit entsprechen, die mit dL bezeichnet werde.

Die hier näher bezeichneten drei Arbeitsmengen zusammengenommen stehen nun nach dem in der Einleitung gegebenen Grundsatz in einfacher Beziehung zu der Wärmemenge dQ, welche während der angenommenen Zustandsänderungen zugeführt wurde. Bezeichnet man mit A, in Wärmeeinheiten gemessen, die Wärmemenge, welche verschwindet oder erzeugt wird, wenn die Arbeitseinheit (ein Meterkilogramm) gewonnen oder verbraucht wird, so entspricht im vorliegenden Falle der verrichteten Arbeit $dW + dJ + dL$ ein Wärmeverbrauch von dem Werthe $A\ (dW + dJ + dL)$, und man erhält als Ausgangspunkt für alle weiteren Untersuchungen die Gleichung:

$$dQ = A\ (dW + dJ + dL). \qquad (1)$$

In dieser Gleichung bedeutet A eine Constante, deren Werth nach den in der Einleitung gemachten Bemerkungen zu $1 : 424$ anzunehmen ist; dass im Uebrigen einzelne Glieder der vorstehenden Gleichung in speciellen Fällen auch Null oder negativ erscheinen können, ist selbstverständlich. Das positive und negative Zeichen von dQ wird beziehungsweise auf eine Wärmemittheilung oder eine Wärmeentziehung deuten, während bei dem Gliede dL das erstere Zeichen auf eine Volumenvergrösserung (Expansion) des Körpers, das andere auf eine Volumenverminderung (Compression) hinweist.

Nicht zu übersehen ist aber, dass die vorstehende Gleichung nur unter den vorhin angegebenen mehrfachen Einschränkungen gültig ist. Es wird sich zwar in weiter unten folgenden Untersuchungen zeigen, dass man in gewissen Fällen noch einzelne der gemachten speciellen Voraussetzungen fallen lassen und die Gleichung (1) selbst unter Voraussetzung gleichzeitig stattfindender chemischer Aenderungen entsprechend umformen und erweitern kann, doch soll bis auf Weiteres von der Betrachtung derartiger Fälle abgesehen werden.

§ 2. Von der innern Arbeit.

Die Zustandsänderungen eines Körpers sind, wie bereits hervorgehoben wurde, durch Volumen- und Druckänderung vollständig bestimmt, sobald man die Gewichtseinheit Körpermasse zu Grunde legt. Bezeichnet man das »specifische Volumen« mit v und den »specifischen Druck« in dem bereits angegebenen Sinne mit p, so käme es im Weiteren darauf an, die Gl. (1) dadurch umzuformen, dass man die einzelnen Glieder auf der rechten Seite durch die Grössen p und v auszudrücken sucht. Eine solche Umformung ist nicht durchführbar, weil es bis jetzt noch nicht gelungen ist ohne Annahme bestimmter Hypothesen das erste und zweite Glied der rechten Seite der Gleichung (1) zu den beiden Variabeln p und v in Beziehung zu bringen. Man zieht daher das zweite Glied mit dem dritten oder mit dem ersten Gliede zusammen; beide Arten der Umformung sind zuerst von Clausius*) angegeben worden. Setzt man zuerst: $dJ + dL = dH$ so folgt aus Gl. (1)

$$dQ = A(dW + dH). \tag{2}$$

Man kann daher aussprechen, dass die dem Körper mitgetheilte Wärmemenge dQ zu zweierlei verwendet wird; der eine Theil AdW wird verbraucht zur Erhöhung der Energie der Molekularbewegung, zur Vermehrung der Arbeit, welche der Gesammtheit der kleinsten Theile in Folge ihrer schwingenden Bewegungen um Gleichgewichtslagen innewohnt. Man nimmt an, dass dieser Theil der zugeführten Wärme als Vermehrung der fühlbaren (durch Thermometer erkennbaren) Wärme sich äussert. Das zweite Glied AdH der Gleichung (2) dagegen entspricht der Arbeit dH, die bei der Lagenänderung der kleinsten Theile sowohl zur Ueberwindung der Kräfte, mit der die Theile auf einander einwirken, wie zugleich bei der Aenderung des Gesammtvolumens zur Ueberwindung des von aussen her auf die Körperoberfläche wirkenden Druckes verbraucht wird; nach Clausius spricht man sich einfach dahin aus, es wird die Arbeit dH oder der

*) Clausius, Abhandlungen etc. 1864. Vergl. auch dessen Werk: »Die mechanische Wärmetheorie«. Braunschweig 1876.

ihr entsprechende Theil $A\,dH$ der zugeführten Wärme zur Veränderung der Disgregation verwendet.

Weit fruchtbarer ist aber die zweite Art der angegebenen Umformung der Gleichung (1). Setzt man nämlich $dW + dJ = dU$, so folgt aus der angezogenen Gleichung

$$dQ = A(dU + dL), \tag{3}$$

und dieser Ausdruck ist es, der als Ausgangspunkt für alle folgenden Untersuchungen dienen wird. Die dem Körper mitgetheilte Wärme spaltet sich wieder in zwei Theile; der Theil $A\,dU$ umfasst die Vermehrung dU der kinetischen und der gesammten potentiellen Energie, während der zweite Theil der Wärme $A\,dL$ der Arbeit entspricht, welche bei der Ausdehnung des Körpers zur Ueberwindung des von aussen gegen die Oberfläche wirkenden Druckes verbraucht wird und welcher als die für das Auge wahrnehmbare Wirkung der Wärmemittheilung anzusehen ist.

Der erstgenannte Theil dU umfasst nach dem Erwähnten die ganze Arbeit, die im Innern des Körpers gethan worden ist; es wird daher in der Folge der Werth U die innere Arbeit und dU die Zunahme der innern Arbeit genannt werden. In neuerer Zeit wird vielfach (nach Thomson) die Grösse U auch als Gesammtenergie oder als Energie des Körpers kurzweg bezeichnet*). Unter den bei der Aufstellung der Gl. (1) gemachten speciellen Voraussetzungen muss für einen gegebenen Körper die innere Arbeit U durch den Druck p und das Volumen v (der Gewichtseinheit) vollständig bestimmt oder als Function von p und v darstellbar sein.

Setzt man demnach

$$U = F(p, v), \tag{4}$$

so giebt die Differentiation:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial p}\,dp + \frac{\partial U}{\partial v}\,dv,$$

oder wenn man die beiden partiellen Differentialquotienten beziehungsweise mit X und Z bezeichnet, also setzt:

*) Kirchhoff nennt die mit dem negativen Vorzeichen versehene Grösse U die »Wirkungsfunction«. — Clausius versteht unter innerer Arbeit nur denjenigen Theil, dessen Veränderung in Gl. (1) des Textes mit dJ bezeichnet ist.

$$X = \frac{\partial U}{\partial p} \quad \text{und} \quad Z = \frac{\partial U}{\partial v},$$

so schreibt sich einfacher:

$$dU = X\,dp + Z\,dv \tag{5}$$

und hierbei stehen die beiden Functionen X und Z nach den Regeln der Differentialrechnung in der Beziehung:

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial Z}{\partial p}, \tag{6}$$

eine Beziehung, von der in den folgenden Untersuchungen Gebrauch gemacht werden wird.

Die Auffindung der Form der in Gl. (4) angegebenen Function bildet das Hauptziel aller folgenden Untersuchungen.

§ 3. Von der äussern Arbeit.

Das zweite Glied dL der Gl. (3) giebt den Arbeitswerth, welcher bei der unendlich kleinen Ausdehnung des Körpers zur Ueberwindung des von aussen her stattfindenden Druckes verbraucht wird; man nennt diesen Werth dL, oder wenn man es mit einer endlichen Ausdehnung zu thun hat, den Werth L (nach Clausius) die »äussere Arbeit«; wobei aber zunächst durchgängig noch die Annahme festgehalten wird, dass der Druck p im ganzen Verlauf der Volumenänderung an allen Punkten im Innern des Körpers gleich gross und überdies gleich ist dem Drucke, der von aussen her (beispielsweise durch eine umschliessende Hülle) gegen die Körperoberfläche wirkt. Bezeichnet man den Druck im Innern, also auch den Druck, den der Körper von innen nach aussen gegen die Hülle ausübt, als »Körperdruck« und umgekehrt den Druck von Seiten der Hülle gegen die Körperoberfläche als »äussern Druck«, so wird also vorausgesetzt, dass während der Zustandsänderung des Körpers fortwährend Gleichgewicht zwischen dem Körperdruck und dem äussern Druck stattfindet, der Werth p also sowohl für den einen als den andern Druck als Maass giltig ist; denkt man an eine Volumenvergrösserung des Körpers während der Wärmemittheilung, also an Ausdehnung oder Expansion, so ist die gemachte Voraussetzung nur unter der Annahme giltig, dass die Ausdehnung

langsam und gleichförmig stattfindet, dass also die Oberflächenelemente in der Richtung ihrer Normalen langsam und gleichförmig nach aussen fortrücken; bei der Volumenverminderung oder Compression des Körpers findet die Bewegung der Oberflächenelemente in gleicher Art in umgekehrter Richtung, nach innen hin, statt.

Unter den hier besprochenen Verhältnissen lässt sich leicht die Arbeitsmenge dL durch p und v ausdrücken.

Bezeichnet man die Oberflächenelemente mit f_1 f_2 f_3 u. s. f. und die unendlich kleinen Wege, um welchen dieselben bei einer unendlich kleinen Ausdehnung des Körpers nach aussen hin fortrücken, mit s_1 s_2 s_3 u. s. f., so ist der Druck von aussen gegen die einzelnen Flächenelemente $f_1 p$, $f_2 p$, $f_3 p$ u. s. f., und da diese Pressungen während der unendlich kleinen Verschiebungen als constant anzunehmen sind, so betragen die einzelnen Arbeitsquantitäten $f_1 p s_1$, $f_2 p s_2$, $f_3 p s_3$ u. s. f., und deren Summe repräsentirt die ganze zur Ueberwindung des äussern Druckes verbrauchte Arbeit dL; es besteht demnach die Beziehung

$$dL = p\,[f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3 + \cdots].$$

Nun ist aber der Ausdruck in der Klammer einfach die Zunahme des Gesammtvolumens v der Gewichtseinheit des Körpers und daher folgt die Beziehung:

$$dL = p\,dv \tag{7}$$

und weiterhin durch Substitution in Gl. (3)

$$dQ = A\,(dU + p\,dv). \tag{8}$$

Denkt man an eine endliche Zustandsänderung und bezeichnet man den Druck und das specifische Volumen im Anfange beziehungsweise mit p_1 und v_1 und ebenso Druck und Volumen am Ende des Processes mit p_2 und v_2, so ist nach Gl. (4) der Werth der innern Arbeit im Anfange $U_1 = F\,(p_1, v_1)$ und am Ende $U_2 = F\,(p_2, v_2)$ und man erhält aus Gl. (8) unter Benutzung von (7) die ganze zugeleitete Wärmemenge

$$Q = A\,(U_2 - U_1 + L) \tag{9}$$

oder

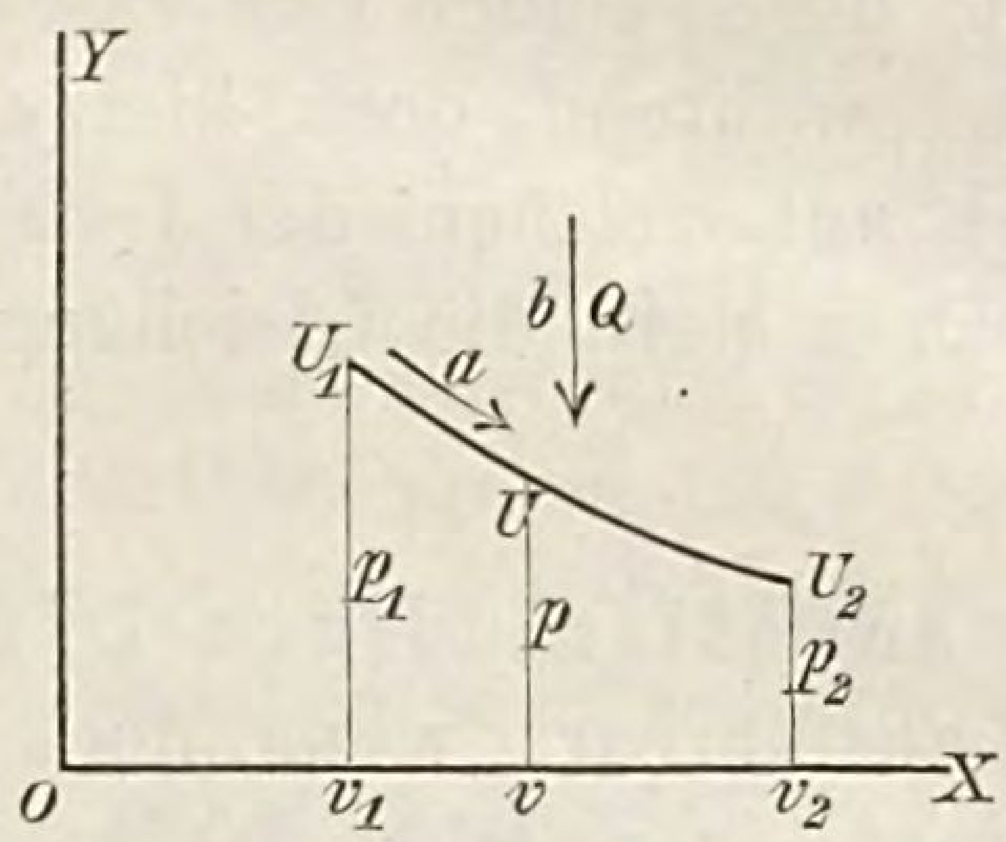
$$Q = A\left(F\,(p_2, v_2) - F\,(p_1, v_1) + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv\right). \tag{10}$$

Die ersten beiden Glieder der rechten Seite dieser Gleichungen sind vollständig durch den Anfangs- und Endzustand des Körpers bestimmt, vorausgesetzt, dass die Form der Function $U = F(p, v)$ als bekannt angesehen wird; nicht so ist es mit dem dritten Gliede, welches denjenigen Theil der Wärme darstellt, welcher zu äusserer Arbeit verbraucht wird. Die Ausführung der in Gl. (10) angedeuteten Integration erfordert noch die Kenntniss, auf welche Weise während des ganzen Verlaufes der Wärmemittheilung der Körperdruck und der äussere Druck p, die, wie wiederholt hervorgehoben werden mag, hier als identisch angesehen werden, mit dem Volumen sich veränderte, und diese Veränderung wird wiederum abhängig sein von der Art und Weise, nach welcher in allen Theilen des ganzen Verlaufes des Processes die Wärmemittheilung stattgefunden hat.

Wird für einen bestimmten Fall das Gesetz, nach welchem sich der Druck p mit dem Volumen v ändert, als bekannt angesehen, so lässt sich der Gang der Zustandsänderungen sehr einfach auf graphischem Wege vor Augen führen. Trägt man nämlich den jeweiligen Werth des specifischen Volumens v als Abscisse und den zugehörigen Druck p (Fig. 1) als Ordinate auf, so ist der Zustand des Körpers in dem betreffenden Augenblicke durch die Lage des Punktes U vollständig bestimmt und durch die Curve $U_1 U U_2$, welche in der Folge kurz als »Druckcurve« bezeichnet werden soll, ist auch der Weg angedeutet, auf welchem der Uebergang aus dem Anfangszustande U_1 in den Endzustand U_2 vorausgesetzt wird; die Richtung des Ueberganges kann überdies noch durch einen in der Richtung der Curve $U_1 U_2$ eingetragenen Pfeil a bestimmt bezeichnet werden; ist dieser Uebergang mit einer Zuführung von Wärme verbunden, so wird dieses in der Folge durch einen zweiten Pfeil b angedeutet werden, der gegen die Curve $U_1 U_2$ gerichtet ist. Soll in der Figur selbst schon zum Ausdruck kommen, dass eine Wärmeentziehung vorliegt, so soll einfach die Richtung des Pfeiles b bei den weiter folgenden Darlegungen umgekehrt werden; ebenso wird die Umkehrung des Pfeiles a den Uebergang aus dem Zustande U_2 nach dem Zustande U_1, also eine Compression des Körpers andeuten. Im Anfang und am Ende des Processes setzt man jederzeit den Ruhezustand voraus; soll nun vom Punkte U_1 ausgegangen werden, so hat man nur vorauszusetzen,

dass zur Einleitung der langsamen und gleichförmigen Ausdehnung der äussere Druck momentan etwas vermindert, dagegen beim umgekehrten Wege, bei der Compression, beim Zustande U_2 als Ausgangspunkt dieser Druck momentan vergrössert wird; auf dem ganzen Wege der Expansion ($U_1 U_2$) oder der Compression ($U_2 U_1$) liegt dann Gleichheit zwischen dem Körperdrucke und dem äussern Drucke vor und man kann den Process sowohl auf dem Hinwege von U_1 nach U_2, wie auf derselben Druckcurve in umgekehrter Richtung von U_2 nach U_1 ausführen. Bei der Umkehrung ändern die Pfeile der Figur ihre Richtung und in den Gleichungen (9) und (10) wechseln alle Glieder ihr Zeichen; lag demnach bei dem Hingange eine Wärmemittheilung vor, so wird der Rückgang unter Ableitung derselben Wärmemenge im Ganzen und in den einzelnen Theilen der Druckcurve stattfinden, und wurde beim Hingange die äussere Arbeit L gewonnen, so wird beim Rückgange dieselbe Arbeit wieder aufzuwenden sein. Man nennt einen solchen Process umkehrbar und drückt auf diese Weise am kürzesten aus, dass während der Zustandsänderung des Körpers fortwährend Gleichheit zwischen dem äussern und dem Körperdrucke vorliegt.

Fig. 1.



Die äussere Arbeit

$$L = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

der Gln. (9) und (10) wird hierbei einfach durch die Fläche dargestellt, welche in Fig. 1 von der Druckcurve $U_1 U_2$ und den beiden Endordinaten umschlossen wird. Diese Arbeitsmenge hängt nur von dem Verlaufe der Druckcurve ab; da aber durch zwei bestimmt gegebene Punkte U_1 und U_2 unendlich viele Druckcurven gelegt werden können, so ist für jede derselben die entsprechende äussere Arbeit L von anderem Werthe und in Folge dessen auch nach Gl. (9) und (10) die Wärmemenge Q, welche für den angenommenen Uebergang dem Körper mitzutheilen ist.

Nur derjenige Theil der zugeführten Wärme, welcher zu innerer Arbeit verbraucht wurde, ist durch den Anfangs- und den End-Zustand allein schon vollständig bestimmt. Dieser wichtige Satz, der zuerst in bestimmter Form von Clausius ausgesprochen wurde, bildet den bedeutsamen Ausgangspunkt der mechanischen Wärmetheorie; bis dahin wurde in der Physik, gewöhnlich ohne weitere Erläuterung die Annahme gemacht, dass die Wärmemenge, die einem Körper bei gewissen Zustandsänderungen mitzutheilen sei, vollständig durch seinen Anfangs- sowie durch seinen End-Zustand (p_1, v_1) und (p_2, v_2) bestimmt sein solle, während doch hierzu auch noch der Weg gegeben sein muss, auf welchem der Uebergang stattfindet. Mathematisch gesprochen stellt die Gleichung (8) nämlich

$$dQ = A(dU + Apdv)$$

ein unvollständiges Differential dar; die Integration ist nur ausführbar, wenn noch eine weitere Angabe, nämlich die vorliegt, in welcher Weise während der Wärmemittheilung und der Zustandsänderungen des Körpers der Druck p mit dem Volumen v variirt.

§ 4. Ableitung der ersten Hauptgleichung.

Substituirt man in der soeben angezogenen Gleichung für die Veränderung der innern Arbeit die Gl. (5), in welcher X und Z Functionen von p und v darstellen, welche die partiellen Differentialquotienten der innern Arbeit U nach p und v bedeuten, so folgt:

$$dU = Xdp + Zdv \tag{11}$$

und dann

$$dQ = A(Xdp + (Z + p)\, dv)$$

Setzt man hier, weil dadurch alle folgenden Ableitungen eine einfachere Form annehmen,

$$Z + p = Y \tag{12}$$

so schreibt sich

$$dQ = A(Xdp + Ydv) \tag{13}$$

Differentiirt man Gl. (12) auf beiden Seiten in Hinsicht auf p so folgt

$$\frac{\partial Z}{\partial p} + 1 = \frac{\partial Y}{\partial p}$$

und hieraus unter Benutzung von Gl. (6) S. 24:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1 \, , \tag{I}$$

und diese Gleichung mag als die erste Hauptgleichung bezeichnet werden. Sie wurde zuerst, wenn auch in anderer Form, von Clausius gegeben und ist einfach der analytische Ausdruck für die Thatsache, dass Gl. (13) ein »unvollständiges Differential« ist, weil im andern Falle die rechte Seite der ersten Hauptgleichung (I) gleich Null, statt gleich der Einheit sein müsste. Da Gleichung (13) aus Gl. (8) hervorgegangen ist und diese bereits als unvollständiges Differential in der vorhergehenden Untersuchung erkannt worden ist, so beruht das im Vorstehenden und in Gl. (I) Gegebene nur darin, dass in mathematischer Form ausgedrückt wird, was vorher in Worten erläutert wurde.

§ 5. Ableitung der zweiten Hauptgleichung.

Die Fortführung der allgemeinen Untersuchungen erfordert die Einführung von zwei weiteren Functionen, die, wie sich zeigen wird, eine hervorragende Bedeutung in der Wärmelehre einnehmen. Die eine dieser Functionen sei mit S bezeichnet und ihre Beziehung zu p und v zunächst allgemein durch die Formel

$$S = f(p, v) \tag{14}$$

dargestellt.

Dividirt man jetzt die vorhin angegebene Gl. (13) auf beiden Seiten mit AS, so folgt

$$\frac{dQ}{AS} = \frac{X}{S} \, dp + \frac{Y}{S} \, dv \ . \tag{15}$$

Man kann nun die Function S der Art wählen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential wird, d. h. dass dieser Ausdruck hervorgegangen erscheint aus der Differentiation einer weiteren Function:

$$P = \varphi(p, v) \, , \tag{16}$$

so dass die Beziehung

$$\frac{dQ}{AS} = dP \tag{17}$$

oder

$$dQ = AS\,dP \tag{18}$$

gültig ist. Mit diesen Annahmen ist aber auch die Bedeutung der beiden Functionen S und P mathematisch vollständig festgestellt; die Function S zunächst erscheint hier als der integrirende Divisor*) der rechten Seite der Gleichung (13) und ihr

*) Anmerkung. Es giebt, wie hervorgehoben zu werden verdient, unendlich viele Functionen, welche wie S die Eigenschaft besitzen, den Ausdruck Gl. (15) in ein vollständiges Differential umzubilden. Denkt man sich Gl. (17) durch eine beliebige Function von P, die mit $f(P)$ bezeichnet werden mag, auf beiden Seiten dividirt, so folgt

$$\frac{dQ}{ASf(P)} = \frac{dP}{f(P)}.$$

Da nun hier die rechte Seite integrabel ist, so ist es auch die linke und daher kann allgemein auch der Ausdruck $Sf(P)$ als integrirender Divisor angesehen werden. Dabei ist, wie erwähnt, $f(P)$ eine willkürliche Function von P, die beliebig gewählt, also wie es im Text geschieht, auch der Einheit gleich gesetzt werden kann. Sollten bei späteren Anwendungen durch eine andere Wahl dieser Function sich Vortheile herausstellen, so kann man jederzeit von vorstehendem Satze Gebrauch machen.

So kann man im Besonderen auch $f(P)$ einer beliebigen Constanten k gleich setzen, so dass auch dem Werthe kS alle Eigenschaften beigelegt werden können, die in den weitern Untersuchungen im Texte für die Function S selbst aufgefunden werden. Gerade diese letztere Verallgemeinerung ist es, von der in der Folge nützlicher Gebrauch gemacht werden wird.

Die im Texte gegebene Darstellung, Einführung der Function S als integrirender Divisor, findet sich zuerst in der 2. Auflage des vorliegenden Buches (1866). R. Rühlmann bemerkt in seiner »Geschichte der mechanischen Wärmetheorie« am Schlusse des 2. Bandes seines »Handbuches der mech. Wärmetheorie«, Braunschweig 1885, dass vor mir schon Reech (Journal de Mathématiques pures et appliquées von Liouville. 2. Série t. I. 1856 p. 58) denselben Weg eingeschlagen habe. Diese Bemerkung ist aber durchaus unrichtig. In der ersten Auflage des vorliegenden Buches (1860) habe ich, natürlich unter Angabe der Quelle, bei der Behandlung des zweiten Hauptsatzes den Weg von Reech eingeschlagen und das erwähnt gelegentlich auch Clausius; die Bemerkung des Letzteren ist zweifellos für R. Rühlmann schon hinreichend gewesen, die Arbeit von Reech überhaupt darauf hin nicht näher zu prüfen. Reech geht nämlich von vornherein von der Annahme aus, dass S eine Function der Temperatur sei und gab damals eigentlich nichts, als was man schon, insbesondere durch Clausius, wusste. Erst in der zweiten Auflage habe ich den oben betretenen Weg eingeschlagen: derselbe vermeidet zunächst noch jede

Zusammenhang mit den Functionen X und Y ist nach Gl. (15) nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung durch die Formel

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{S}\right)$$

gegeben.

Führt man die angedeutete Differentiation aus, so folgt

$$S\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial S}{\partial v} = S\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial S}{\partial p},$$

oder auch

$$S\left(\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v}\right) = Y\frac{\partial S}{\partial p} - X\frac{\partial S}{\partial v}.$$

Da aber nach der ersten Hauptgleichung (I) der Ausdruck in der Parenthese der Einheit gleich ist, so ergiebt sich

$$S = Y\frac{\partial S}{\partial p} - X\frac{\partial S}{\partial v} \tag{II}$$

und das mag als die zweite Hauptgleichung der Thermodynamik hingestellt werden. Die Gleichung ist zuerst von Clapeyron*) und später in anderer Form von Clausius ent-

Annahme über die physikalische Bedeutung der genannten Function und darin liegt der Unterschied, auf den meiner Ansicht nach ein grosses Gewicht gelegt werden muss.

*) E. Clapeyron, Ingénieur des Mines (geb. 21. Febr. 1779, gestorben 28. Jan. 1864) »Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur«. Journal de l'école polytechnique. Vingt-troisième cahier. t. XIV. Paris 1834. Erschien erst 1843 in deutscher Uebersetzung in »Poggendorff's Annalen« Bd. 59. S. 446 und 566. Diese meisterhaft geschriebene Abhandlung Clapeyron's, die sich durch grosse Klarheit und Eleganz in der mathematischen Darstellung auszeichnet, ist überhaupt die erste mathematische Arbeit über Thermodynamik und stützt sich auf das früher sehr seltene Werk von Sadi Carnot (geb. 1. Juni 1796, gestorben 24. August 1832) »Reflexions sur la puissance motrice du feu«, Paris 1824.

Beide Arbeiten sind lange Zeit fast unbeachtet, wenigstens unbenutzt geblieben, bis später, insbesondere durch die Abhandlungen von Clausius, von denen die erste 1850 erschien, ihr hoher Werth erkannt wurde.

Die Arbeit von Carnot ist neu gedruckt in den »Annales scientifiques de l'École normale supérieure 1872 (II^e série t. I.) und in neuester Zeit (1878) unter dem ursprünglichen Titel separat bei Gauthier-Villars in Paris erschienen. Diese Ausgabe enthält interessante biographische Notizen und

wickelt worden. Beide legen aber der Function S von vornherein eine bestimmte physikalische Bedeutung bei, auf welche die folgende Untersuchung gleichfalls führen wird, die aber nicht ohne Aufstellung eines neuen Grundsatzes gewonnen werden kann. Es erscheint mir also zweckmässiger, bei den allgemeinen Darlegungen bis auf Weiteres ausschliesslich nur auf dem ersten Hauptsatze (der Aequivalenz von Wärme und Arbeit) zu fussen. Entwickelt man jetzt aus Gl. (II) das eine Mal Y, das andere Mal X und setzt man die Werthe in Gl. (13) ein, die im Folgenden unter (III) wieder mit aufgeführt ist, indem man zugleich von der Bezeichnung

$$dS = \frac{\partial S}{\partial p} dp + \frac{\partial S}{\partial v} dv \tag{19}$$

Gebrauch macht, so ergiebt sich sofort noch die zweite und dritte der folgenden drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A\,[Xdp + Ydv] \\ dQ &= \frac{A}{\frac{\partial S}{\partial p}}\,[XdS + Sdv] \\ dQ &= \frac{A}{\frac{\partial S}{\partial v}}\,[YdS - Sdp] \end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Auszüge aus den hinterlassenen Schriften Carnot's und wurde 1878 der Pariser Akademie der Wissenschaften von dessen jüngerem Bruder, dem Senator H. Carnot, überreicht. Die merkwürdigste Stelle in den hinterlassenen Schriften ist die folgende, welche dieser Ausgabe facsimilirt beigelegt ist:

»D'après quelques idées que je me suis formées sur la théorie de la chaleur, la production d'une unité de puissance motrice nécessite la destruction de 2,70 unités de chaleur.« Nun versteht Carnot unter Arbeitseinheit die Arbeit, welche erforderlich ist, ein Cubikmeter Wasser auf 1 Meter zu heben, seine Einheit ist demnach 1000 Meterkilogramm, und der Wärmeeinheit würde also die Arbeit von

$$\frac{1000}{2,70} = 370 \text{ Meterkilogr.}$$

entsprechen und das ist fast genau derselbe Werth, welchen J. R. Mayer (1842) für das mechanische Wärmeäquivalent, allerdings unter genauer Angabe des Weges, der ihn dazu führte, angegeben hat. (Mayer giebt 365 mkg.)

Wir setzen hierzu noch, der Uebersicht wegen, die oben bereits unter (8) und (18) gegebenen Gleichungen

$$dQ = A\,[dU + pdv]$$

und

$$dQ = AS\,dP.$$

Diese fünf Gleichungen sind identisch und unterscheiden sich nur dadurch, dass in jeder Gleichung andere Urvariable vorausgesetzt werden. Eine Verwerthung dieser Formeln ist aber erst möglich, wenn die Form der Functionen X, Y, S und P gegeben ist. Ueberblickt man den Gang der bisherigen Entwickelung, so erkennt man aber, dass nur eine einzige der bezeichneten Functionen ermittelt zu werden braucht, um sogleich alle übrigen aus den gegebenen Relationen zu ermitteln.

Wäre z. B. die Form der Function $S = f\,(p,v)$ auf irgend welchem Wege erkannt worden, so liessen sich aus den beiden Hauptgleichungen (I) und (II) die Functionen X und Y ableiten; die Substitution von Y in Gl. (12) würde dann Z ergeben, worauf durch Integration der Gl. (11) die Function U hervortreten wird. Die letzte Function P endlich ergiebt sich, wenn man unter Beachtung der Gl. (18) die Gl. (15) integrirt.

Der hier angedeutete Gedankengang ist es denn nun auch, den wir im Weiteren verfolgen werden. Die Gewinnung der Function S erfordert jedoch noch eine Reihe von Voruntersuchungen, deren Ergebnisse auch im Einzelnen für die später folgenden Anwendungen zur Lösung bestimmter physikalischer und technischer Fragen von Bedeutung sind.

§ 6. Untersuchung verschiedener Druckcurven.

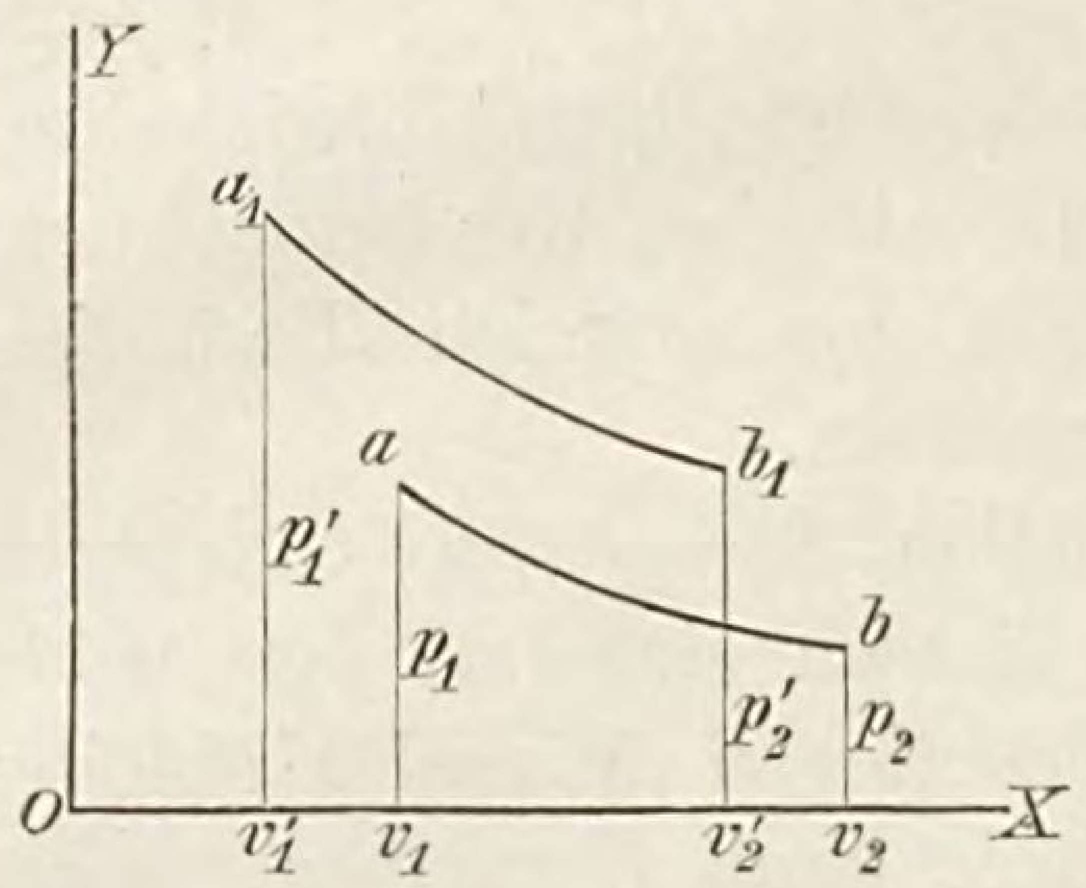
Geht ein Körper unter Wärmemittheilung aus dem Anfangszustande a (Fig. 2 a. f. S.), der durch den Anfangsdruck p_1 und das Anfangsvolumen v_1 bestimmt ist, auf umkehrbarem Wege auf der Druckcurve ab in den Endzustand $b\,(p_2, v_2)$ über, so lässt sich die Gleichung der Druckcurve durch:

$$R = \psi\,(p,v) \qquad (20)$$

darstellen, wenn hierbei die Grösse R als eine Constante vorausgesetzt wird. Die betreffende Constante findet sich, wenn man in diese Gleichung für p und v die Anfangswerthe p_1 und v_1 sub-

stituirt; für einen andern Anfangspunkt a_1 giebt Gl. (20) eine Druckcurve gleicher Art, nur ist für diese die Constante von anderm Werthe und zwar wäre für die neue Curve $R_1 = \psi(p_1', v_1')$, während für die erste Curve $R = \psi(p_1, v_1)$ zu setzen war. Die Gl. (20) repräsentirt daher im Allgemeinen die Curvengleichung einer unendlichen Schaar von Druckcurven gleicher Gattung, die sich nur durch verschiedene Werthe ihrer Constanten R unterscheiden; für einen durch seine Coordinaten p_1 und v_1 gegebenen Punkt a der Ebene ist aber sogleich auch durch die betreffende Constante die speciell durch a hindurchgehende Druckcurve bestimmt. Benutzt man nun weiter die Gl. (20) in der Formel (10), so berechnet sich die Wärmemenge Q, welche auf der entsprechenden Druckcurve bei dem Uebergange von a nach b im Ganzen mitzutheilen oder sofern Q negativ erscheinen sollte, zu entziehen ist, und es ist ohne Weiteres klar, dass das Vorzeichen von Q das gleiche ist, wenn der Körper von verschiedenen Anfangszuständen a, a_1 u. s. f. ausgehend die einzelnen Druckcurven gleicher Gattung in der gleichen Richtung durchschreitet. Wäre demnach auf dem Wege ab (Fig. 2) eine Wärmemittheilung nöthig gewesen, so wird das Gleiche auch auf dem Wege $a_1 b_1$ erforderlich sein; hätte man dagegen den Körper aus dem Zustande b nach dem Zustand b_1 versetzt und ihn nun umgekehrt von b_1 nach a_1 gebracht, so würde auf diesem Wege $b_1 a_1$ eine gewisse Wärmemenge abzuleiten gewesen sein, wenn vorhin auf dem Wege ab eine Wärmemittheilung stattfand und umgekehrt.

Fig. 2.



Liegen die beiden Druckcurven gleicher Gattung ab und $a_1 b_1$ unendlich nahe bei einander, so sind ihre Constanten um den unendlich kleinen Werth dR verschieden und zwar wird sein nach Gl. (20)

$$dR = \frac{\partial R}{\partial p}\, dp + \frac{\partial R}{\partial v}\, dv.$$

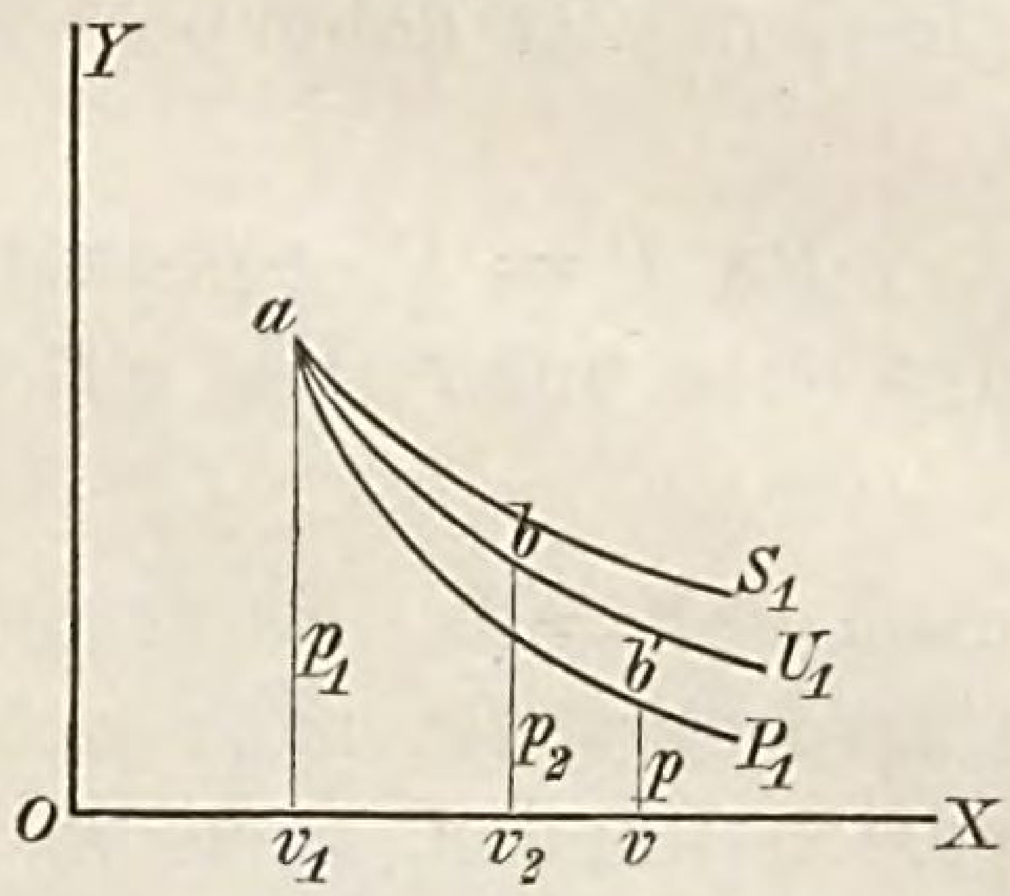
Von allen den unzähligen Druckcurven verschiedener Gattung, die in Betracht gezogen werden können, sind es insbesondere drei, die eine hervorragende Rolle in allen weiteren Entwickelungen spielen und die nun eine nähere Betrachtung finden sollen.

In den obigen Untersuchungen ist die Bedeutung der drei Functionen:

$$U = F(p, v,)\,, \quad S = f(p, v) \quad \text{und} \quad P = \varphi(p, v)$$

näher besprochen worden.

Fig. 3.



Ist der Körper im Zustande a durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 gegeben, so entspricht diesem Punkte ein bestimmter Werth jeder der drei Functionen und zwar wird beziehungsweise sein:

$$U_1 = F(p_1, v_1); \quad S_1 = f(p_1, v_1)$$
$$\text{und} \quad P_1 = \varphi(p_1, v_1)$$

Es treten hiernach in Fig. 3 drei vom Punkte a ausgehende Curven aU_1, aS_1 und aP_1 hervor, wenn man die Wärmemittheilung und Druckänderung der Art leitet, dass einmal U, das andere Mal S und das dritte Mal P constant erhalten wird.

Die erste der drei genannten Curven unterliegt der Beziehung

$$F(p, v) = U_1\,, \tag{21}$$

welche ausspricht, dass während des Ueberganges die innere Arbeit (Energie) constant erhalten wird. Es ist daher $dU = 0$, und die Wärmemenge, welche auf dem Wege ab, bei der Ueberführung in den Endzustand (p_2, v_2) erforderlich ist, findet sich nach Gl. (3) S. 23

$$Q = AL\,,$$

wobei unter L die äussere Arbeit verstanden wird, welche in Fig. 3 durch die Fläche abv_2v_1 gegeben ist. Die betreffende Curve mag (nach Cazin) die »isodynamische Curve« genannt werden; man kann für sie aussprechen, dass bei der Expansion des Körpers nach dieser Curve die ganze zugeführte Wärme in äussere Arbeit verwandelt wird, und dass umgekehrt bei der Compression die verrichtete äussere Arbeit in Wärme verwandelt und als solche vollständig abgeleitet werden muss. Bei der zweiten

Curve aS_1 (Fig. 3) ist vorausgesetzt, dass die Function S constant erhalten werden soll; die Curvengleichung ist daher

$$f(p, v) = S_1 \tag{22}$$

und diese Curve mag aus Gründen, die sich aus den weitern Entwickelungen ergeben, die »isothermische Curve« genannt werden.

Bei der dritten Curve aP_1 endlich soll während der Zustandsänderungen die Function P constant bleiben; die Curvengleichung ist daher

$$\varphi(p, v) = P_1 . \tag{23}$$

Da $P = P_1$ constant ist, so folgt $dP = 0$ und daher nach der oben unter (III) mit aufgeführten Gleichung:

$$dQ = ASdP$$

auch $dQ = 0$. Es ergiebt sich hieraus, dass Gl. (23) diejenige Curve darstellt, nach welcher die Zustandsänderungen des Körpers stattfinden, wenn während des ganzen Verlaufes derselben Wärme weder zugeführt noch abgeleitet wird. Diese Curve soll im Folgenden (nach Rankine) die »adiabatische Curve« oder meist die »Adiabate« kurzweg genannt werden.

Liegt auf dem Wege ab' (Fig. 3) Expansion nach der adiabatischen Curve vor vom Zustande $(p_1 v_1)$ nach dem Endzustande (p, v) und ist der dem Punkte b' entsprechende Werth der innern Arbeit U_2, so ergiebt sich die Integration der Gl. (3), nämlich:

$$dQ = A(dU + dL) ,$$

weil $dQ = 0$, sowie $Q = 0$ ist:

$$0 = A(U_2 - U_1 + L),$$

woraus die durch die Fläche $a'b\,v\,v_1$ repräsentirte äussere Arbeit folgt:

$$L = U_1 - U_2 .$$

Auf Grund der vorstehenden Darlegungen wird in der Folge kurzweg von isodynamischer, isothermischer oder adiabatischer Expansion bez. Compression gesprochen werden, je nachdem die eine oder andere Art der drei besprochenen Zustandsänderungen vorliegt.

Die letzte der vorstehenden Gleichungen spricht daher aus, dass bei adiabatischer Expansion die äussere Arbeit einem Verbrauche von innerer Arbeit gleichen Betrages entspricht, und

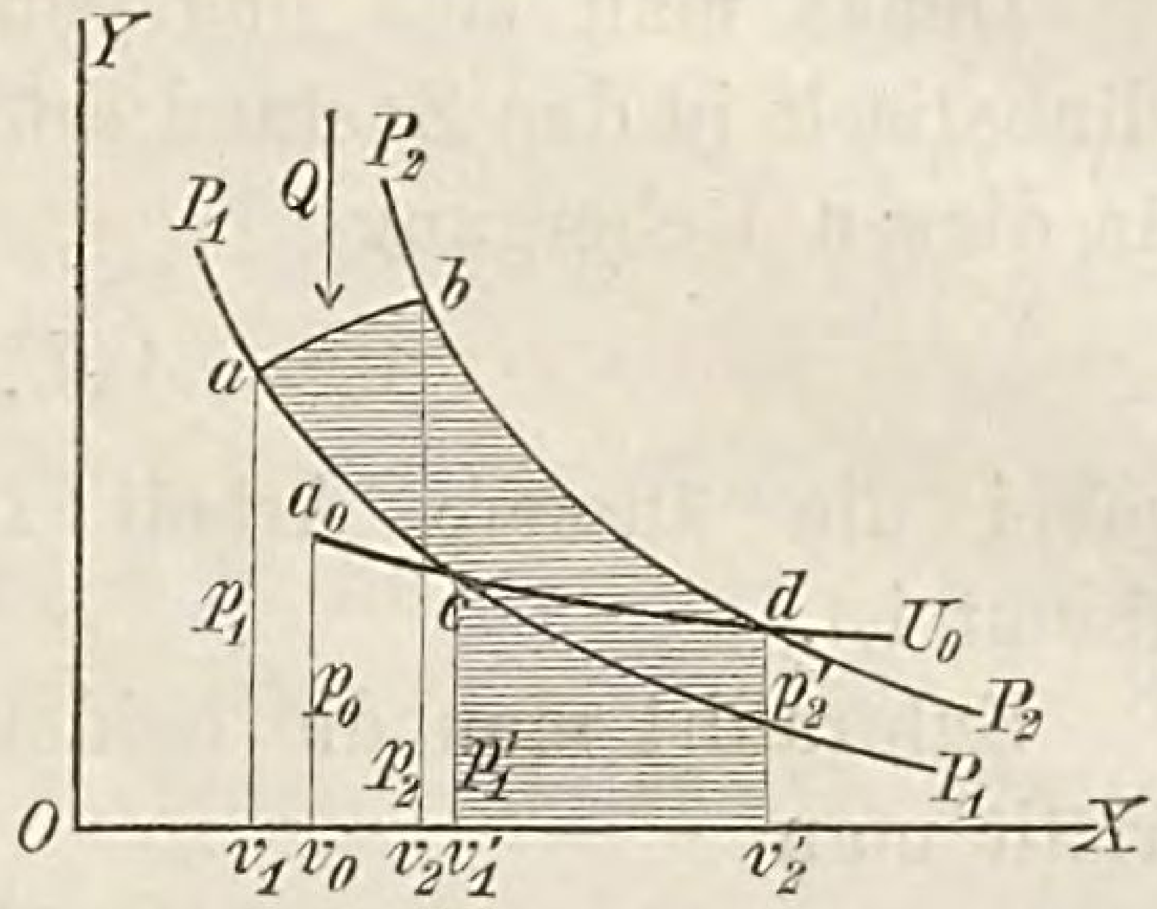
umgekehrt findet sich bei adiabatischer Compression die aufgewandte äussere Arbeit am Ende derselben vollständig in Form vermehrter innerer Arbeit vor.

§ 7. Bestimmung der Wärmemengen auf graphischem Wege.

Mit dem Gegebenen lassen sich nun einige wichtige Bemerkungen verbinden.

Denkt man sich den Körper im Zustande a durch p_1 und v_1 gegeben (Fig. 4) und führt man demselben auf dem Wege ab die Wärmemenge Q zu, bis er in den durch p_2 und v_2 vorgeschriebenen Endzustand b übergegangen ist, so entspricht, vorausgesetzt die Function $U = F(p, v)$ wäre bekannt, dem Anfangszustande a der Werth $U_1 = F(p_1, v_1)$ und dem Endzustande b der Werth $U_2 = F(p_2, v_2)$. Aus Gleichung (3) S. 23 findet sich jetzt die Wärmemenge Q, welche auf der angenommenen beliebigen Druckcurve ab zuzuführen ist:

Fig. 4.



$$Q = A(U_2 - U_1 + L), \tag{24}$$

wobei L die äussere Arbeit vorstellt, welche durch die Fläche $a b v_2 v_1$ gegeben ist.

Den beiden Zuständen a und b entsprechen nun aber auch ganz bestimmte Werthe der Function P; wird diese Function als bekannt vorausgesetzt, so ist $P_1 = \varphi(p_1, v_1)$ und $P_2 = \varphi(p_2, v_2)$ und damit ist auch das Mittel an die Hand gegeben, die beiden durch a und b hindurchgehenden Adiabaten $P_1 a P_1$ und $P_2 b P_2$ (Fig. 4) zu zeichnen, denn die Gleichungen beider schreiben sich

$$\varphi(p, v) = P_1 \quad \text{und} \quad \varphi(p, v) = P_2 .$$

Es möge weiter derselbe Körper in dem beliebigen Zustande a_0 entsprechend den Werthen p_0 und v_0 gedacht werden; ist der zugehörige Werth der innern Arbeit $U_0 = F(p_0, v_0)$ berechnet, so lässt sich durch diesen Punkt weiter die isodynamische Curve $a_0 U_0$, deren Gleichung $U_0 = F(p, v)$ ist, gelegt denken und diese

Curve wird die beiden Adiabaten resp. in den Punkten c und d schneiden, für welche Druck und Volumen beziehentlich p_1' und v_1', sowie p_2' und v_2' sein mögen.

Denkt man sich nun den Körper in den Anfangszustand a zurückgebracht und lässt man ihn adiabatisch von a nach c expandiren, so folgt wegen $dQ = 0$ und $Q = 0$ durch Integration der Gl. (3)

$$0 = A(U_0 - U_1 + L_1) ,$$

wobei die äussere Arbeit L_1 durch die Fläche $acv_1'v_1$ dargestellt wird.

Denkt man sich dagegen den Körper vom Zustande b aus adiabatisch in den Zustand d übergehend, so gilt in gleicher Weise für diesen Uebergang

$$0 = A(U_0 - U_2 + L_2) ,$$

wobei die äussere Arbeit L_2 durch die Fläche $bdv_2'v_2$ bestimmt ist.

Subtrahirt man die beiden letzten Formeln von einander, so erhält man

$$U_2 - U_1 = L_2 - L_1$$

und die Substitution in Gl. (24) ergiebt dann die Wärmemenge Q für den Uebergang von a nach b:

$$Q = A\,(L + L_2 - L_1).$$

Führt man hier für die einzelnen Arbeitswerthe in der Parenthese die Flächen ein, die unter Zugrundelegung von Fig. 4 für dieselben angegeben wurden, so stellt sich das einfache Resultat heraus, dass die in der Figur durch Schraffur ausgefüllte Fläche $abdv_2'v_1'ca$ den Werth $L + L_2 - L_1$ oder den in Arbeitseinheiten gemessenen Werth der Wärmemenge Q repräsentirt, welche für die Zustandsänderung auf der Druckcurve ab erforderlich war.

Hierdurch ist ein einfaches Verfahren gewonnen worden, auf graphischem Wege für irgend welche, durch Zeichnung gegebene, Zustandsänderung ab die erforderliche Wärmemenge Q zu ermitteln, vorausgesetzt, dass man für den betreffenden Körper den allgemeinen Verlauf der adiabatischen, sowie der isodynamischen Curve kennt.

Bemerkenswerth ist hierbei, dass die Lage des Punktes a_0,

durch welchen die isodynamische Curve U_0 zu legen ist, ganz willkürlich gewählt werden kann; die beiden Adiabaten aber sind fest bestimmt, die eine geht durch den Anfangspunkt a, die andere durch den Endpunkt b hindurch.

Man erkennt jetzt auch aus der Figur erst deutlich den Einfluss, welchen die Art und Weise des Ueberganges auf der Curve $a\,b$ sowohl auf die äussere Arbeit L, wie auf die zuzuführende Wärme hat, was beim Beginn der allgemeinen Untersuchung bereits ausführlich besprochen wurde; jede andere von a nach b verlaufende Druckcurve führt auf andere Werthe von L und Q.

Lässt man den Punkt a_0, durch welchen die isodynamische Curve U_0 gelegt wurde, mit dem Anfangspunkte a zusammenfallen (Fig. 4), so gelangt man unter dieser speciellen Annahme auf die graphische Darstellung, welche zuerst von Cazin*) gegeben wurde; wählt man dagegen a_0 derart, dass die Schnittpunkte cd mit der Abscissenaxe OX zusammenfallend angenommen werden können, so ergiebt sich die von Macquorne Rankine**) gegebene Methode; in diesem Falle wird die in Arbeit ausgedrückte Wärmemenge Q einfach durch die Fläche repräsentirt, welche durch die Druckcurve ab und die beiden Adiabaten umschlossen wird; hierbei wird allerdings von Rankine angenommen, dass beide Adiabaten sich asymptotisch der Abscissenaxe nähern, eine Annahme, die wenigstens für Gase und Dämpfe als zutreffend angesehen werden kann.

Im Folgenden wird die durch Fig. 4 gegebene allgemeinere Darstellung bei einzelnen Betrachtungen verwerthet werden, doch sei schon hier bemerkt, dass die folgenden Untersuchungen auf eine noch einfachere, graphische Methode führen werden, die insbesondere für die Behandlung technischer Fragen vorzuziehen ist. Bei der zeichnerischen Anwendung der durch Fig. 4 gegebenen Darlegung stösst man auf eine Schwierigkeit; es wird sich nämlich zeigen, dass bei gewissen Körpern (bei Gasen und Dämpfen) der Verlauf der adiabatischen Curven nicht sehr stark von dem der isodynamischen Curve abweicht; die Schnitte c und d der in Fig. 4 angedeuteten Curven erfolgen daher unter sehr spitzem

*) Cazin, Théorie élémentaire des machines à air chaud. Versailles 1865.

**) Macquorne Rankine, A manual of the steam engine and other prime movers. London und Glasgow 1859.

Winkel und sind desshalb beim Zeichnen der Curven nicht mit der erforderlichen Genauigkeit festzustellen. Dieselbe Schwierigkeit liegt bei der von Cazin gegebenen Methode, die oben erwähnt wurde, vor. Die dritte, ebenfalls angedeutete Methode von Rankine ist für die graphische Lösung hierhergehöriger Aufgaben aber gleich von vorn herein unbrauchbar, weil sie die Bestimmung des Flächeninhalts fordert, der von zwei sich asymptotisch nähernden Curven eingeschlossen wird.

§ 8. Beziehung zwischen den Functionen S und P.

Geht ein Körper unter Wärmemittheilung aus dem Anfangszustande a_1, Fig. 5, (p_1, v_1) auf beliebigem, aber umkehrbarem Wege $a_1 b_1$ in den Zustand b_1 (p_2, v_2) über, so folgt aus Gl. (17) nämlich

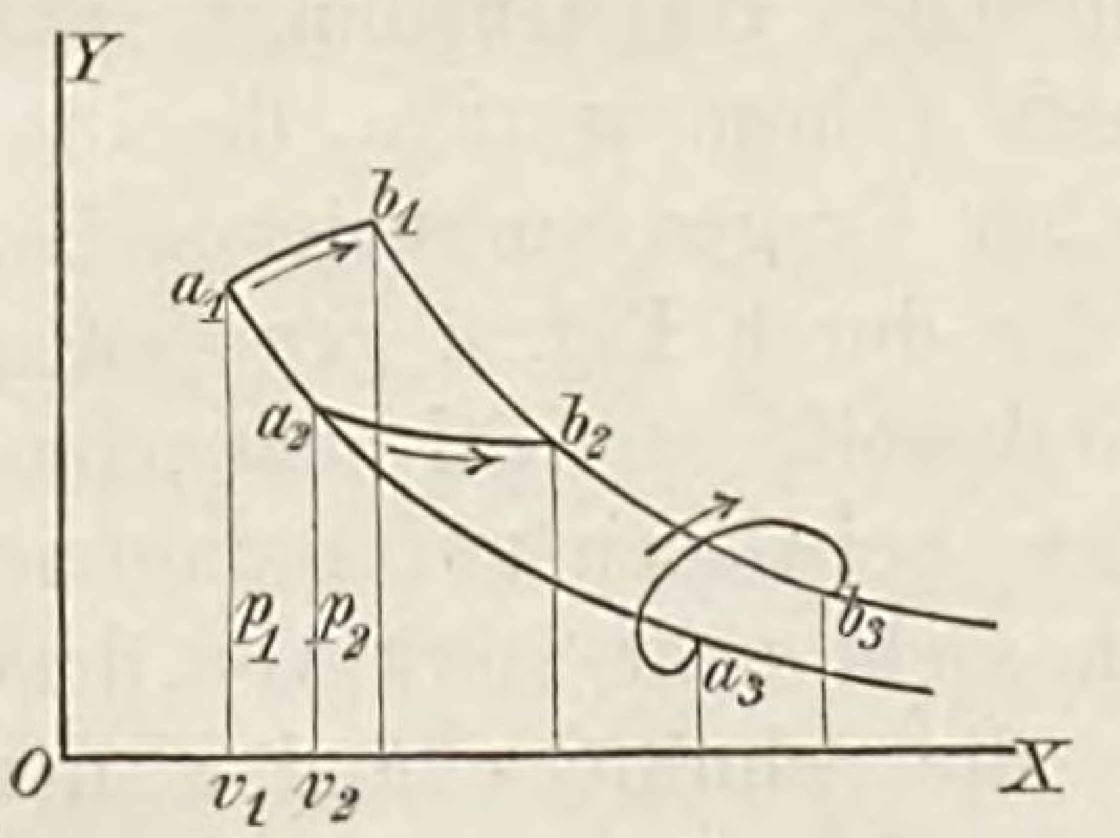
$$\frac{dQ}{AS} = dP$$

ohne Weiteres durch Integration

$$\int \frac{dQ}{AS} = P_2 - P_1 ,$$

wo nach Gl. (16) der dem Punkte a_1 entsprechende Werth von P sich aus der Beziehung $P_1 = \varphi(p_1, v_1)$ bestimmt; ebenso entspricht dem Punkte b_1 der Werth $P_2 = \varphi(p_2, v_2)$.

Fig. 5.



Legt man jetzt durch die Punkte a_1 und b_1 zwei adiabatische Curven, so ist für die erstere, wie oben S. 36 besprochen worden ist, der Werth der Function $P = \varphi(p, v)$ für alle Punkte derselben gleich gross und zwar P_1, und ebenso ist für die zweite durch b_1 gehende Adiabate der zugehörige Werth für alle Punkte constant und zwar $\varphi(p, v) = P_2$.

Geht daher der Körper aus einem andern Anfangszustande a_2 oder a_3 auf irgend welchem umkehrbaren Wege in den Endzustand b_2 und b_3 über und liegen dabei auch die Ausgangspunkte a_2 und a_3 auf der durch a_1 gehenden und die Endpunkte

b_2 und b_3 auf der durch b_1 gehenden Adiabaten, so ist auch für den zweiten und dritten Uebergang die Beziehung

$$\int \frac{dQ}{AS} = P_2 - P_1 \tag{25}$$

giltig. Hieraus folgt der wichtige Satz:

»Geht ein Körper auf irgend einem (aber umkehrbaren) »Wege von einem Punkte einer bestimmten Adiabaten aus »nach irgend einem Punkte einer zweiten Adiabaten, so hat »das Integral

$$\int \frac{dQ}{AS},$$

»zwischen denselben Grenzen genommen, immer ein und »denselben Werth«.

Wird der Einfachheit wegen die Differenz $P_2 - P_1$ mit P bezeichnet, so ist demnach die Grösse

$$P = \int \frac{dQ}{AS} \tag{26}$$

für jeden der möglichen unendlich vielen Uebergänge eine constante Grösse.

Bei dem rückgängigen Wege gilt der Satz gleichfalls, nur ändert P das Vorzeichen, wird also negativ erscheinen, wenn es auf dem Hinwege positiv war, und umgekehrt.

Man erkennt hieraus, dass die adiabatischen Curven in der Thermodynamik eine ähnliche Rolle spielen, wie die Niveaucurven in der Mechanik. Ich nenne aus Gründen, welche aus den folgenden Untersuchungen hervorgehen werden, den durch Gl. (26) dargestellten Werth P das Wärmegewicht*).

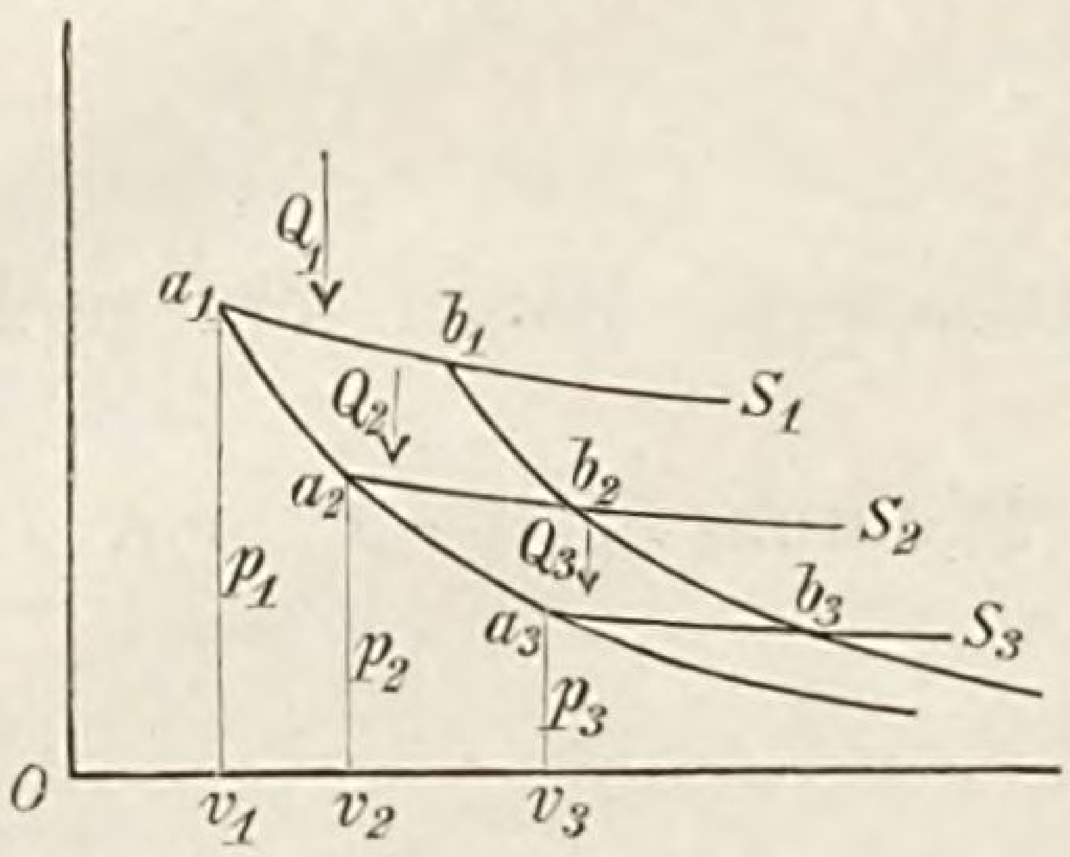
*) Clausius bezeichnet das Integral $\int \frac{dQ}{S}$, unter Hinzufügung einer Constanten, als Verwandlungsinhalt oder als Entropie des Körpers, wobei S als eine Temperaturfunction erscheint, als welche sie aus den weiteren Entwickelungen der vorliegenden Schrift ebenfalls hervortreten wird. (Vergleiche das Citat auf S. 22.) — Rankine nennt $P = \varphi\ (p, v)$ die thermodynamische Function. — C. Neumann bezeichnet P als Parameter der calorischen (adiabatischen) Curven. (Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme. Leipzig 1875.)

Bei den unter Zugrundelegung von Fig. 5 betrachteten Uebergängen eines Körpers von einer Adiabaten zu einer andern wurden ganz beliebig verlaufende Druckcurven vorausgesetzt; man kann nun den Uebergang sich auf bestimmt vorgeschriebenen Curven bewerkstelligt denken und hierbei ist von besonderer Bedeutung der Fall, bei welchem der Uebergang auf der isothermischen Curve d. h. derjenigen Curve stattfindet, bei welchem die Function

$$S = f(p, v)$$

constant erhalten wird.

Fig. 6.



Befindet sich der der Untersuchung unterworfene Körper im Zustande a_1 (Fig. 6), so entspricht diesem ein bestimmter Werth S_1 der Function S und zwar ist $S_1 = f(p_1, v_1)$; führt man nun unter Wärmemittheilung den Körper auf der isothermischen Curve bei constantem Werthe $S = S_1$, also auf einer Curve von der Gleichung:

$$S_1 = F(p, v)$$

in den Zustand b_1 über, so lässt sich Gl. (26) integriren und man erhält, wenn mit Q_1 die erforderliche Wärmemenge bezeichnet wird,

$$Q_1 = APS_1 \ . \tag{27}$$

Legt man wieder durch die Punkte a_1 und b_1 Adiabaten und denkt man sich denselben Körper einmal vom Punkte a_2, das andere Mal vom Punkte a_3, die beide auf der ersten Adiabate liegen, ausgehend auf den zugehörigen Isothermen bis zur zweiten Adiabate fortschreiten, und ist Q_2 die zuzuführende Wärme für den Weg $a_2 b_2$ und Q_3 die für den Weg $a_3 b_3$, so bestehen nach Gl. (27) auch die Beziehungen

$$Q_2 = APS_2 \text{ und } Q_3 = APS_3 \, .$$

Hieraus und aus Gl. (27) folgt daher das für alle Uebergänge gleiche Wärmegewicht

$$P = \frac{Q_1}{A\,S_1} = \frac{Q_2}{A\,S_2} = \frac{Q_3}{A\,S_3} \ . \tag{28}$$

Die erforderlichen Wärmemengen erscheinen daher ihren zugehörigen Werthen von S proportional.

Von der vorstehenden Relation (28) wird im Weiteren Gebrauch gemacht werden.

§ 9. Von den umkehrbaren Kreisprocessen.

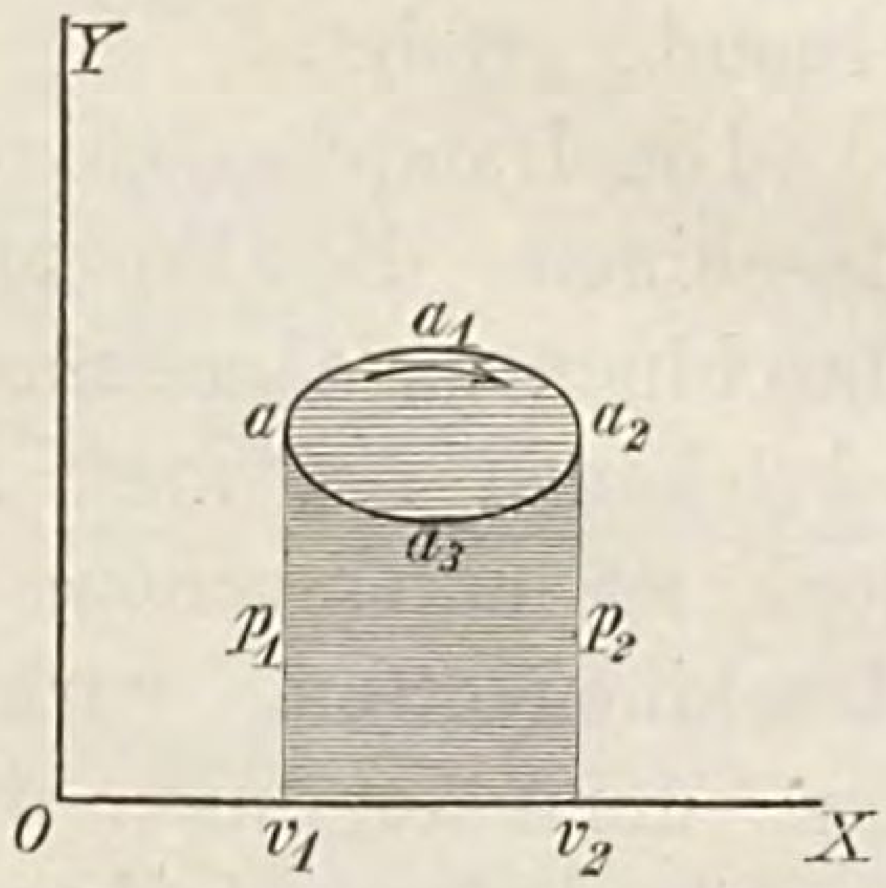
Für die Wärmemenge, welche bei den Zustandsänderungen eines Körpers auf umkehrbarem Wege mitgetheilt werden muss, wenn der Körper aus einem gewissen Anfangszustande *a* in den gegebenen Endzustand *b* übergeführt werden soll, fand sich unter Zugrundelegung von Fig. 4 nach Gl. (24) S. 37

$$Q = A\,(U_2 - U_1 + L).$$

Setzt man nun aber voraus, dass die angenommene Druckcurve eine geschlossene Curve bildet (Fig. 7a), dass also der Endzustand mit dem Anfangszustande, der Punkt *b* mit dem Punkte *a* zusammenfällt, so wird in vorstehender Formel $U_1 = U_2$ und man erhält daher die einfache Beziehung:

$$Q = AL. \tag{29}$$

Fig. 7a.



Hierbei bedeutet L die gewonnene Arbeit, welche durch die von der Druckcurve umschlossene Fläche gemessen wird und Q ist die Wärmemenge, welche hierbei verbraucht worden ist. Diese Wärmemenge kann aber zweifellos dem Körper während des ganzen Processes nur von aussen her, also von andern Körpern mitgetheilt worden sein, sie kann also nicht, weder ganz noch theilweise, dem Innern des Körpers, mit welchem der Kreisprocess ausgeführt worden, entnommen worden sein, da der Voraussetzung gemäss der Körper in seinen Anfangszustand zurückgeführt worden ist, die gesammte innere Arbeit demnach am Ende des Processes gleich der im Anfange ist.

Man nennt einen Process der betrachteten Art (nach Clausius) einen Kreisprocess und zwar, da zunächst nur Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege vorausgesetzt werden, einen »umkehrbaren Kreisprocess«.

Die nähere Betrachtung von Fig. 7a zeigt übrigens, dass die gewonnene Arbeit aus zwei Theilen bestehend gedacht werden kann;

bei der Expansion des Körpers auf dem Wege $a\,a_1\,a_2$ ist eine Arbeit L_1 gewonnen worden, die durch die gesammte schraffirte Fläche repräsentirt wird, und bei der Zurückführung oder Compression auf dem Wege $a_2\,a_3\,a$ ist eine Arbeit L_2 aufzuwenden gewesen, welche durch die enger schraffirte Fläche gemessen wird. Die durch den ganzen Kreislauf gewonnene Arbeit L erscheint daher als die Differenz $L_1 - L_2$.

Man ersieht übrigens, dass Fig. 7a nichts Anderes darstellt, als was dem Maschineningenieur als ein Indicator-Diagramm bekannt und geläufig ist. Da man denselben Process beliebig oft wiederholen kann, so lässt sich leicht die gewonnene Arbeit L auf die Secunde bezogen und in Pferdestärken gemessen angeben, wenn man nur weiss, wie viel Mal der Process in der Secunde erfolgt.

Die Dampfmaschinen, Heissluftmaschinen, Gas- (Explosions-) Maschinen, die ich unter dem allgemeinen Namen calorische Maschinen zusammenfasse, führen in der That Processe der beschriebenen Art aus; im speciellen Falle ist dabei freilich erst noch zu untersuchen, ob der Process der einen oder andern Maschinengattung wirklich als umkehrbar angesehen werden darf, denn nur unter dieser Voraussetzung gelten die obigen allgemeinen Sätze; insbesondere muss der directen Uebertragung auf die Vorgänge bei Explosionsmaschinen eine besondere Untersuchung vorausgehen, da hier der Process mit chemischen Zustandsveränderungen verbunden ist, die in der bisherigen Untersuchung ausdrücklich ausgeschlossen worden sind. Bei der Anwendung der Thermodynamik auf technische Fragen wird unten auf das Vorstehende zurückzukommen sein.

Bemerkenswerth ist der Fall der Umkehrung des in Fig. 7a angedeuteten Processes; kehrt man die Pfeilrichtung um, so wird auf dem Wege $a\,a_3\,a_2$ die Arbeit L_2 gewonnen und auf dem Rückwege $a_2\,a_1\,a$ die Arbeit L_1 aufzuwenden sein, die Arbeit $L = L_1 - L_2$, sowie nach Gl. (29) die Wärmemenge Q wird negativ; der Verlauf des Processse erfordert daher hier die äussere Arbeit L und die dadurch erzeugte Wärmemenge Q wird nach aussen hin auf andere Körper abzuleiten sein.

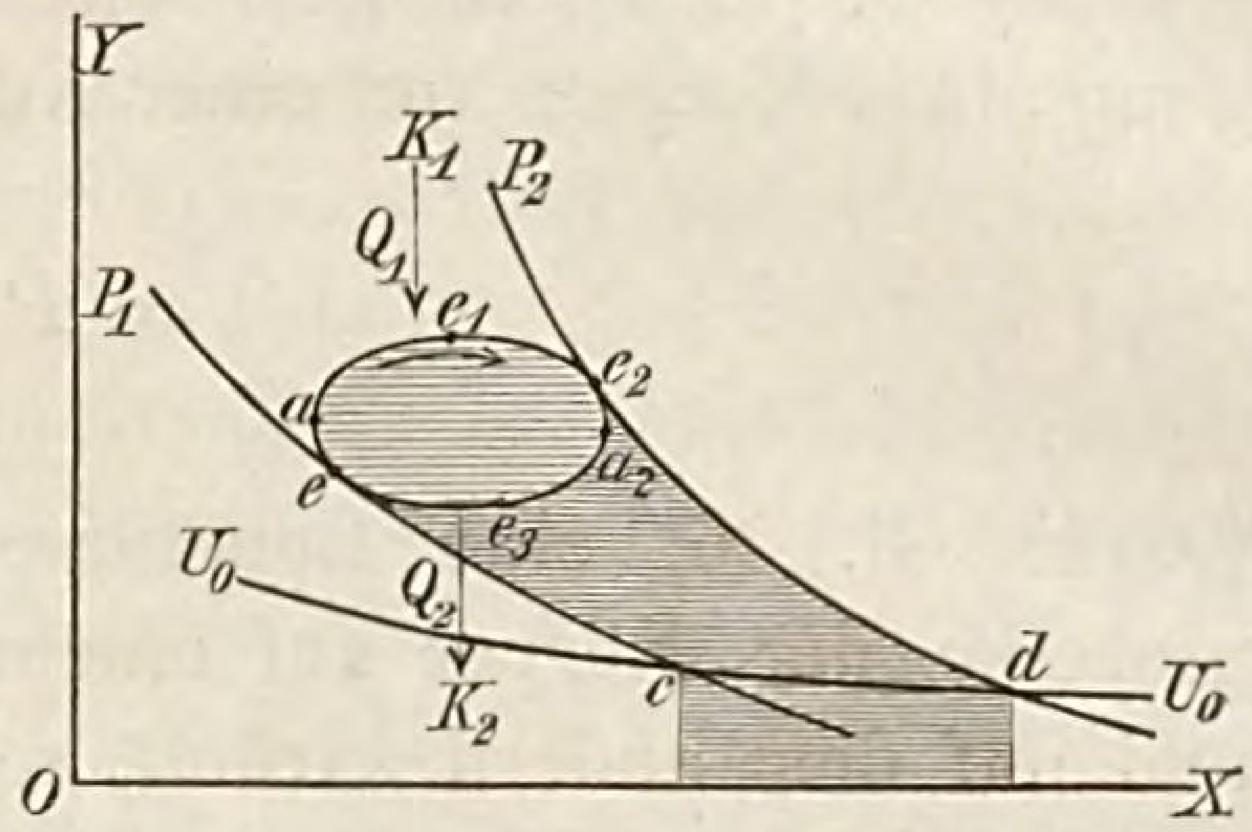
Auch dieser umgekehrte Process spielt (bei den Kaltdampf- und Kaltluft-Maschinen, bei den Maschinen zur Kälteerzeugung) eine wichtige technische Rolle.

Es möge nun die Frage des Wärmeverbrauches resp. der Wärmeerzeugung bei dem in Fig. 7a dargestellten Kreisprocesse noch näher erörtert werden.

In Fig. 7b ist die geschlossene Curve des in Fig. 7a betrachteten Kreisprocesses noch einmal dargestellt; es liege also, wie sich auch sagen lässt, dasselbe Indicatordiagramm zu weiterer Untersuchung vor.

Legt man jetzt zwei adiabatische Curven P_1 und P_2 so, dass sie die geschlossene Curve in den Punkten e und e_2 eben berühren und zieht man ferner an einer beliebigen Stelle unter dem Diagramm die isodynamische Curve $U_0 U_0$, welche die Adiabaten in den Punkten c und d schneidet, so stellt jetzt nach dem bei Betrachtung von Fig. 4 S. 37 Angegebenen die ganze schraffirte Fläche der Fig. 7b in Arbeitseinheiten gemessen die Wärmemenge dar, welche auf dem Curvenwege $e e_1 e_2$ zuzuführen, und der enger schraffirte Theil ist in gleicher Weise gemessen die Wärmemenge, welche auf dem Rückwege $e_2 e_3 e$ abzuleiten war.

Fig. 7b.



Wird die erstgenannte Wärmemenge mit Q_1, die andere mit Q_2 bezeichnet, so sind demnach die Inhalte der beiden angegebenen Flächen resp. durch

$$\frac{Q_1}{A} \text{ und } \frac{Q_2}{A}$$

bestimmt. Aus der Figur geht aber sogleich weiter hervor, dass die Differenz beider Flächen die Arbeit L darstellt, welche durch den Inhalt der geschlossenen Curve des Kreisprocesses gegeben ist; es folgt daher für den Process auch die Beziehung

$$L = \frac{Q_1}{A} - \frac{Q_2}{A} \tag{30}$$

oder

$$AL = Q_1 - Q_2 \tag{31}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (29)

$$Q = Q_1 - Q_2. \tag{32}$$

Jetzt erkennt man deutlich, woher die Wärmemenge Q kommt,

welche bei diesem Processe in die Arbeit L verwandelt wird, sie ist einfach der Ueberschuss der mitgetheilten Wärme Q_1 über die abgeleitete Q_2.

Kehrt man den Process (Fig. 7b) um, so findet auf dem Wege ee_3e_2 die Zuführung der Wärmemenge Q_2 und auf dem Wege e_2e_1e die Ableitung der Wärme Q_1 statt, beide Wärmemengen und daher auch die Wärmemenge Q (Gl. 32) und damit ferner die Arbeit L (Gl. 29) ändern ihr Zeichen; in diesem Falle ist die abgeleitete Wärmemenge grösser, als die zugeleitete und der Mehrbetrag entspricht genau der Wärmemenge, welche bei diesem Processe durch die aufgewandte äussere Arbeit erzeugt worden ist.

Es ist oben gezeigt worden, dass für irgend welchen Uebergang eines Körpers von einer Adiabaten zu einer andern die Grösse

$$= P\int \frac{dQ}{AS}$$

(vergl. Gl. 26) eine Constante ist; geht, wie in unserm Kreisprocesse der Körper auf einem der Zweige ee_1e_2 oder ee_3e_2 hin und auf dem andern zurück, so ist auf dem Hinwege die Grösse P von gleichem Werthe, wie auf dem Rückwege, nur findet ein Zeichenwechsel statt, die Summe beider Werthe ist daher Null.

Für einen Kreisprocess und zwar, wie ausdrücklich hinzugefügt werden muss, für den »umkehrbaren« Kreisprocess, gilt demnach die Beziehung

$$\int \frac{dQ}{AS} = 0, \tag{33}$$

ein Satz, der aber aus unsern ganzen Darlegungen als selbstverständlich hervortritt.

Es wurde die Function S von vornherein so gewählt, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen der Gl. (33) ein vollständiges Differential darstellt; führt man nun für irgend eine Zustandsänderung, bei der wie hier der Endzustand mit dem Anfangszustande zusammenfällt, die Integration aus, so muss der Werth Null erscheinen, weil die Integrationsgrenzen dieselben sind.

Wird noch einmal zu der Betrachtung von Fig. 7b zurückgekehrt und der Kreisprocess in der Pfeilrichtung ausgeführt gedacht, so ist dem Körper, den wir jetzt den »vermittelnden« Körper

nennen wollen, auf dem Wege ee_1e_2 die Wärmemenge Q_1 mitzutheilen.

Eine Wärmemittheilung ist aber nicht anders denkbar, als dass man mindestens einen zweiten Körper K_1 voraussetzt, der die angegebene Wärmemenge an den vermittelnden Körper liefert; man könnte sich auch eine Reihe solcher Körper vorstellen, die successive die Wärme abgeben.

Weiterhin muss man aber noch einen dritten Körper K_2 (oder eine Gemeinschaft solcher Körper) voraussetzen, der auf dem Wege e_2e_3e dem vermittelnden Körper die Wärmemenge Q_2 entzieht, also aufnimmt.

Der Kreisprocess umfasst also die Wechselwirkung von mindestens drei Körpern; der eine K_1 liefert die Wärmemenge Q_1, der andere K_2 nimmt die Wärmemenge Q_2 auf, und der dritte, der vermittelnde Körper, vollführt den Process; der letztere kehrt in den Anfangszustand zurück, während die beiden andern nothwendigerweise Zustandsänderungen gewisser Art erleiden müssen. Nur wenn man den Process einmal hinwärts und dann auf dem gleichen Wege rückwärts vollführt, sind alle drei Körper in den Anfangszustand zurückgekehrt, dann ist aber auch Arbeit weder gewonnen noch verbraucht worden.

Ein Blick auf meine graphische Darstellung der Vorgänge beim umkehrbaren Kreisprocess in Fig. 7b lässt erkennen, dass kein solcher Process denkbar ist, bei dem mit einem Gewinne oder Aufwand von Arbeit nicht zugleich ein Uebergang von Wärme von einem Körper K_1 auf einen andern K_2 oder umgekehrt verbunden wäre*).

*) Clausius spricht in seinen Schriften bei den umkehrbaren Kreisprocessen von »Verwandlungen« zweierlei Art. Unter »Verwandlung erster Art« versteht derselbe die Umsetzung von Wärme in Arbeit oder umgekehrt, die durch den vermittelnden Körper erfolgt. Die »Verwandlung zweiter Art«, umfasst den bei einem solchen Processe jederzeit zugleich eintretenden Uebergang von Wärme von einem Körper K_1 zu einem andern K_2 oder umgekehrt.

Sadi Carnot (1824) a. a. O. hat zuerst den Kreisprocess, wenn auch nur für einen speciellen Fall, auf den oben im Texte noch näher eingegangen werden wird, der Betrachtung unterworfen; als Ingenieur wurde er durch schärfere Betrachtung der Vorgänge an der Dampfmaschine auf seine Untersuchungen geführt. Später hat dann Clapeyron (1834) a. a. O. die Frage aufgenommen und die Sätze Carnot's zuerst in analytischer Form

§ 10. Vom Carnot'schen Kreisprocess.

Die Sätze, welche im Vorstehenden allgemein für den umkehrbaren Kreisprocess und unter der Annahme entwickelt wurden, dass die Zustandsänderungen des vermittelnden Körpers nach einer geschlossenen Curve (Fig. 7a und 7b) erfolgen, gelten, wie aus der graphischen Darstellung ohne Weiteres folgt, auch für solche Fälle, wo die Arbeitsfläche L auf einzelnen Strecken von Druckcurven verschiedener Gattung umschlossen wird. Von den unendlich verschiedenen Fällen dieser Art mag nun ein Process herausgegriffen werden, dessen nähere Untersuchung zu besonders wichtigen Ergebnissen führt und bei welchem die Arbeitsfläche von zwei Adiabaten und zwei Isothermen umschlossen wird: ein Process dieser Art mag von vorn herein als Carnot'scher Kreisprocess bezeichnet werden.

Zieht man (Fig. 8) die beiden Adiabaten P_1 und P_2, und dann die beiden Isothermen S_1 und S_2, so entsteht ein Curvenviereck $a_1 b_1 b_2 a_2$ an Stelle der geschlossenen Curve in Fig. 7b.

dargestellt, auch den Kreisprocess unter den besonderen, von Carnot gemachten Voraussetzungen graphisch, technisch zu sprechen, als Indicatordiagramm dargestellt.

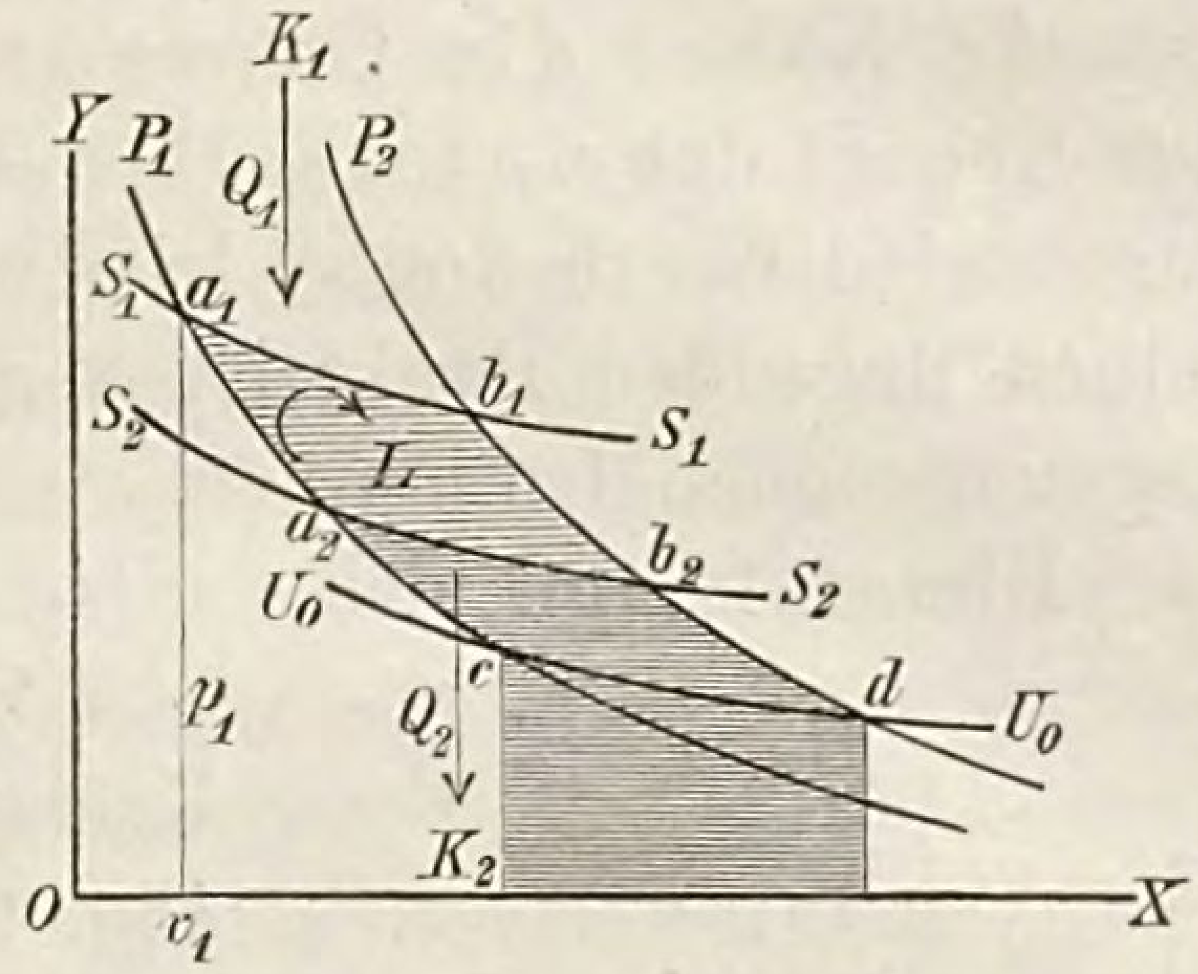
Beide Schriftsteller haben aber, wenn ich die Ausdrucksweise von Clausius benutze, nur die »Verwandlung zweiter Art« vor Augen gehabt und schreiben den Arbeitsgewinn bei den calorischen Maschinen einzig nur dem Uebergange der Wärme vom Körper K_1 (nach der Bezeichnung oben im Texte) nach dem Körper K_2 zu und nehmen an, dass hierbei die Wärmemengen gleich, also $Q_1 = Q_2$ sei.

Erst Clausius (1850) »Abhandlungen« verdanken wir den, für die ganze weitere Entwickelung der Thermodynamik hochbedeutsamen Hinweis, dass die eben angedeutete Gleichheit nicht bestehen könne, dass vielmehr nach dem Satze von der Aequivalenz von Arbeit und Wärme nothwendigerweise $Q_1 > Q_2$ sein und dass die Differenz genau der durch den Process gewonnenen Arbeit entsprechen müsse.

Ein in der Wissenschaft selten vorkommender Fall ist es, dass gerade die wichtigsten Theile der analytischen Untersuchungen Clapeyron's durch seine falsche Annahme nicht berührt werden, insbesondere ist die Gleichung, die oben im Texte als die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet wurde, gültig geblieben. Sie könnte daher als die Clapeyron'sche Gleichung bezeichnet werden, wenn den geschichtlichen Entwickelungen entsprechend die oben gegebene erste Hauptgleichung nach Clausius benannt werden sollte.

Befindet sich der Körper im Punkte a_1 (p_1, v_1), für welchen der Werth $S = S_1 = f\,(p_1, v_1)$ vorliegt, im Anfangszustande und lässt man ihn unter constantem Werthe $S = S_1$ und der entsprechenden Zuleitung der Wärmemenge Q_1 von a_1 nach b_1 expandiren und dann unter Abbrechung der Wärmemittheilung auf der adiabatischen Curve weiter von b_1 nach b_2 expandiren, so lässt sich der Körper dann zuerst auf der isothermischen Curve $b_2 a_2$ und hierauf auf der ersten Adiabaten von a_2 nach a_1 in den Anfangszustand zurückführen. Bei der Zurückführung auf dem Wege $b_2 a_2$, die bei constantem Werthe $S = S_2$ erfolgt, ist die Wärmemenge Q_2 abzuführen.

Fig. 8.



Zeichnet man nun wieder irgend eine isodynamische Curve $U_0 = F(p, v) =$ Constans, welche die Adiabaten in c und d schneidet, so repräsentirt, wie bewiesen wurde, die ganze schraffirte Fläche der Fig. 8 die in Arbeitseinheiten gemessene Wärmemenge Q_1 und ebenso die enger schraffirte Fläche die in gleichem Maasse gemessene Wärmemenge Q_2; die Differenz beider ist wieder die durch den Kreisprocess gewonnene Arbeit L; es gelten daher hier ebenfalls die Gln. (30) und (31), überdies ist aber nach Gl. (28), S. 42, das Wärmegewicht P für jeden der beiden isothermischen Uebergänge gleich gross und zwar:

$$P = \frac{Q_1}{A S_1} = \frac{Q_2}{A S_2}\,. \tag{IV}$$

Hiernach schreibt sich $Q_1 = APS_1$ und $Q_2 = APS_2$ und daher folgt nach Gl. (30), welche wir hier wiederholt anschreiben, die durch diesen Process gewonnene Arbeit:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{Q_1}{A} - \frac{Q_2}{A} \\ L &= P(S_1 - S_2) \end{aligned}\right\}\,. \tag{V}$$

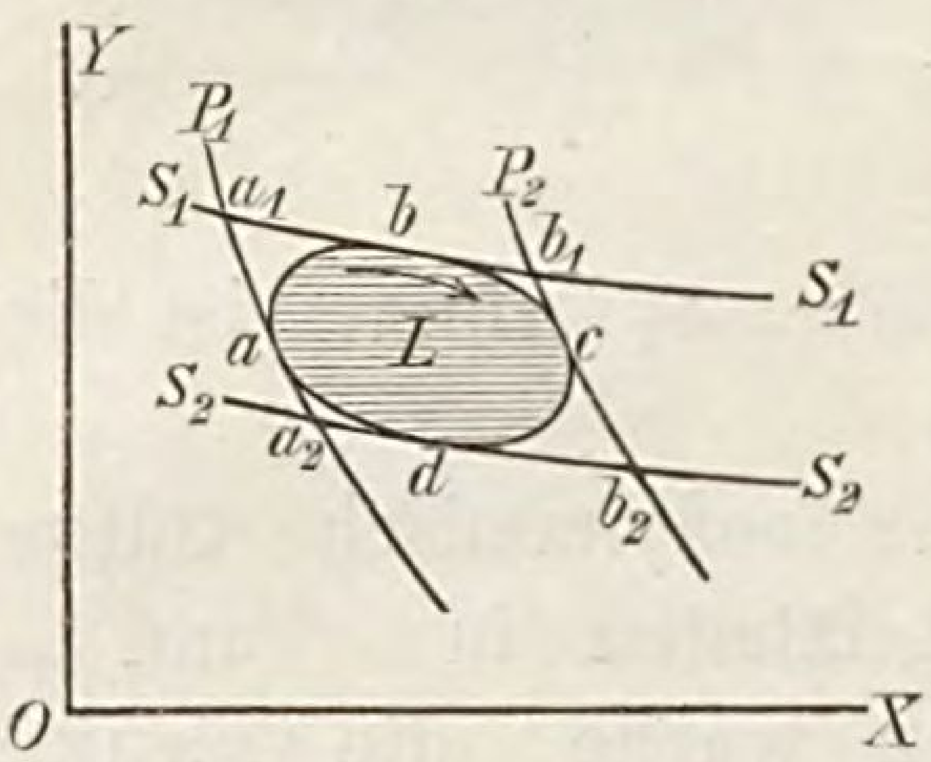
Beide Gleichungen sind identisch und P ist durch Gl. (IV) bestimmt.

Bemerkenswerth ist nun zunächst Folgendes. Da $Q_1 > Q_2$ ist, denn die Differenz ist die Wärmemenge, die der Arbeit L ent-

spricht, so ist nach Gl. (IV) jederzeit auch $S_1 > S_2$. Obgleich also zunächst über die Form der Gleichung $S = f(p, v)$ noch nichts bekannt ist, so erkennt man jetzt doch soviel, dass die Constante S der unendlichen Schaar von isothermischen Linien, welche die Bildfläche durchziehen, ihrem Werthe nach um so grösser ist, je höher die Curve im Bilde liegt. Für jeden Punkt der Ebene, der unterhalb der Curve $S_1 S_1$ (Fig. 8) liegt, ist der zugehörige Werth von S kleiner und für jeden oberhalb derselben liegenden Punkt ist S grösser, als die Constante S_1 der angenommenen Isothermen.

Hieran knüpft sich sogleich eine weitere wichtige Bemerkung.

Fig. 9.



Führt ein Körper einen beliebigen Kreisprocess nach der Curve *abcd*, Fig. 9, aus und legt man zwei Adiabaten P_1 und P_2 und zwei Isothermen $S_1 S_1$ und $S_2 S_2$, welche die Curve berühren, so ist für jeden Punkt des Kreislaufes der zugehörige Werth S kleiner als im Berührungspunkte b und grösser als im Berührungspunkte d.

Wäre nun die Curve $S_1 S_1$ (Fig. 9) als eine gewisse obere und die Curve $S_2 S_2$ als eine untere Grenze gegeben, läge also die Unmöglichkeit vor, im Verlaufe des Processes *abcd* die obere und untere Grenze (S_1 und S_2) zu überschreiten, so ist die von der Curve *abcd* umschlossene Fläche immer kleiner als die Fläche $a_1 b_1 b_2 a_2$.

Hieraus resultirt der, insbesondere für die Maschinentheorie wichtige Satz:

»dass unter allen Kreisprocessen, welche zwischen zwei »bestimmten Adiabaten und zwei bestimmt vorgeschriebenen »Isothermen ausgeführt werden können, der Carnot'sche »Kreisprocess das Maximum der Arbeit L liefert.«

Kehren wir nun wieder zur speciellen Beobachtung des Carnot'schen Processes unter Beachtung von Fig. 8 zurück.

Auf der ersten Isotherme, auf dem Wege $a_1 b_1$, wurde dem vermittelnden Körper die Wärmemenge Q_1 zugeführt, die wir uns herrührend denken müssen von einem Körper K_1, der während des Verlaufes $a_1 b_1$ mit dem vermittelnden Körper in einer gewissen Wechselbeziehung, also z. B. in Berührung steht;

diesem Körper K_1 muss man aber offenbar eine bestimmte Eigenschaft beilegen, nämlich die, dass er dem vermittelnden Körper die Wärme successive in dem Maasse mittheilt bez. entzieht, dass hierbei die Function S auf dem constanten Werthe S_1 erhalten wird. Der Körper K_1 möge daher als ein »Körper vom Zustande S_1« bezeichnet werden; ebenso und aus gleichen Gründen muss man sich einen zweiten »Körper vom Zustande S_2« vorstellen, welcher die Wärmeentziehung auf der Isotherme $S_2 S_2$ auf dem Wege $b_2 a_2$ oder in gleicher Art auf dem umgekehrten Wege $a_2 b_2$ die Wärmemittheilung auf sich nimmt. Ob nun Körper mit den angegebenen Eigenschaften wirklich existiren oder nicht, bleibe vorläufig dahingestellt; die gemachten Voraussetzungen ändern nichts an der Allgemeinheit der Betrachtungen; man kann sogar als unzweifelhaft richtig die Bemerkung hinzufügen, dass zwischen den beiden Körpern K_1 und K_2 auch ein Wärmeaustausch stattfinden werde, wenn man sie in unmittelbare Berührung mit einander bringt; ein Zweifel könnte nur darüber bestehen bleiben, in welcher Richtung der Wärmeaustausch erfolgt, ob von K_1 nach K_2 hin oder umgekehrt, jedenfalls liegt aber bei einem solchen directen Wärmeaustausch kein Gewinn von Arbeit vor.

Man kann nun kurz aussprechen, dass beim Carnot'schen Process das Wärmegewicht P vom Körper K_1 vom Zustande S_1 auf den Körper K_2 vom Zustande S_2 übertragen, hierbei die Arbeit $L = P(S_1 - S_2)$ gewonnen wird und dass diese Arbeit für ein bestimmtes Wärmegewicht P, verglichen mit allen andern möglichen Kreisprocessen, die zwischen den Grenzwerthen S_1 und S_2 ausgeführt werden, ein Maximum ist. Bei der Umkehrung des Processes wird die gleiche Arbeit verbraucht und das Wärmegewicht umgekehrt vom Körper K_2 auf den Körper K_1 übergeführt.

§ 11. Physikalische Bedeutung der Function S.

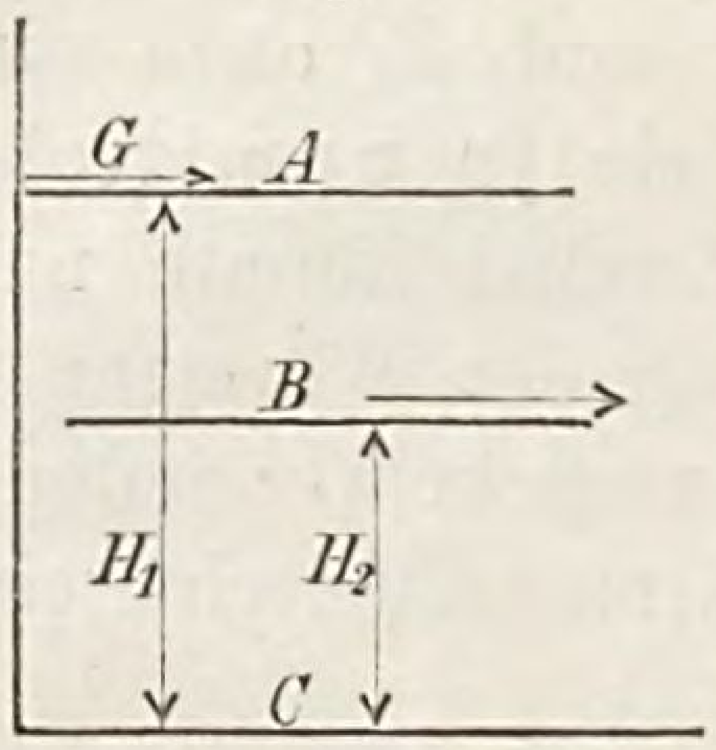
Bis hierher sind alle im Vorstehenden gewonnenen Sätze im Grunde genommen der Annahme eines einzigen Grundsatzes, nämlich dem der Aequivalenz von Wärme und Arbeit, entsprungen. Ein weiteres Fortschreiten erfordert aber nun die Aufstellung eines weitern, zweiten Grundsatzes, um endlich von den ver-

schiedenen in die Rechnungen eingeführten Functionen Form und Bedeutung zu ermitteln. Gelingt dieses wenigstens für eine derselben, z. B. bezüglich der Function $S = f(p, v)$, so liegt in den oben abgeleiteten Hauptgleichungen, wie bereits betont wurde, das Mittel vor, sogleich auch die übrigen Functionen darzustellen.

Zur Einführung in die angezeigten weitern Entwickelungen ist es aber nützlich, vorerst die Sätze über den Kreisprocess und zwar vor Allem über den Carnot'schen Kreisprocess mit analogen bekannten Sätzen der Mechanik zu vergleichen.

Man denke sich drei über einander liegende Horizontalebenen A, B und C; die oberste Ebene A (Fig. 10) liege in der Höhe H_1 und die zweite B in der Höhe H_2 über der untersten Ebene C; in der letzten Ebene liege demnach der Nullpunkt, von dem aus die Höhen nach oben gemessen werden; stellt man sich weiter vor, in der obersten Ebene stehe ein Körper vom Gewichte G zur Verfügung und man könnte denselben langsam und gleichförmig nach dem untersten Niveau sinken lassen, so steht uns in diesem Körper eine Arbeit zur Verfügung, die mit W_1 bezeichnet werden mag und die einfach bestimmt ist durch die Beziehung

Fig. 10.



$$W_1 = G H_1 \ . \tag{34}$$

Der Werth von W_1 ist das, was in der Mechanik als »Energie der Lage«, oder als »potentielle Energie bei Einwirkung der Schwere« bezeichnet wird. Befindet sich das gleiche Gewicht G im mittlern Niveau B, so würde hingegen beim langsamen gleichförmigen Herabsinken in das unterste Niveau die Arbeit

$$W_2 = G H_2 \tag{35}$$

gewonnen werden, und endlich ist die Arbeit L, welche gewonnen würde, wenn der Körper in gleicher Weise von A nach B sinkt,

$$L = G(H_1 - H_2) \ . \tag{36}$$

Aus den Gleichungen (34) und (35) folgt

$$G = \frac{W_1}{H_1} = \frac{W_2}{H_2} \ , \tag{IV a}$$

und die Substitution in Gl. (36) ergiebt, wenn diese Gleichung wieder aufgeführt wird,

$$\left.\begin{aligned} L &= W_1 - W_2 \\ L &= G(H_1 - H_2) \end{aligned}\right\} . \qquad (V^a)$$

Wird, wie man sich vorstellen kann, im Niveau A der Körper vom Gewicht G herbeigeschoben, so entspricht dieses einer Lieferung, einer Zuführung der Arbeit W_1, und muss der Körper, nachdem er in der bemerkten Weise arbeitsverrichtend in das Niveau B herabgesunken ist, dort wieder abgeliefert werden, so entspricht dieses einer Ablieferung, einer Entziehung der Arbeit W_2; die Differenz der zugeführten Arbeit W_1 und der abgeführten, für weitere Zwecke uns entzogenen Arbeit W_2 ist nach Gl. (V^a) als Arbeit L gewonnen worden. Der Process ist aber auch umkehrbar. Wird der Körper im untern Niveau B herbeigeführt, dann langsam und gleichförmig in das obere Niveau A gehoben, so ist die abgelieferte Arbeit W_1 grösser, als die gelieferte W_2, die Arbeit L zum Heben ist verbraucht worden und entspricht wieder genau der Differenz $W_1 - W_2$.

Vergegenwärtigt man sich wieder den Process in der ersten Richtung, so ist die unter den gemachten Voraussetzungen gewonnene Arbeit L beim Uebergang von A nach B ein Maximum, weil ein gleichförmiges Sinken angenommen wurde; denn findet das Sinken ungleichförmig, also beschleunigt, mit zunehmender Geschwindigkeit statt, so fällt die gewonnene Arbeit kleiner aus, ja diese Arbeit kann sogar Null werden, wenn der Körper vom Gewichte G einfach von A nach B herabfällt; in diesem Falle wohnt dem Körper im untern Niveau noch die ganze anfängliche Arbeit W_1 inne, die Differenz $W_1 - W_2$ nur in Form von lebendiger Kraft, von kinetischer Energie. Zum Zwecke technischer Studien, die ja in dieser Schrift fast ausschliesslich vorliegen, ist es angemessen, sich den Körper G als tropfbare Flüssigkeit vorzustellen; bildet das Niveau A einen unendlich breiten und unendlich niedrigen Kanal und ebenso das Niveau B*) und bedeutet G das Gewicht einer Wassermenge,

*) Diese Annahme wird in der Technik bei der Untersuchung hydraulischer Maschinen durchweg gemacht; wollte man, wie richtiger wäre, an endliche Werthe der Breite und Tiefe des Zu- und Abflusskanals denken,

die in bestimmter Zeit z. B. in der Secunde herabsinkt, so erscheint der im Vorstehenden besprochene Process als derjenige, welcher von den hydraulischen Motoren, den Wasserrädern, Turbinen und Wassersäulenmaschinen ausgeführt wird; die Umkehrung des Processes liegt dann vor bei den Wasserhubmaschinen, den Schöpfrädern, Centrifugalpumpen und Cylinderpumpen.

Die Wahl des untern Niveaus C ist hierbei noch ganz willkürlich, man könnte bei Betrachtung hydraulischer Motoren dabei an den Meeresspiegel denken.

Vergleicht man nun die im Vorstehenden entwickelten Formeln und Sätze mit denen, die beim Carnot'schen Kreisprocess (§ 10 S. 49) unter Betrachtung von Fig. 8 gegeben wurden, so tritt die vollständige Analogie vor Augen. Wo dort von, in Arbeitseinheiten gemessenen, Wärmemengen Q_1 und Q_2 die Rede ist, treten hier die Arbeitsmengen W_1 und W_2 hervor und wo dort die Werthe der Function S durch S_1 und S_2 ausgedrückt waren, treten hier die Höhenwerthe H_1 und H_2 hervor. Die Gleichungen (IVa) und (IV), sowie (Va) und (V) sind dem Baue und dem Sinne nach dieselben.

Die Function S könnte daher als eine Länge, die Höhe eines Niveaus über einem gewissen Nullpunkte aufgefasst werden und die Analogie beider Arten von Vorgängen ist es eben, welche mir Anlass gegeben hat, den durch Gleichung (26) S. 41 gegebenen Werth P als »Wärmegewicht« zu bezeichnen, welche Benennung selbst auf das Differential

$$dP = \frac{dQ}{AS} \tag{37}$$

angewandt werden kann; in diesem Falle wäre die durch den Carnot'schen Process zwischen den Grenzwerthen S_1 und S_2 gewonnene Arbeit

$$dL = (S_1 - S_2)\, dP. \tag{38}$$

Denkt man dagegen an das gleichförmige Herabsinken eines Körpers von unendlich kleinem Gewicht dG, dem in der Höhe H die Arbeit $dW = H dG$ innewohnt, so ist

so müsste als Höhendifferenz $H_1 - H_2$ der Abstand der Schwerpunkte der beiden Kanalquerschnitte in Betracht gezogen werden, — auch da noch vorausgesetzt, dass das Wasser in allen Punkten mit gleicher Geschwindigkeit zuströmt und ebenso im Abflusskanal fortfliesst.

$$dG = \frac{dW}{H} \tag{37a}$$

und die gewonnene Arbeit bei der Senkung von H_1 auf H_2

$$dL = (H_1 - H_2)\, dG. \tag{38a}$$

Die letzten beiden Gleichungen und der ihnen zu Grunde liegende Process liessen sich leicht der Art erweitern, dass die allgemeinen Sätze hervortreten, die oben für einen beliebigen Kreisprocess gegeben worden sind.

Für die zunächst vorliegenden Fragen genügt es aber, den einfachen Carnot'schen Process im Auge zu behalten.

Wie nun die auf Fig. 10 sich stützenden Betrachtungen die Vorgänge bei den hydraulischen Motoren und ihren Umkehrungen, den hydraulischen Hubmaschinen wiedergaben, so entsteht die Frage, ob nicht die schärfere Betrachtung der Vorgänge bei den calorischen Maschinen und deren Umkehrung in ähnlicher Weise für die Vorgänge beim Carnot'schen Process verwerthet werden und zu weitern Aufschlüssen führen könnte.

Denkt man speciell an die Dampfmaschine, so findet bei dieser nun in der That mit dem Arbeitsgewinn im Dampfcylinder zugleich ein Wärmeübergang vom Dampfkessel nach dem Condensator statt; dem Kessel wird Wärme mitgetheilt, im Condensator findet Abkühlung statt, wird also Wärme abgeleitet. Die Wärmezuführung findet aber hier bei hoher Temperatur und die Wärmeableitung bei niedriger Temperatur statt.

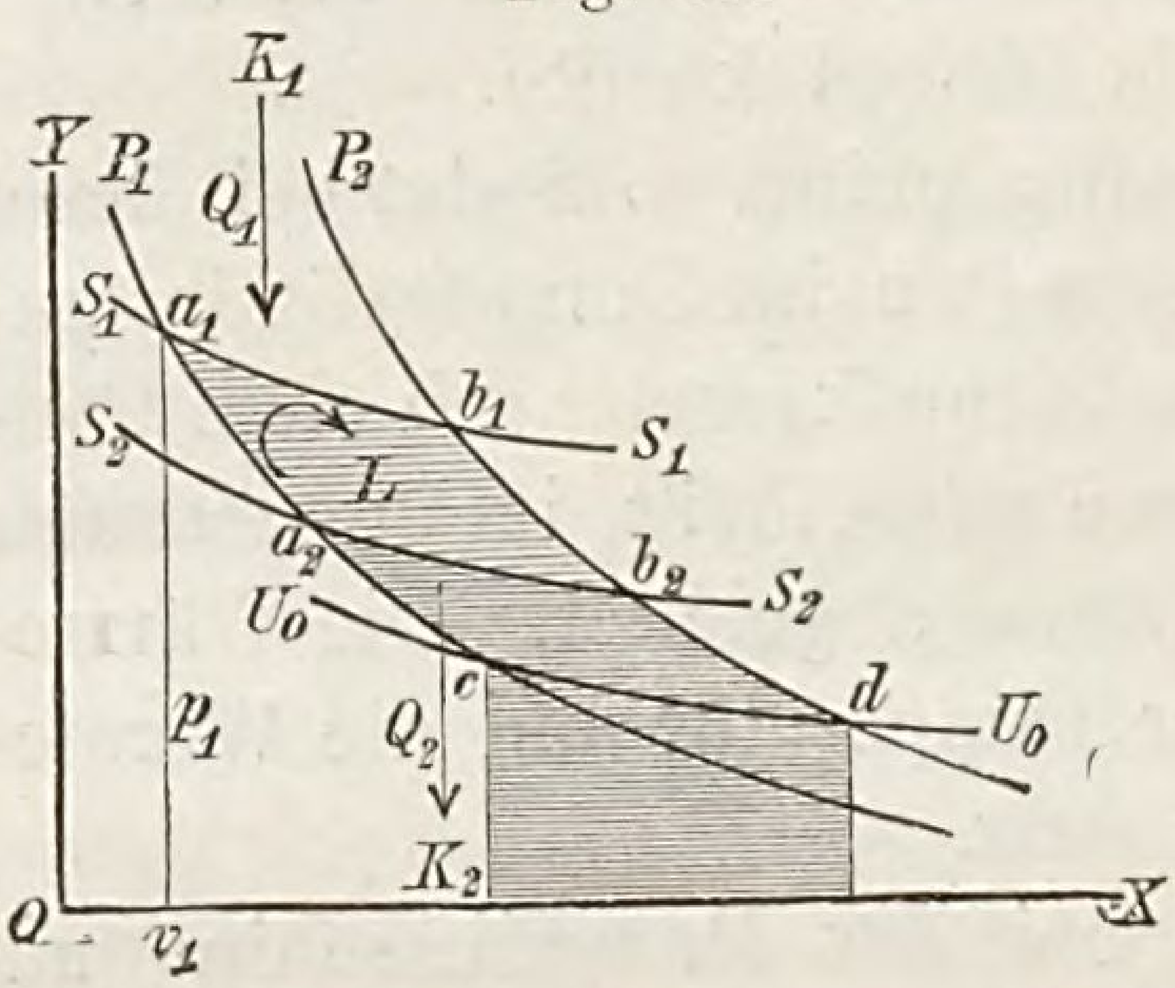
Man kann daher sagen, dass bei der Dampfmaschine mit dem Arbeitsgewinn zugleich ein Uebergang von Wärme höherer Temperatur zu solcher von niedriger Temperatur vorliegt. Bei den Kaltdampfmaschinen, Maschinen, welche zur Kälteerzeugung dienen, liegt der umgekehrte Process vor; hier ist zum Betrieb der Maschinen Arbeit aufzuwenden und die Wärmemittheilung (im Verdampfer) findet bei niedriger, die Wärmeentziehung (im Condensator) bei höherer Temperatur statt.

Man hat es hier also wirklich mit einem Kreisprocess zu thun, der sowohl nach der einen, wie nach der andern Richtung dem vorliegenden Bedürfniss entsprechend, durch Maschinen ausgeführt wird, also mit einem Process, der umkehrbar ist. Im Dampfkessel, wie im Condensator werden beim Betriebe die Temperaturen auf constanter Höhe erhalten.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen aber nun, dass in dem besprochenen Process ein neues Element ins Spiel kommt, welches in unseren bisherigen Betrachtungen nicht oder richtiger bemerkt in verdeckter Form zur Sprache gekommen ist, nämlich die Temperatur.

Bezeichnen wir die Temperatur nach Celsius gemessen mit t, wobei der Nullpunkt dem Gefrierpunkte des Wassers und $t = 100$ dem Siedepunkte des Wassers, beides bei mittlerem Barometerstande von 760 mm Quecksilbersäule entspricht, so fragt es sich, ob alle beim Carnot'schen Process besprochenen Einzelheiten und die der Function S zukommenden Eigenschaften den Erfahrungen entsprechend hervortreten, wenn man annimmt, dass in diesem Processe die Ausdehnung des Körpers auf dem Wege $a_1\, b_1$ (Fig. 11) bei constanter Temperatur t_1 stattfinde und ebenso die Compression auf dem Wege $b_2\, a_2$ bei niedrigerer Temperatur t_2 erfolge. In diesem Falle erscheint der Körper K_1 vom Zustande S_1 als ein solcher, der die Temperatur des vermittelnden Körpers bei dessen Expansion auf constanter Temperatur erhält. Das wird der Fall sein, wenn K_1 selbst die Temperatur t_1 hat und so gross ist (streng genommen unendlich gross ist), dass durch die Abgabe von Wärme seine Temperatur keine merkbare Aenderung erleidet. Ebenso wird der Körper K_2, der durch Wärmeaufnahme den vermittelnden Körper auf dem Wege $b_2\, a_2$ auf constanter Temperatur t_2 zu erhalten hat, als sehr gross und von der Temperatur t_2 anzunehmen sein. Körper dieser Art sind vorhanden und daher erscheint der Carnot'sche Process in das Bereich der Möglichkeit gezogen, auch, wenn man von der Erfahrung an den calorischen Maschinen absehen wollte.

Fig. 11.



Mit dem Arbeitsgewinn vermittelst des Carnot'schen Processes erscheint jetzt zugleich ein Uebergang von Wärme vom Körper K_1 der höheren Temperatur t_1 zu einem zweiten K_2 von niederer Temperatur t_2 verbunden, wie das wirklich bei den calorischen

Maschinen der Fall ist und vorhin bei Betrachtung der Dampfmaschinen besprochen wurde.

Ferner ist auch erfahrungsgemäss ein directer Wärmeübergang von K_1 zu K_2 ohne Arbeitsgewinn möglich, ein Fall, den wir in § 11 nach Fig. 10 mit dem Herabfallen eines Gewichtes aus einem höheren nach einem tiefer gelegenen Niveau verglichen haben. Man braucht nur die beiden Körper K_1 und K_2 der verschiedenen Temperatur t_1 und t_2 mit einander in Berührung zu bringen; in diesem Falle strömt die Wärme von selbst vom wärmern zum kältern über; ein Vorgang, der unter dem Namen der Wärmeleitung bekannt ist.

Niemals hat man aber bei directer Berührung der beiden Körper K_1 und K_2 einen Wärmeübergang in der entgegengesetzten Richtung, also vom Körper der niederen Temperatur zu dem der höheren beobachtet; ein solcher Uebergang erscheint nach der Umkehrung des Carnot'schen Processes (Fig. 11) nur möglich unter gleichzeitiger Verrichtung äusserer Arbeit und würde zu vergleichen sein mit der Erscheinung, dass ein Körpergewicht ohne Aufwand von Arbeit, also von selbst, aus einem tiefer gelegenen nach einem höher gelegenen Niveau gleichförmig hinaufsteigen könnte.

Aus allen den vorstehenden Betrachtungen über die Function $S = f(p, v)$ ergiebt sich der Schluss, dass die Temperatur constant ist, wenn die Zustandsänderungen des Körpers bei constantem Werthe von S erfolgen. Es ist daher S auch als eine Function der Temperatur t allein anzusehen, sodass demnach auch die Beziehung:

$$S = \psi(t)$$

gültig ist und eine Expansion oder Compression nach der Curve $S =$ Constans, als Zustandsänderung bei constanter Temperatur erscheint; aus diesem Grunde wurde diese Curve von Anfang an als isothermische Curve bezeichnet.

§ 12. Umformung der Fundamentalgleichungen.

Da S als eine Function der Temperatur t erkannt worden ist, so besteht auch die Beziehung

$$dS = \frac{dS}{dt}\,dt. \tag{39}$$

Nun ist in der Physik längst erkannt worden, dass die Temperatur t eines Körpers durch den Druck p und das Volumen v vollständig bestimmt ist; man nennt in neuerer Zeit die analytische Beziehung, welche für einen bestimmten Körper zwischen t, p und v vorliegt und, physikalischen Beobachtungen entsprungen, angenommen wird, (nach Bauschinger) die »Zustandsgleichung« des betreffenden Körpers. Diese Zustandsgleichung erscheint für verschiedene Körperformen verschieden und ist auch zunächst noch keineswegs für alle Körperarten festgestellt; man kennt sie zur Zeit nur für Gase und wie später besprochen werden wird, für Dämpfe in gewissen Zuständen, nicht aber für feste und flüssige Körper. Die Zustandsgleichung als bekannt vorausgesetzt, ergiebt aber jedenfalls die Beziehung

$$dt = \frac{\partial t}{\partial p}\,dp + \frac{\partial t}{\partial v}\,dv$$

und wenn man dieselbe in Gl. (39) benutzt

$$dS = \frac{dS}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial p}\,dp + \frac{\partial t}{\partial v}\,dv\right). \tag{40}$$

Vergleicht man diese Formel mit der früher unter Nummer (19) S. 32 gegebenen, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{dS}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{dS}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial v}. \tag{41}$$

Nun war aber die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie (II, S. 31)

$$S = Y\frac{\partial S}{\partial p} - X\frac{\partial S}{\partial v}$$

und benutzt man hier die Gl. (41), so folgt

$$\frac{S}{\frac{dS}{dt}} = Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Da S nur eine Function von t ist, so ist dieses auch mit dem Ausdrucke auf der linken Seite der Fall, man kann daher setzen:

$$T = \frac{S}{\frac{dS}{dt}}. \tag{42}$$

und diese neue Temperaturfunction T, deren specielle Form noch zu ermitteln ist, möge bis zur Feststellung ihrer Form im Weiteren als die »Carnot'sche Function« bezeichnet werden. Sie steht mit der mit S bezeichneten Function in einfacher Beziehung, denn aus Gl. (42) folgt:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dt}{T} \tag{43}$$

und daher ist

$$\operatorname{logn} S = \int \frac{dt}{T} + C\,, \tag{44}$$

wo C eine Integrationsconstante bedeutet. Sobald hiernach die Carnot'sche Temperaturfunction ihrer Form nach erkannt worden ist, und sie wird unten aus bekannten physikalischen Sätzen sich ableiten lassen, so ist auch nach Gl. (44) sogleich die Grösse S als Function der Temperatur t bestimmt.

Zum Zwecke der folgenden Untersuchungen und um leicht auf die Hauptresultate der gesammten vorstehenden Untersuchungen verweisen zu können, mögen dieselben in den Hauptformeln hier zusammengestellt werden. Die erste Hauptgleichung (I) (S. 29) wird unverändert in (Ia) wiederholt, für die zweite Hauptgleichung (II) ergiebt sich dagegen, wenn man Gl. (42) in der ihr vorausgehenden Gleichung benutzt, die Form, wie sie unter (IIa) aufgeführt ist:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1 \tag{Ia}$$

$$Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v} = T \tag{IIa}$$ *)

Von den Gleichungen (III) (S. 32) dagegen ändern sich ihrer Form nach nur die zweite und dritte, wenn man zu ihrer Umformung die Gl. (41) und (43) benutzt, eine Umänderung, die leicht verfolgt werden kann; es schreibt sich daher:

*) Clapeyron hat (a. a. O.) die zweite Hauptgleichung genau in der Form gegeben, in welcher sie unter (II^a) dargestellt ist, nur verwendet er als Bezeichnung der Carnot'schen Function T den Buchstaben C.

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A[Xdp + Ydv] \\ &= \frac{A}{\frac{\partial t}{\partial p}}[Xdt + Tdv] \\ &= \frac{A}{\frac{\partial t}{\partial v}}[Ydt - Tdp] \\ &= A[dU + Ap\,dv] \\ &= AS\,dP \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III a)}$$

und aus der Zusammenstellung dieser fünf identischen Gleichungen wird immer diejenige herausgegriffen werden, die bei Lösung bestimmter Probleme am leichtesten zum Ziele führt.

§ 13. Universelle Bedeutung der Carnot'schen Function.

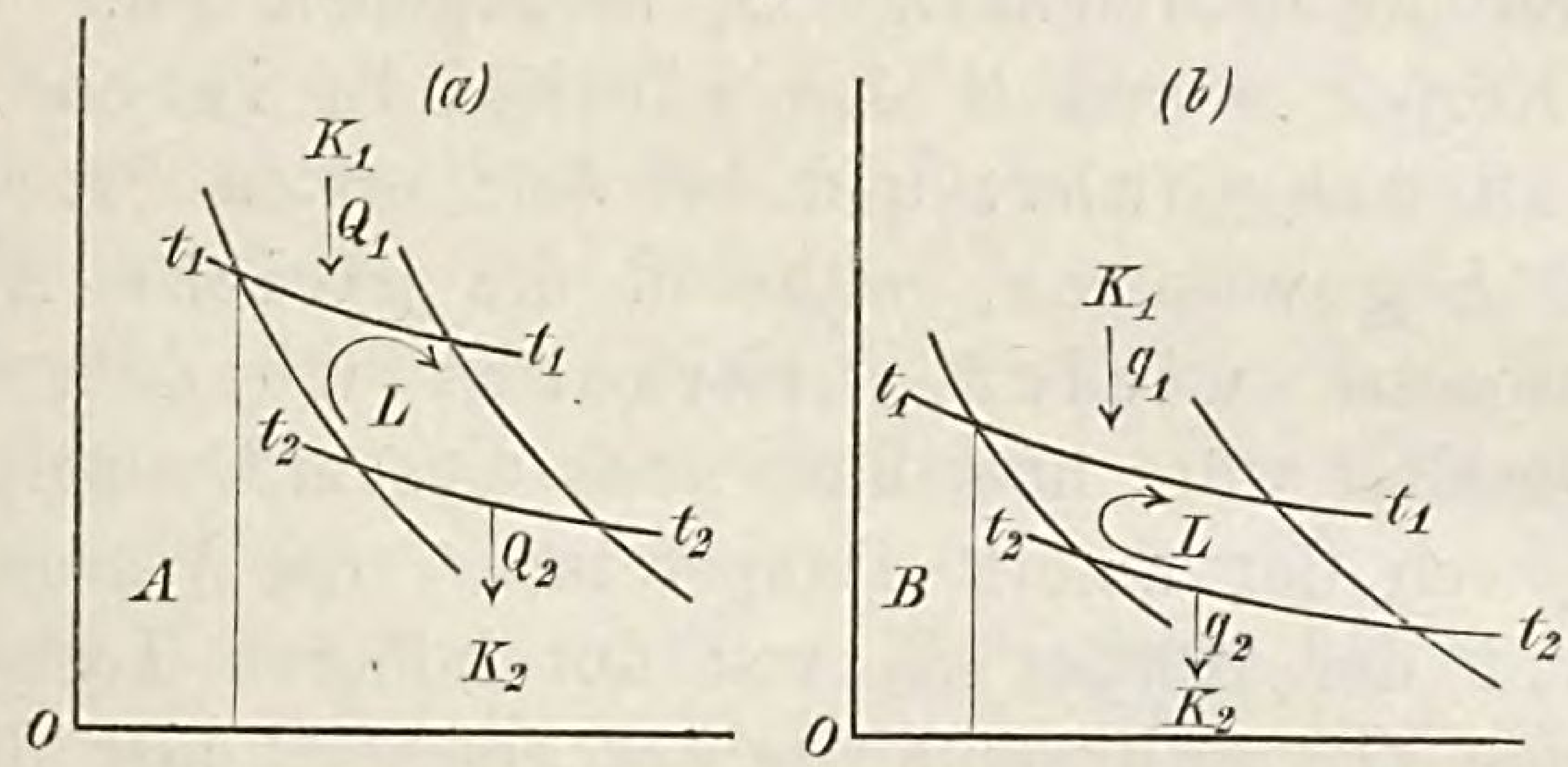
Bei den obigen Untersuchungen der Kreisprocesse, insbesondere des Carnot'schen Processes, war immer die Rede von einem Körper, dessen Zustandsänderungen in Betracht gezogen wurden; wenn sich dabei herausstellte, dass die beiden Functionen S und T als Temperaturfunctionen von bestimmter Art anzusehen seien, so gilt diese Bemerkung offenbar zunächst nur für den betreffenden Körper, der den Carnot'schen Process durchlief.

Es lässt sich aber nun beweisen, und das ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, dass die Form dieser Function für Körper jeder Art, mögen sie im luftförmigen, flüssigen oder festen Zustande vorliegen, dieselbe sein muss. Wenn der Beweis nur für eine der beiden Functionen geliefert ist, so gilt er wegen der Beziehung Gl. (44) auch für die andere.

Denkt man sich zwei verschiedene Körper A und B und führt man mit beiden den Carnot'schen Process zwischen zwei Isothermen, welche den gleichen Grenztemperaturen t_1 und t_2 entsprechen, aus und zwar solcher Art, was bei entsprechender Wahl der zugehörigen Adiabaten immer möglich ist, dass die gewonnene oder bei der Umkehrung des Processes aufgewandte Arbeit L die gleiche ist, so können in beiden Fällen für die Lieferung und die Aufnahme von Wärme dieselben Körper K_1 und K_2 in Verwendung kommen.

Führt man mit dem ersten Körper A den in Fig. 12a angedeuteten Kreisprocess in der Pfeilrichtung aus, so liefert der Körper K_1 die Wärmemenge Q_1, der Körper K_2 nimmt die

Fig. 12.



Wärmemenge Q_2 auf und die hierbei gewonnene Arbeit L steht, wie gefunden wurde, zu den angegebenen Wärmemengen in der Beziehung

$$AL = Q_1 - Q_2 .$$

Führt man dagegen denselben Process in gleicher Richtung mit einem zweiten Körper B aus (Fig. 12b), so mag angenommen werden, dass der Körper K_1 die Wärmemenge q_1 bei der isothermischen Expansion an B abgeben und der Körper K_2 bei der isothermischen Compression die Wärmemenge q_2 aufnehmen müsse. Da auch hier die Arbeit L sein soll, so gilt die Formel

$$AL = q_1 - q_2 .$$

Hieraus folgt durch Verbindung beider Formeln

$$Q_1 - Q_2 = q_1 - q_2 . \tag{45}$$

Aus der Gleichheit der Differenzen geht aber noch nicht hervor, dass auch $Q_1 = q_1$ und $Q_2 = q_2$ sein müsse, vielmehr ist nur der Schluss zulässig, dass die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= Q_1 + Q_0 \\ q_2 &= Q_2 + Q_0 \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

bestehen, wobei Q_0 einen positiven oder negativen Werth einer Wärmemenge darstellt.

Nimmt man zuerst an, Q_0 sei positiv und führt man den Process mit dem Körper A in der Richtung des angegebenen Pfeiles aus (Fig. 12a), so hat der Körper K_1 die Wärmemenge Q_1 hergegeben; führt man jetzt unter Benutzung derselben Kör-

per K_1 und K_2 mit dem Körper B (Fig. 12b) den Process in der dem angegebenen Pfeile entgegengesetzten Richtung aus, so hätte der Körper K_1 von der obern Temperatur t_1 hierbei die Wärmemenge $q_1 = Q_1 + Q_0$ aufgenommen, während er beim ersten Processe nur die Wärmemenge Q_1 hergegeben hat. Beide vermittelnde Körper A und B sind hierbei in ihren Anfangszustand zurückgeführt und bei dem ersten Processe wurde die Arbeit L gewonnen, während die gleiche Arbeit beim zweiten Processe wieder verbraucht worden ist. Das alleinige Resultat wäre nun, dass nach diesem Doppelprocess der Körper K_2 von der untern Temperatur t_2 die Wärmemenge Q_0 weniger und der Körper K_1 von der höheren Temperatur die Wärmemenge Q_0 mehr enthielte; es erscheint also die Wärmemenge Q_0 einfach, wie von selbst hinübergegangen von einem Körper K_2 von der untern Temperatur t_2 zu einem Körper der höheren Temperatur t_1.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn in den Gleichungen (46) das Glied Q_0 als negativ angenommen wird; in diesem Falle wäre dann statt dieser Gleichungen

$$Q_1 = q_1 + Q_0$$
$$Q_2 = q_2 + Q_0$$

zu setzen, und man würde das gleiche Resultat wie vorhin erhalten, wenn man mit dem zweiten Körper B (Fig. 12b) zuerst den Process in der vom Pfeile angegebenen Richtung und dann erst mit dem ersten Körper A in der dem Pfeile entgegengesetzten Richtung den Kreislauf vollführte.

Diese Betrachtungen führten nun Clausius zu einem Satze, der als der zweite Hauptsatz (neben dem ersten, dass Wärme und Arbeit äquivalent sind) in der mechanischen Wärmetheorie jetzt allgemein angenommen worden ist und der einfach lautet:

»Wärme kann nicht von selbst aus einem kälteren in einen »wärmeren Körper übergehen.«

Es folgt daraus, dass in den vorstehenden Entwickelungen die eingeführte Wärmemenge Q_0 weder einen positiven noch einen negativen Werth haben kann, sondern dass sie Null sein muss. Die Gl. (46) geben daher

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= q_1 \\ Q_2 &= q_2 \end{aligned} \right\} . \tag{47}$$

Bei den beiden durch die Figuren 12a und 12b dargestellten Kreisprocessen erhält daher der Körper K_1 dieselbe Wärmemenge Q_1 bei der Umkehrung des Processes wieder zurück, die er vorher geliefert hatte und der Körper K_2 giebt dieselbe Wärmemenge Q_2 wieder ab, welche er vorher empfangen hatte, welcher Körper auch immer als vermittelnd in dem einen, directen, und dem andern, rückgängigen, Process Verwendung gefunden haben mag.

Die Wichtigkeit dieses Satzes lässt es gerechtfertigt erscheinen, wenn auf einen Augenblick auf den § 11 behandelten analogen Fall aus der Maschinenlehre zurückgegangen wird. Denkt man sich, dass eine Turbine in der Secunde die Wassermenge G kg bei dem Gefälle $H_1 - H_2$ verbraucht (vergl. Fig. 10, S. 52), so wäre die entsprechende Arbeit derselben, abgesehen von allen Arbeitsverlusten, $G(H_1 - H_2)$; würde nun diese Turbine eine Centrifugalpumpe treiben und wollte man auch hier von allen Arbeitsverlusten absehen, so könnte die gleiche Wassermenge G auf das anfängliche Niveau H_1 zurückgebracht werden und wäre die anfänglich in diesem Niveau herbeigeführte Arbeitsquantität $W_1 = GH_1$, so würde dieselbe auch wieder zurückgebracht erscheinen. Wollte man sich nun irgend eine Maschinenanordnung denken, welche eine grössere Arbeitsmenge $W_1 + W_0$ in das obere Niveau zurückfördert, so würde dies gleichbedeutend sein mit der Annahme, dass ein Gewicht:

$$G_0 = \frac{W_0}{H_1}$$

ohne Arbeitsaufwand aus einem tiefer nach einem höher gelegenen Niveau gehoben werden könne; da man dieses Gewicht G_0 aber wiederum arbeitsverrichtend (beispielsweise an einer zweiten Turbine) herabsinken lassen könnte, so läge in der Anordnung dieser beiden Turbinen mit einer Centrifugalpumpe ein Perpetuum mobile vor, dessen Unmöglichkeit längst erwiesen ist und das allen Gesetzen der Mechanik widerspricht.

Wie mit den hydraulischen Maschinen, verhält es sich aber auch mit den calorischen; hätte man mit zwei solchen Maschinen den in Fig. 12a und 12b angegebenen Carnot'schen Process, mit der einen Maschine hinwärts, mit der anderen zwischen den gleichen Temperaturgrenzen rückwärts ausgeführt und auf dem Rückgange dieselbe Arbeit wieder aufgewendet, die beim Hin-

gang gewonnen wurde, so könnte unmöglich die dem Körper K_1 zugeführte Wärmemenge grösser sein als die, welche er beim ersten Processe lieferte; denn wäre sie grösser, und würde der Mehrbetrag nach der oben benutzten Bezeichnung Q_0 sein, so könnte man diese Wärmemenge im obern Temperaturniveau zur Ausführung eines dritten Carnot'schen Processes mittelst einer dritten Maschine verwerthen.

Der Clausius'sche Grundsatz sagt daher im Grunde genommen nichts anderes aus, als dass, maschinentechnisch gesprochen, keine Combination von calorischen Maschinen denkbar ist, die auf ein Perpetuum mobile führt.

Es möge nun zur Erörterung der Hauptfrage zurückgekehrt werden. Die Betrachtung der beiden in Fig. 12a und 12b angestellten Processe hat zu dem Resultat geführt, dass unter Voraussetzung derselben Temperaturgrenzen t_1 und t_2 und gleicher Arbeitsquantität die Beziehungen

$$Q_1 = q_1$$
$$Q_2 = q_2$$

giltig sein müssen, es folgt daher auch

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{q_1}{q_2}. \tag{48}$$

Daraus folgt aber noch nicht, dass die Function $S = \psi(t)$ S. 57 für die beiden Körper A und B von gleicher Form sein müsse; die beiden isothermischen Curven können für den Körper A (Fig. 12a) allerdings einen anderen Verlauf haben, als für den Körper B, wenn man den Zusammenhang von S mit p und v in Betracht zieht, und dieser Unterschied liegt, wie hier schon bemerkt werden mag, in der That vor; in Hinsicht des Zusammenhanges des Werthes S mit der Temperatur ist also eine weitere Verfolgung der Frage nöthig.

Wird für den Körper A die Function S, als Temperaturfunction, wie bisher mit S bezeichnet; für den Körper B dagegen mit s, um damit eine andere Form der Function zu bezeichnen, so besteht nach Gl. (28) die Beziehung

$$\frac{Q_1}{AS_1} = \frac{Q_2}{AS_2} \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Für den andern Process ist ebenso

$$\frac{q_1}{A s_1} = \frac{q_2}{A s_2} \quad \text{oder} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

Nach Gl. (48) folgt daraus sogleich auch:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten die Einheit, so schreibt sich auch:

$$\frac{s_1 - s_2}{s_2} = \frac{S_1 - S_2}{S_2}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man sich die beiden Processe in Fig. 12 a und b zwischen den Grenztemperaturen $t_2 = t$ und $t_1 = t + dt$ ausgeführt denkt,

$$\frac{ds}{s} = \frac{dS}{S}$$

und daher durch Integration

$$s = kS, \tag{49}$$

wobei k eine als Factor auftretende Constante ist. Hiermit ist zuerst erwiesen, dass die Temperaturfunction S für den einen Körper A sich von der des andern Körpers B der Form nach nur durch diesen Factor unterscheiden kann. Nun wurde aber in § 5 S. 30 die Function S als integrirender Divisor in Gl. (15) eingeführt und in der Anmerkung daselbst betont und bewiesen, dass an Stelle dieser Function, ohne dass damit in allen folgenden Schlüssen irgend welche Aenderung hervortrete, auch der Werth kS gesetzt werden könne, wonach also der Factor k ganz willkürlich erscheint, demnach auch der Einheit gleich gesetzt werden könnte. Aber auch ganz abgesehen hiervon ergiebt sich, wenn man Gl. (49) in Hinsicht der Temperatur differentiirt,

$$\frac{ds}{dt} = k \frac{dS}{dt}$$

und in Gl. (49) dividirt unter gleichzeitiger Benutzung von Gl. (42) S. 58

$$T = \frac{s}{\frac{ds}{dt}} = \frac{S}{\frac{dS}{dt}} \tag{50}$$

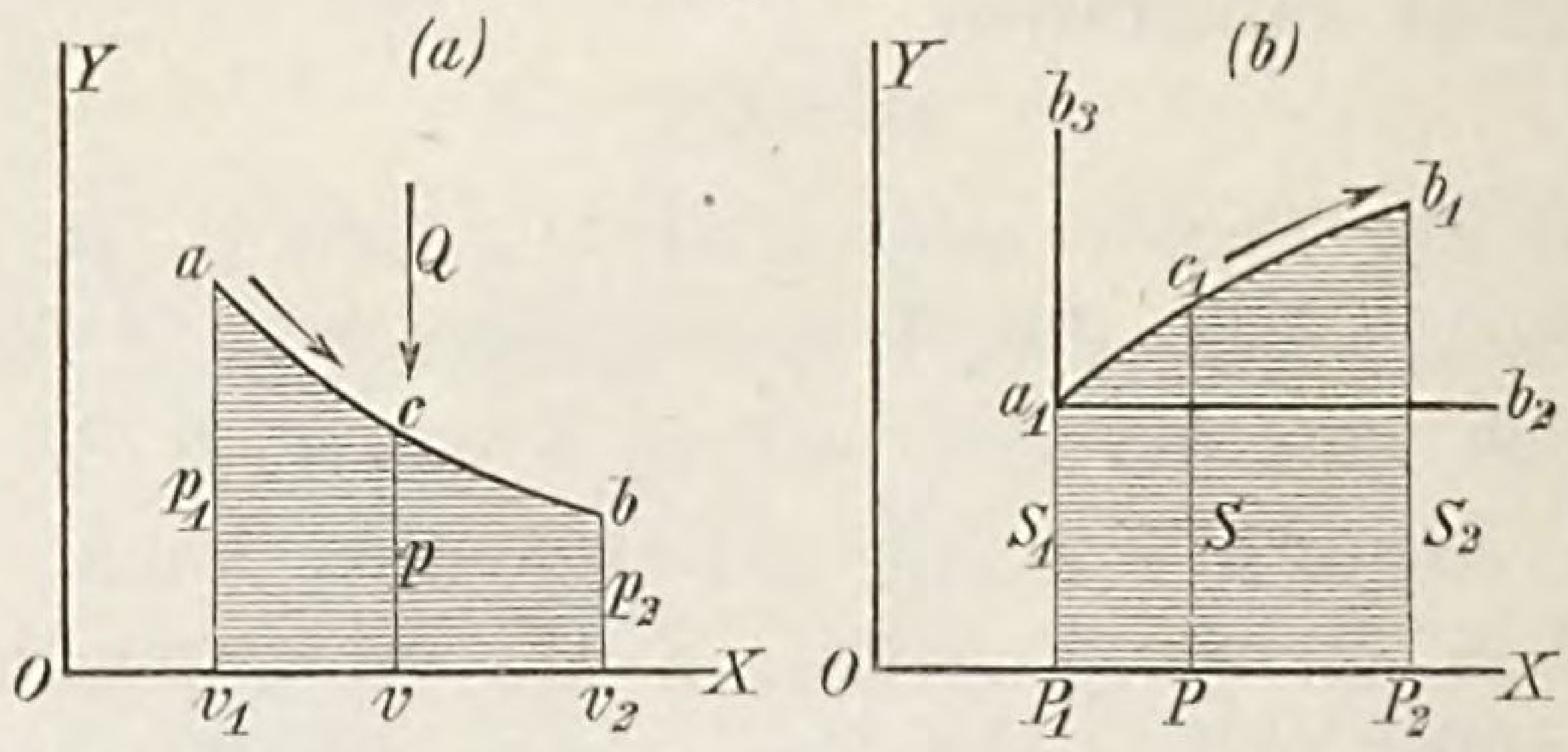
und diese Grösse wurde nach Gl. (42) als die Carnot'sche Temperaturfunction T bezeichnet.

Hieraus ergiebt sich das wichtige Resultat, dass die Carnot'sche Function nicht nur ihrer Form nach für alle Körper der Natur dieselbe sein muss, sondern dass sie auch bei einer bestimmten Temperatur für alle Körper, ohne Ausnahme, *einen und denselben numerischen Werth haben muss.*

§ 14. Ueber die Abbildung der umkehrbaren Druckcurven und Indicatordiagramme.

Geht ein Körper unter Mittheilung der Wärmemenge Q aus dem Anfangszustande (p_1, v_1) Fig. 13 a auf der vorgeschriebenen Druckcurve acb in den Endzustand (p_2, v_2) über, so entspricht

Fig. 13.



dem Punkte c der Curve, dessen Coordinaten p und v sind, ein ganz bestimmter Werth der Function S sowohl, wie der zugehörigen Temperatur t, da die beiden Beziehungen

$$S = f(p, v) \quad \text{und} \quad S = \psi(t)$$

auch im Weitern als bekannt vorausgesetzt werden.

Ebenso hat aber auch die Function:

$$P = \int \frac{dQ}{AS} = \varphi(p, v)$$

für diesen Punkt c einen Werth, der sich nach dieser als schon gegeben betrachteten Gleichung bestimmen lässt.

Trägt man jetzt in Fig. 13 b den Werth P als Abscisse OP von O aus auf und als Ordinate hierzu den Werth S, so ergiebt sich der Punkt c_1, den ich als die Abbildung des Punktes c der Druckcurve bezeichne.

In dieser Weise lässt sich jeder Punkt der Druckcurve abbilden, sobald deren Verlauf gegeben ist, und es ergiebt sich daraus in Fig. 13b im Verlaufe der Punkte $a_1\, c_1\, b_1$ eine Curve, die als Abbildung der Druckcurve acb bezeichnet werden mag.

Wäre im besondern Falle acb die isothermische Curve, für welche nach frühern Sätzen die Temperatur t und daher der entsprechende Werth $S = S_1$ constant ist, so folgt, dass die Abbildung der Isotherme eine gerade Linie $a_1\, b_2$, parallel zur Abscissenaxe OX liegend, ist.

Wäre dagegen die Druckcurve acb eine Adiabate, so ist für diese, wie schon in § 8 bei Betrachtung der Fig. 5, sowie bei Gl. (23) S. 36 besprochen wurde, die Function $P = P_1$ constant; es ist daher die Abbildung $a_1\, b_3$ der durch den Punkt a gehenden adiabatischen Curve eine Gerade, welche der Ordinatenaxe parallel liegt.

Kehrt man wieder zum allgemeinen Fall zurück und lässt man (Fig. 13b) die Strecke P um dP zunehmen, so ist der Inhalt des über dP stehenden Flächenstreifens SdP; nun folgt aus der ursprünglichen Beziehung

$$dP = \frac{dQ}{AS}$$

auch:

$$\frac{dQ}{A} = SdP$$

und daher repräsentirt die unter der abgebildeten Curve $a_1\, c_1\, b_1$ liegende Fläche $a_1\, b_1\, P_2\, P_1$ (in der Figur schraffirt) nichts anderes, als

$$\frac{Q}{A} = \int SdP,$$

d. h. die in Arbeitseinheiten gemessene Wärmemenge Q, welche dem Körper während seiner Zustandsänderungen auf dem Wege acb mitgetheilt werden musste; die von letzterer Curve umschlossene Fläche $a\, b\, v_2\, v_1$ (Fig. 13a) giebt zugleich die äussere Arbeit, die hierbei gewonnen wurde.

Es ergiebt sich daraus neben der schon in § 7 S. 37 unter Benutzung von Fig. 4 gegebenen Methode der graphischen Be-

stimmung der Wärmemenge Q hier noch eine zweite, welche aber frei von den Mängeln ist, die dort hervorgehoben wurden.

Nicht übersehen werden darf jedoch, dass beide Methoden nur bei umkehrbaren Processen giltig sind.

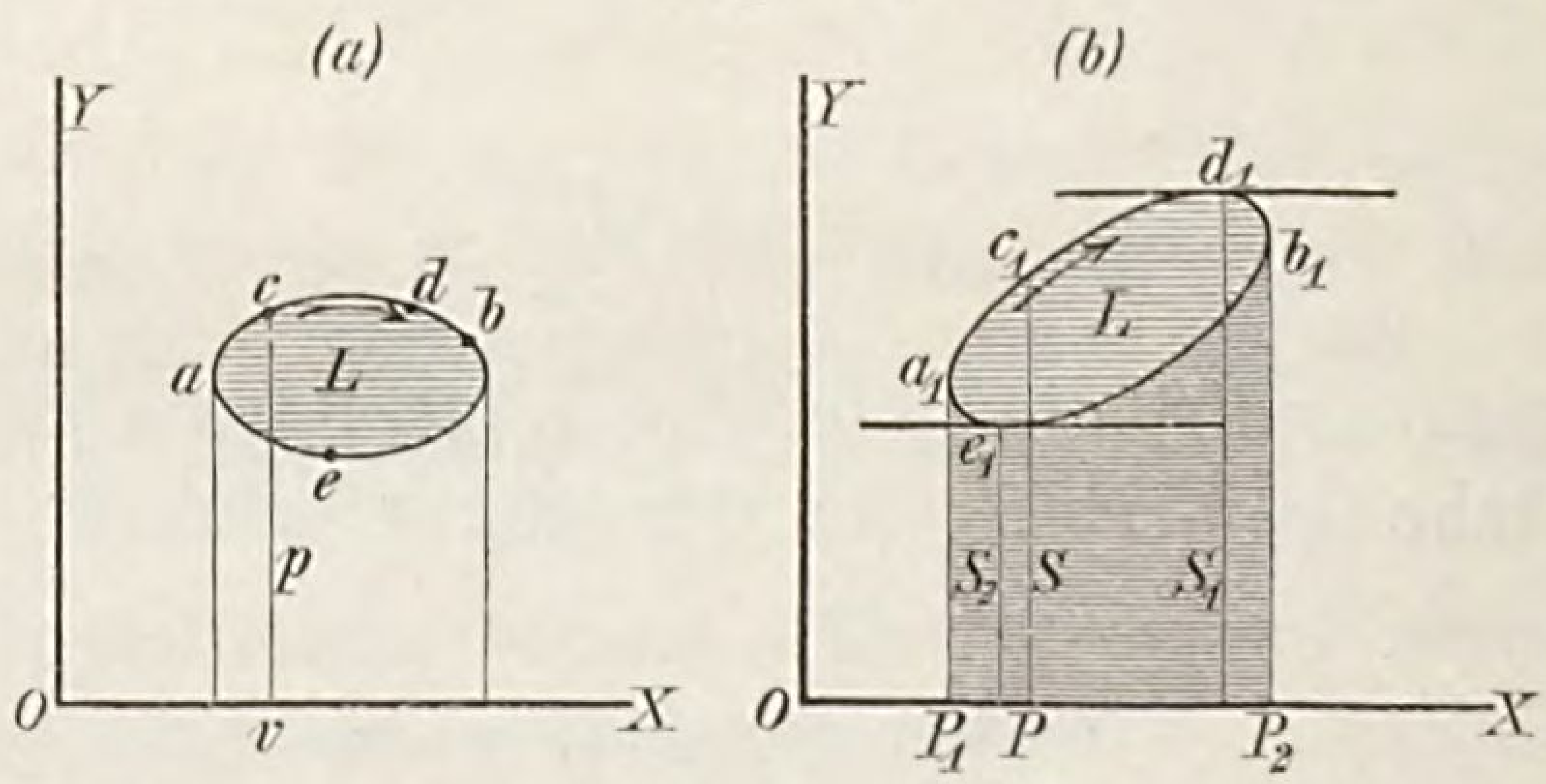
Würde (Fig. 13a) eine Umkehrung des Processes, also Compression vorliegen, so kehrt sich auch in Fig. 13b die Pfeilrichtung um, die Wärmemenge erscheint negativ, also als abgeleitete Wärme, während die schraffirte Fläche in Fig. 13a als aufgewandte Arbeit hervortritt.

Es ist selbstverständlich, dass auch bei der Expansion eine Wärmeableitung vorliegen kann, ein Fall, der in der Abbildung dann aber ohne Weiteres dadurch hervortritt, dass die Strecke $O P_2 < O P_1$ erscheint.

Die hier entwickelten Sätze gelten natürlich auch, wenn die gegebene Druckcurve eine geschlossene Curve bildet, also ein umkehrbarer Kreisprocess vorliegt.

Stellt Fig. 14a das betreffende Indicatordiagramm dar, so ist die von der Curve umschlossene Fläche nach den früheren Darlegungen die bei diesem Processe gewonnene Arbeit. Die Abbildung Fig. 14b, in der angegebenen Art construirt, führt dann ohne Weiteres wieder auf eine geschlossene Curve, und wenn man

Fig. 14.



die beiden Endordinaten $P_1 a_1$ und $P_2 b_1$ zeichnet, welche die geschlossene Curve in den Punkten a_1 und b_1 berühren, so repräsentirt die ganze schraffirte Fläche, welche vom obern Theile $a_1 d_1 b_1$ der Curve und den Endordinaten umschlossen wird, die Wärmemenge Q_1 (in Arbeitseinheiten gemessen, also $Q_1 : A$), welche bei diesem Kreisprocesse zuzuführen, und die durch den unteren Theil $a_1 e_1 b_1$ umschlossene Fläche (in der Figur enger schraffirt) ergiebt in gleicher Art die Wärmemenge Q_2, ebenfalls

in Arbeit gemessen, welche abzuführen ist. Aus der Gleichung (31) nämlich

$$L = \frac{Q_1 - Q_2}{A}$$

folgt hiernach ferner, dass die in Fig. 14b hervortretende weiter schraffirte Fläche ebenfalls die Arbeit L darstellt, welche durch diesen Kreisprocess gewonnen wird; mit anderen Worten, die Abbildung eines Indicatordiagramms giebt ebenfalls die (indicirte) Arbeit L, nur liefert sie zugleich das Mittel, die zugeführte und abgeleitete Wärmemenge Q_1 und Q_2 zu ermitteln und zwar einfach durch Flächenbestimmungen, die mit dem Planimeter vorgenommen werden können, wie das heut fast allgemein bei der Bestimmung der Indicatorflächen selbst d. h. der Arbeit L schon geschieht.

Aus der Lage der beiden Berührungspunkte a_1 und b_1 (Fig. 14b) lassen sich weiterhin leicht, rückwärts, die betreffenden Punkte a und b des Indicatordiagramms (Fig. 14a) bestimmen, zwischen welchen bez. die Wärmemittheilung und Wärmeentziehung stattfindet.

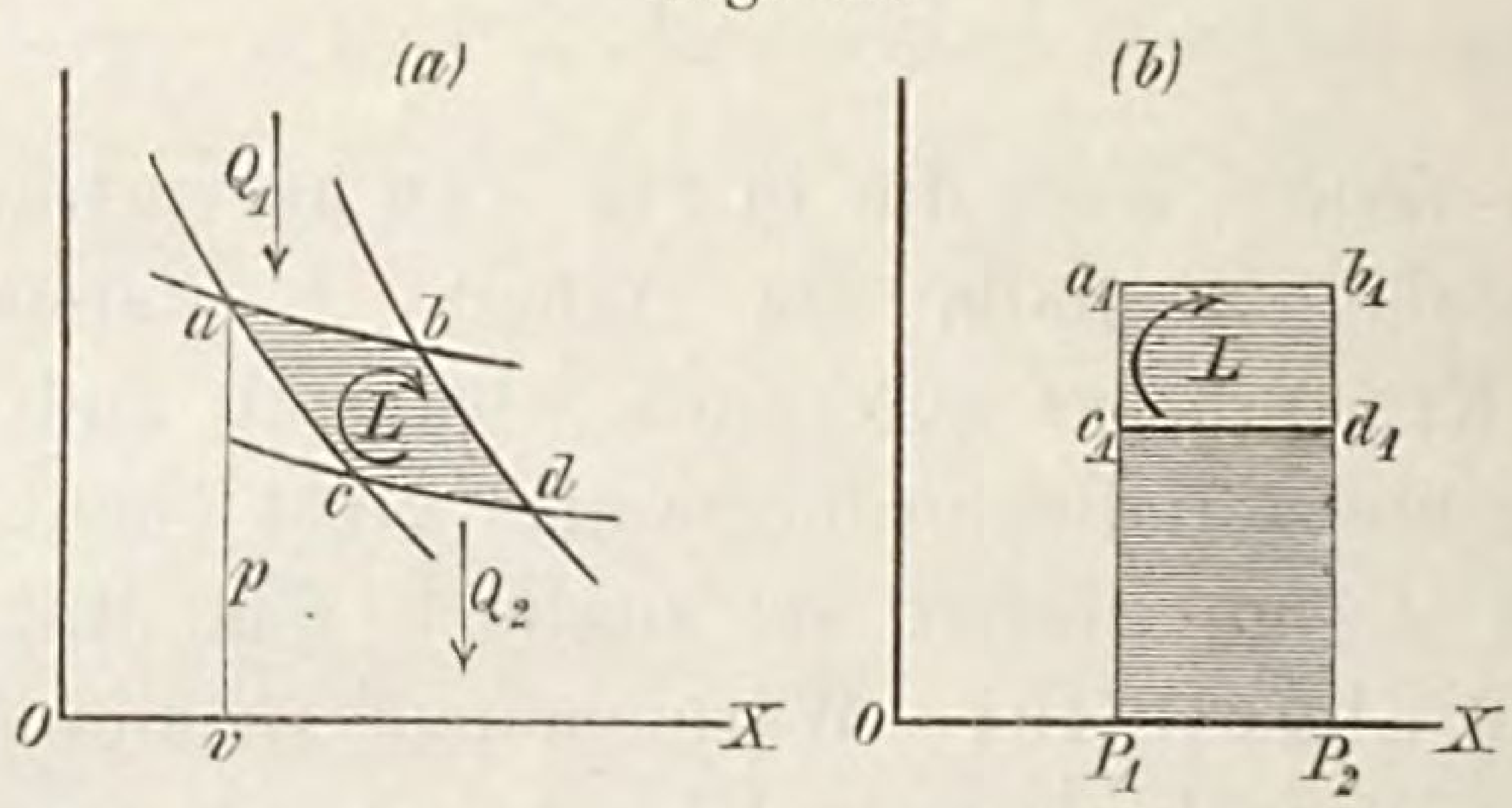
Legt man ferner in Fig. 14b zwei horizontale Gerade, welche die geschlossene Curve in den Punkten d_1 und e_1 berühren, so entsprechen diese Punkte dem grössten und dem kleinsten Werthe S_1 und S_2 der Function S und hieraus ist rückwärts auf die höchste und niedrigste Temperatur t_1 und t_2 zu schliessen, die in diesem Processe vorkommt; leicht werden sich auch die den Punkten d_1 und e_1 entsprechenden Punkte d und e im Indicatordiagramm selbst bestimmen lassen.

Würden in der Abbildung einzelne geradlinige horizontale oder verticale Strecken vorkommen, so wäre dieses ein Zeichen, dass in dem durch das Indicatordiagramm gegebenen Kreisprocesse auf den entsprechenden Strecken isothermische bez. adiabatische Expansion oder Compression vorliegt.

Sehr einfach gestaltet sich nach dieser Methode die Abbildung des Carnot'schen Kreisprocesses, Fig. 15a u. 15b a. f. S. Die beiden Isothermen ab und cd erscheinen in der Abbildung als die horizontalen Geraden $a_1 b_1$ und $c_1 d_1$ und die beiden Adiabaten ac und bd durch die verticalen Geraden $a_1 c_1$ und $b_1 d_1$ dargestellt. Die Ordinaten $P_1 a_1 = P_2 b_1$ repräsentiren S_1, ebenso

$P_1 c_1 = P_2 d_1$ den Werth S_2, entsprechend der obern und untern Temperaturgrenze t_1 und t_2; bezeichnet man überdies die Strecke

Fig. 15.



$P_1 P_2$ mit P, so folgt aus der angegebenen Bedeutung der einzelnen Flächen die zugeführte Wärmemenge Q_1 und ebenso die abgeleitete Q_2 aus den Formeln:

$$\frac{Q_1}{A} = P S_1 \quad \text{und} \quad \frac{Q_2}{A} = P S_2$$

und die gewonnene Arbeit ist

$$L = P (S_1 - S_2),$$

ganz wie es weiter oben erörtert worden ist.

Man erkennt hieraus, dass ein grosser Theil und gerade der wichtigste Theil von Fragen der Thermodynamik, insbesondere so weit sie technische Probleme betreffen, seine Lösung findet, sobald man die Form der beiden Functionen

$$S = f(p, v) = \psi(t) \quad \text{und} \quad P = \varphi(p, v)$$

kennt. Aus den weitern Untersuchungen wird hervorgehen, dass sich diese Functionen gerade für die technisch wichtigsten Körper (Gase und Dämpfe) ermitteln und feststellen lassen, und daher scheint in der im Vorstehenden entwickelten Methode ein Verfahren gefunden, auf graphischem Wege die Aufgaben der Thermodynamik zu lösen, und überdies eine wichtige und bedeutsame Erweiterung in der Verwerthung der Indicatordiagramme vorzuliegen.

Man darf aber nicht übersehen, dass die hier entwickelten Sätze unter der ausdrücklichen Voraussetzung nur gültig sind, dass der ganze Kreisprocess umkehrbar ist. Unsere wirklich ausgeführten calorischen Maschinen, an denen

wir mit Leichtigkeit durch Anwendung der Indicatoren die Indicatordiagramme gewinnen können, vollführen aber keineswegs solch umkehrbare Processe; später folgende Untersuchungen werden zeigen, dass ganze Strecken der Indicatorcurven als nicht umkehrbar hervortreten, auf welche die gewonnenen Sätze nicht ohne weiteres angewendet werden dürfen. Vorläufig erscheint daher die gegebene graphische Methode*) nur als Hülfsmittel, die Sätze über umkehrbare Processe klar und übersichtlich auf eine einfache Weise vor Augen zu führen; bei dem Versuche einer Verwerthung derselben bei technischen Untersuchungen, also z. B. der weitern Verwerthung der Indicatordiagramme von Dampfmaschinen, Luftmaschinen u. s. w., stösst man aus den angegebenen Gründen auf Fragen, die erst durch eine weitere Untersuchung von nicht umkehrbaren Processen ihre Erledigung finden können.

*) Der Erste, der den Gedanken verfolgte, das Wärmegewicht P als Abscisse und den zugehörigen Werth von S als Ordinate aufzutragen (hier die Bezeichnungen im Texte benutzt), war meines Wissens Belpaire (Bulletin de l'académie royale de Belgique 1872. Bd. 34. p. 509), indem derselbe speciell den Carnot'schen Kreisprocess zur Darstellung brachte, allerdings, wie dieses auch bei den im Folgenden genannten Schriftstellern geschah, unter Benutzung der Formeln, wie sie sich in vorliegender Schrift für die Functionen P und S erst noch ergeben werden. Ausführlicher ging Prof. Linde in seiner Abhandlung »Theorie der Kälteerzeugungsmaschinen, graphische Darstellung der Leistungsverhältnisse derselben«, auf die Frage ein (Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleisses 1875. S. 365). Weiter benutzte dann Prof. Schröter die Methode in seiner Arbeit »Ueber die Anwendung von Regeneratoren bei Heissluftmaschinen« (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1883. Bd. 27. p. 449) und endlich hat in neuerer Zeit Prof. Herrmann, »Zur graphischen Behandlung der mechanischen Wärmetheorie« (Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1884. Bd. 28) die Untersuchung insbesondere für den Process der Dampfmaschinen durchgeführt, allerdings stillschweigend unter der Annahme, dass dieser Process in allen Theilen umkehrbar sei, was keineswegs der Fall ist.

Uebrigens hat auf ähnliche graphische Darstellungen schon F. W. Gibbs aufmerksam gemacht (On graphical Methods in the Thermodynamics of Fluids. — On Representation by Surfaces of the Thermodynamic Properties of Substances. Trans. Connecticut Academy. Vol. II. 1873). Sehr fruchtbar für allgemeinere Untersuchungen zeigte sich nach Gibbs die Betrachtung einer krummen Fläche, wenn die Grössen P, U und v als Coordinaten derselben betrachtet werden.

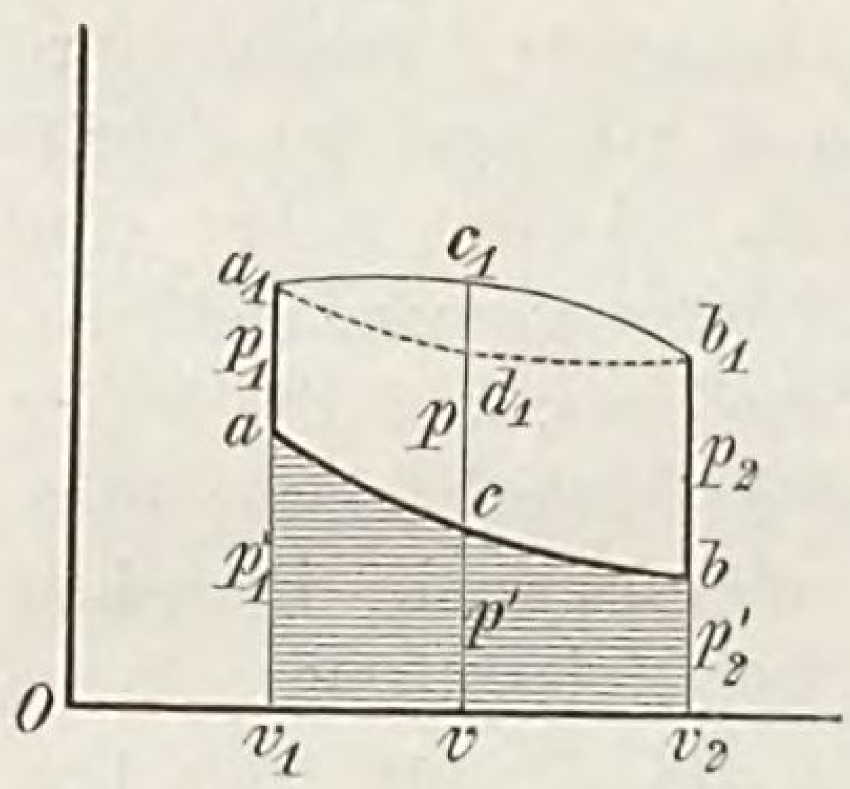
§ 15. Von den nicht umkehrbaren Processen.

Bis hierher ist bei allen Untersuchungen angenommen worden, dass beim Uebergange eines Körpers aus einem gewissen Anfangszustande (p_1, v_1) in den Endzustand (p_2, v_2) unter Mittheilung oder Entziehung von Wärme der äussere Druck dem Körperdruck auf dem ganzen Wege des Ueberganges gleich gehalten wurde und in diesem Falle war der Process rückgängig zu machen d. h. umkehrbar. Lässt man nun aber die Voraussetzung der Gleichheit der beiden Pressungen fallen, so erweitern sich die Untersuchungen; dabei werden aber auch eine Reihe von Sätzen, die im Obigen entwickelt wurden, hinfällig.

Es unterliegt nun keinen Schwierigkeiten, auch für den nicht umkehrbaren Process die entsprechenden Gleichungen aufzustellen.

Ist die Gewichtseinheit eines Körpers durch Volumen v_1 und p_1 gegeben, also in Fig. 16 durch den Punkt a_1, so ist für den Gleichgewichts- und Ruhezustand, der zunächst vorausgesetzt werden mag, auch der zugehörige Werth $U_1 = F(p_1, v_1)$ der innern Arbeit oder der Energie bekannt.

Fig. 16.



Wird jetzt plötzlich der äussere Druck auf den kleinern Werth p_1' gebracht, so expandirt der Körper, und wenn hierbei die Veränderlichkeit des äussern Druckes durch die Curve acb angegeben wird, so repräsentirt die von dieser Curve umschlossene Fläche (in der Figur schraffirt) die äussere Arbeit L bei der Ausdehnung von v_1 auf v_2.

In dem Augenblicke aber, in welchem bei Erreichung des Endvolumens v_2 eine weitere Ausdehnung verhindert wird, sowie auch während des ganzen Verlaufes des Ueberganges, liegt im Innern des Körpers offenbar eine Störung des Gleichgewichtes vor, die sich z. B. bei Gasen und Dämpfen durch offene, stürmische Bewegung manifestiren wird. Nach Unterbrechung der Ausdehnung wird sich dann aber allmählich der Gleichgewichts-

und Ruhezustand wieder einstellen, was offenbar mit einer Druckerhöhung von p_2' auf p_2 verbunden sein wird. Der schliessliche Gleichgewichtszustand, bei welchem dann auch der äussere Druck mit dem innern Druck p_2 identisch ist, wird daher (Fig. 16) durch den Punkt b_1 bestimmt sein und die entsprechende innere Arbeit wird durch die Formel $U_2 = F(p_2, v_2)$ zu ermitteln sein.

Es ist nun auch sogleich zu verstehen, dass man nicht einfach nur durch Druckverminderung von p_2 auf p_2' den Körper umgekehrt auf dem Wege bca wieder in den Anfangszustand zurückbringen kann und dass also hier eine einfache Umkehrung des Processes nicht möglich ist.

Wurde während des ganzen Vorganges dem Körper von aussen her die Wärmemenge Q' zugeführt, so besteht auch hier die Gleichung:

$$Q' = A(U_2 - U_1 + L'), \tag{51}$$

wobei aber die Werthe U_1 und U_2 den Gleichgewichtszuständen a_1 und b_1 entsprechen. Hätte man die Ausdehnung schon beim Volumen v (Fig. 16) abgebrochen, so würde hierbei beim Uebergange in den Gleichgewichtszustand der Druck von p' auf p gewachsen sein und dem Punkte c_1 (p, v) wird die innere Arbeit $U = F(p, v)$ entsprechen. Man ersieht hieraus, dass noch eine zweite Curve $a_1 c_1 b_1$ neben der Curve acb des äussern Druckes hervortritt. Ich werde die erstere Curve die »Gleichgewichtsdruckcurve« und die andere die »Arbeitsdruckcurve« nennen; beim nicht umkehrbaren Process sind die beiden Curven von einander zu unterscheiden, während beim umkehrbaren Process beide Curven identisch sind.

Wird der Process beim Volumen v abgebrochen, bezeichnet Q' die Wärmemenge, welche auf dem Wege ac zugeführt wurde und L' die durch die Fläche $v_1 acv$ repräsentirte äussere Arbeit, so ist

$$Q' = A(U - U_1 + L'). \tag{52}$$

Wäre der Process beim Volumen $v + dv$ abgebrochen worden, so würde sein

$$Q' + dQ' = A(U + dU - U_1 + L' + dL')$$

und hiernach durch Subtraction folgen

$$dQ' = A(dU + dL'),$$

oder weil $dL' = p'dv$ ist

$$dQ' = A(dU + p'dv) \tag{52a}$$

oder

$$dQ' = A(dF(p, v) + p'dv)\ . \tag{52b}$$

In den letzten beiden Gleichungen sind nun schon die Grundformeln für den nicht umkehrbaren Process gegeben.

Die Art der Wärmemittheilung ist bestimmt, sobald der Verlauf beider Druckcurven gegeben ist, und umgekehrt ist aus der Angabe des Gesetzes der Wärmezuführung und einer der Druckcurven die andere Druckcurve bestimmbar. Gewöhnlich handelt es sich um die Ermittlung der gesammten Wärmemenge Q', die für einen endlichen Uebergang erforderlich ist; dann braucht man den Verlauf der Gleichgewichtsdruckcurven nicht erst zu bestimmen, wenn nur Druck und Volumen im Anfange und am Ende für den Gleichgewichtszustand, p_1, v_1 und p_2, v_2, gegeben sind. In diesem Falle ist, wie in Gl. (51),

$$Q' = A\left(U_2 - U_1 + \int_{v_1}^{v_2} p'dv\right), \tag{53}$$

wobei natürlich der Verlauf der Arbeitsdruckcurve bekannt sein muss.

Neben diesem Verfahren zur Bestimmung der Wärmemenge Q' liegt noch ein anderes vor, welches zuerst von Clausius*) angegeben worden ist und von dem ich selbst bei Behandlung technischer Probleme mehrfach Gebrauch gemacht habe**).

Würde der Körper, statt auf dem nicht umkehrbaren Wege acb auf einem beliebigen umkehrbaren Wege $a_1 d_1 b_1$ aus dem Zustande a_1 in den Zustand b_1 (Fig. 16) gebracht worden sein und wäre hierzu die Wärmemenge Q_1 erforderlich gewesen und die äussere Arbeit L_1, welche durch die Fläche repräsentirt, die von der (punktirten) Curve $a_1 d_1 b_1$ umschlossen wird, gewonnen worden, so folgt die Gleichung:

*) Clausius, »Abhandlungen«. Anwendung der mechan. Wärmetheorie auf die Dampfmaschine. S. auch Poggendorff's Annalen 1856. Bd. 97.

**) »Ueber die Wirkung des Drosselns« u. s. w. Civilingenieur Bd. 21. 1875. »Calorimetrische Untersuchung der Dampfmaschinen«. Civilingenieur Bd. 27 und Bd. 28. 1881 und 1882.

$$Q_1 = A\,(U_2 - U_1 + L_1)\ .$$

Denkt man nun an einen Kreisprocess, dessen erster Theil auf dem nicht umkehrbaren Wege acb und dann rückwärts auf dem beliebigen umkehrbaren Wege $b_1 d_1 a_1$ stattfand, so ist in vorstehender Gleichung Q_1 negativ, und ihre Verbindung mit Gl. (51) ergiebt

$$Q' - Q_1 = A\,(L' - L_1)$$

oder

$$Q' = Q_1 - A\,(L_1 - L')\ ,$$

und aus dieser Formel berechnet sich ebenfalls die Wärmemenge Q', welche dem nicht umkehrbaren Theile des Processes entspricht, wenn man nur die diesem Theile entsprechende Arbeit L' kennt. Die Differenz $L_1 - L' = L$ entspricht der bei diesem Kreisprocesse aufgewandten äussern Arbeit und die Differenz $Q_1 - Q'$ ist die hierbei verbrauchte Wärme; ein Blick auf die letzte Gleichung ergiebt daher das Resultat, dass, genau wie bei einem vollständig umkehrbaren Kreisprocesse, auch bei einem solchen, der nicht umkehrbare Theile enthält, die erzeugte Wärmemenge der aufgewandten Arbeit entspricht. Bedeutet daher bei irgend einem Kreisprocesse $\Sigma(Q)$ die algebraische Summe der zu- und abgeleiteten Wärmemengen und $\Sigma(L)$ die algebraische Summe der einzelnen (gewonnenen und aufgewandten) Arbeitsquantitäten, so gilt die Gleichung

$$\Sigma(Q) = A\,\Sigma(L) \qquad (54)$$

ganz allgemein, auch wenn in dem betreffenden Kreisprocesse einzelne nicht umkehrbare Theile vorkommen.

§ 16. Ueber die Abbildung des nicht umkehrbaren Processes.

Geht der Körper aus dem Gleichgewichtszustande a_1 (Fig. 17 a) a. f. S. auf dem nicht umkehrbarem Wege acb in den Gleichgewichtszustand b_1 über, so lassen sich nach früheren Sätzen die beiden Punkte in Fig. 17b leicht abbilden. Man trage für a_1 als Abscisse den Werth OP_1 gleich

$$P_1 = \int \frac{dQ}{AS} = \varphi\,(p_1, v_1)$$

und als Ordinate $P_1 a_1$ den Werth

$$S_1 = f(p_1, v_1)$$

auf und ebenso für den Punkt b_1

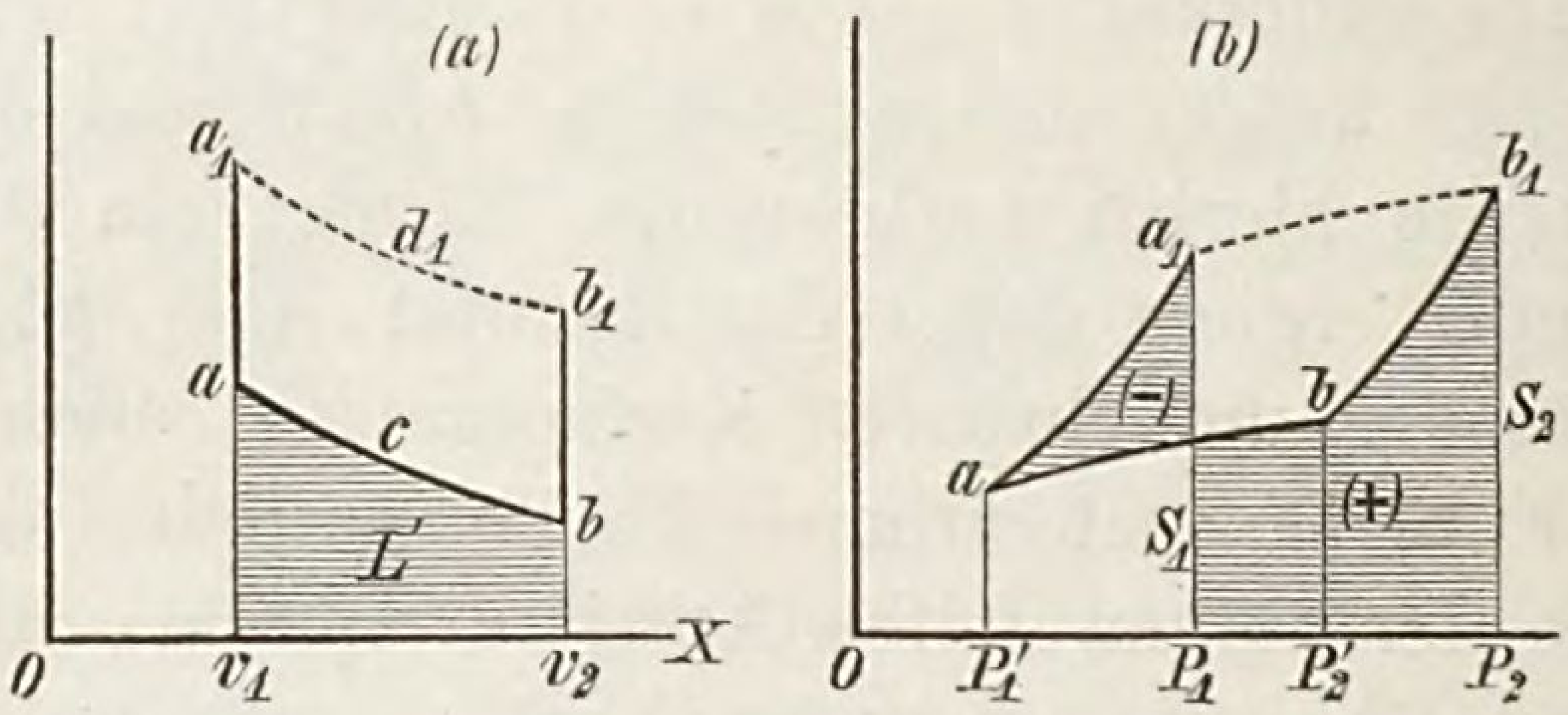
$$P_2 = \varphi(p_2, v_2) \text{ und } S_2 = f(p_2, v_2).$$

Für den nicht umkehrbaren Process sei wieder Q' die mitzutheilende Wärmemenge und L' die äussere Arbeit.

Man kann nun aber von a_1 nach b_1 auch auf umkehrbarem Wege auf denselben Curvenstrecken hinübergehen.

Man denke sich erst den Körper bei constantem Volumen v_1 von a_1 nach a gebracht (Fig. 17a), dann umkehrbar auf dem Wege acb nach b und endlich bei constantem Volumen v_2 von

Fig. 17.



b nach b_1; die drei Curvenstrecken erscheinen in Fig. 17b abgebildet, indem man für jeden einzelnen Punkt die Grössen $P = \varphi(p, v)$ und $S = f(p, v)$ berechnet und als Abscisse und Ordinate aufgetragen denkt. Nach den oben entwickelten Sätzen ist nun die Wärmemenge Q_1, welche auf dem Wege $a_1 a$ abzuleiten war, durch die Fläche $P_1' a a_1 P_1$ (Fig. 17b) in Arbeitseinheiten gemessen dargestellt. Ebenso geben die Flächen $P_1' a b P_2'$ und $P_2' b b_1 P_2$ die Wärmemengen Q_2 und Q_3 (in Arbeit gemessen), welche auf den Wegen acb und bb_1 mitzutheilen waren.

Die ganze schraffirte Fläche (Fig. 17b) repräsentirt daher den Werth

$$\frac{Q_2 + Q_3 - Q_1}{A},$$

wobei aber der eine Theil der Fläche als positiv, der andere Theil als negativ hervortritt; die planimetrische Bestimmung der Fläche giebt ohne Weiteres die Differenz und damit den Werth des vorstehenden Ausdruckes.

Wird nun zum Ausgangspunkte der Betrachtung zurückge-

kehrt und angenommen, der Körper ginge auf dem nicht umkehrbaren Wege von a_1 nach b_1 über, so lässt er sich jetzt auf dem umkehrbaren Wege $b_1 b c a a_1$ wieder in den Anfangszustand zurückbringen.

Beim Hingange wurde die Wärmemenge Q' zugeführt, beim Rückgange war die Wärmemenge $Q_2 + Q_3 - Q_1$ abzuführen; da nun aber beim Hingange die gleiche Arbeit L' gewonnen wurde, die beim Rückgange wieder aufzuwenden war, so ist in Gl. (54) $\Sigma(L) = o$ und man erhält

$$\Sigma(Q) = 0$$

oder

$$Q' - (Q_2 + Q_3 - Q_1) = 0$$

das ist:

$$\frac{Q'}{A} = \frac{Q_2 + Q_3 - Q_1}{A}, \tag{55}$$

wonach also die schraffirte Fläche in Fig. 17b ohne Weiteres die in Arbeit gemessene Wärmemenge Q' darstellt, welche bei diesem nicht umkehrbaren Uebergange von a_1 nach b_1 verbraucht worden ist.

Geht man (Fig. 17a) auf dem beliebigen umkehrbaren Wege $b_1 d_1 a_1$ in den Anfangszustand zurück, so umschliesst die Abbildung $b_1 d_1 a_1$ (Fig. 17b) eine Fläche $P_1 a_1 b_1 P_2$, welche die hierbei abzuleitende Wärmemenge (in Arbeit gemessen) darstellt und wenn man sich diese (negativ zu nehmende) Fläche mit dem schraffirten Theile vereinigt denkt, so bleibt die von dem Curvenviereck $a_1 b_1 b a$ umschlossene Fläche übrig, welche demnach die bei diesem nicht umkehrbaren Kreisprocesse erzeugte Wärmemenge repräsentirt; da aber diese Fläche dem Inhalte nach auch der Fläche $a_1 b_1 b a$ in Fig. 17a entspricht, welche die aufgewandte Arbeit darstellt, so folgt auch hieraus der Clausius'sche Satz, welcher bei Aufstellung von Gl. (54) besprochen wurde.

§ 17. Das Wärmegewicht beim nicht umkehrbaren Process.

Bei dem nicht umkehrbaren Process (Fig. 16, S. 72) ergab sich nach Gl. (52) das Element der zuzuführenden Wärme

$$dQ' = A(dU + p'dv),$$

wobei $U = F(p, v)$ für den Punkt c_1 der zugehörigen Gleichgewichtsdruckcurve giltig ist. Hätte dagegen der Uebergang des Körpers auf der Gleichgewichtsdruckcurve $a_1 c_1 b_1$, also auf umkehrbarem Wege stattgefunden, so wäre im Punkte c_1 für die Ausdehnung um dv die Wärmemenge dQ erforderlich gewesen, für welche sich ergiebt:

$$dQ = A(dU + pdv).$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so ergiebt sich

$$dQ' = dQ - A(p - p')\,dv,$$

und wird dieser Ausdruck auf beiden Seiten mit AS dividirt, wobei $S = f(p, v)$ dem Punkte c_1 der Gleichgewichtsdruckcurve entspricht, so erhält man

$$\frac{dQ'}{AS} = \frac{dQ}{AS} - \frac{(p - p')\,dv}{S}. \tag{56}$$

Der erste Werth auf der rechten Seite ist unter allen Umständen ein vollständiges Differential, dessen Integral oben mit $\varphi(p, v)$ bezeichnet und das Wärmegewicht genannt wurde. Da nun aber der Verlauf der beiden Curven acb und $a_1 c_1 b_1$, der Arbeits- und der Gleichgewichts-Druckcurve, als gegeben angesehen wird, so ist auch das zweite Glied der rechten Seite vorstehender Gleichung integrabel.

Bezeichnet man das letztere Integral für den Uebergang von a_1 nach b_1 mit N, setzt man also

$$N = \int \frac{(p - p')\,dv}{S}, \tag{57}$$

so folgt:

$$\int \frac{dQ'}{AS} = \int \frac{dQ}{AS} - N,$$

oder nach der auf S. 40 benutzten Bezeichnung

$$\int \frac{dQ'}{AS} = P_2 - P_1 - N.$$

Führt man jetzt den Körper auf irgend einem Wege $b_1 d_1 a_1$ (Fig. 16) in den Anfangszustand zurück, so wäre $P_2 = P_1$ also

$$\int\frac{dQ}{AS} = 0\,, \tag{58}$$

demnach folgt für den nicht umkehrbaren Kreisprocess, der Rückgang, — welcher bei der Compression immer umkehrbar ist, — mag erfolgen wie er will:

$$\int\frac{dQ'}{AS} = -N\,, \tag{59}$$

während für einen Kreisprocess, der in allen Theilen umkehrbar ist, die Gl. (58) gilt.

Diese letztern Sätze rühren ebenfalls von Clausius her; nur in der Art der Entwickelung ist hier ein anderer Weg eingeschlagen worden, der zugleich für den Werth N durch Gl. (57) wenigstens für diejenigen nicht umkehrbaren Processe eine bestimmte und übersichtliche Bedeutung hat hervortreten lassen, auf welche man zunächst geführt wird.

Bei den vorstehenden Untersuchungen wurde sowohl für den nicht umkehrbaren Process, wie für den nicht umkehrbaren Kreisprocess der einfachste und am nächsten liegende Fall behandelt, die gewonnenen Sätze werden aber für die weiter folgenden Untersuchungen auch die Grundlagen geben für die Verfolgung anderer nicht umkehrbarer Processe, wie sie im Besonderen bei der nähern Betrachtung der Vorgänge in den calorischen Maschinen hervortreten.

ZWEITER ABSCHNITT.

Lehre von den Gasen.

§ 18. Vorbemerkungen.

Als »Gase« oder auch als »permanente Gase« bezeichnete man bis in die neueste Zeit diejenigen Luftarten, die nur im luftförmigen Zustande bekannt waren, die durch kein Mittel, wie beispielsweise durch starke Compression und gleichzeitige Abkühlung in den flüssigen Zustand übergeführt werden konnten, und von denen man daher auch annehmen musste, dass sie nicht als aus flüssigen bez. festen Körpern durch »Verdampfen« hervorgegangen betrachtet werden dürften. Längst aber und wiederholt ist ausgesprochen worden, dass höchst wahrscheinlich sogenannte permanente Gase nicht existiren und dass es eben nur die Unzulänglichkeit der Mittel sei (ungewöhnlich starke Temperaturerniedrigungen zu erzeugen), welche die Zurückführung solcher Gase in den flüssigen Zustand als unmöglich erscheinen liess. Diese Ansicht hat in neuerer Zeit die glänzendste Bestätigung durch die schönen Versuche von Raoul Pictet, Cailletet und v. Wroblewski gefunden, denen es gelungen ist, selbst diejenigen Gase zu verflüssigen, die man bis dahin als Hauptrepräsentanten der permanenten Gase anzusehen gewöhnt war.

Unter solchen Umständen erscheint es auf den ersten Blick an der Zeit zu sein, diese Unterscheidung nunmehr fallen zu lassen und alle Luftarten ohne Ausnahme als »Dämpfe« zu bezeichnen, also anzunehmen, dass die Luftarten sämmtlich verflüssigt werden können oder, in erweiterter Betrachtung, dass überhaupt alle Körper, auch solche, welche uns nur im festen Zustande bekannt sind, in den gasförmigen Zustand übergehen können, sofern sie dabei nicht chemische Veränderungen erleiden.

Führt man einem festen Körper, z. B. einem Stücke Eis, unter unveränderlichem Drucke Wärme zu, so wird das Eis bei einer bestimmten Temperatur allmählich in den flüssigen Zustand übergehen (das Schmelzen), bis alles Eis zu Wasser geworden ist; bei weiterer Wärmezuführung, immer unter demselben Drucke gedacht, also unter der Voraussetzung entsprechender Volumenänderung, beginnt dann das Verdampfen, bis endlich alles Wasser in Dampf, in den luftförmigen Zustand, übergeführt ist. Setzt man jetzt unter gleichen Voraussetzungen die Wärmezuführung weiter fort, so zeigt dieser Dampf, der als »überhitzter Wasserdampf« bezeichnet wird, endlich Eigenschaften, die denen nahe stehen, welche bisher als den permanenten Gasen eigenthümlich angesehen wurden.

Es lag daher der Schluss nahe, dass die permanenten Gase nichts anderes als »hoch überhitzte Dämpfe« seien und dass hierbei an einen gewissen Grenzzustand gedacht werden dürfe, bei dem die Uebereinstimmung vollständig erreicht sei und bei welchem das bekannte Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac, welches übrigens noch weitere Besprechung finden wird, befolgt werde.

Diesen Grenzzustand bezeichnete man als denjenigen, bei welchem das ideal vollkommene Gas vorliege und unterschied ihn von dem andern Grenzzustande, bei welchem der Dampf noch mit der Flüssigkeit (also hier dem Wasser) in Berührung steht, aus der er gebildet wird. In diesem letztern Zustande, dem sogenannten »Sättigungszustande«, zeigt der Dampf die besondere Eigenschaft, dass bei constantem Drucke trotz der Wärmezuführung und der entsprechenden Ausdehnung der Gesammtmasse die Temperatur constant bleibt, so lange überhaupt noch Flüssigkeit vorhanden ist; erst nach der Verdampfung des letzten Flüssigkeitselementes beginnt die weitere Temperaturerhöhung, bis endlich der ideale Gaszustand erreicht ist.

Auch beim Uebergange aus dem festen in den flüssigen Zustand liegen ähnliche Verhältnisse vor; so lange, den angenommenen Fall beibehalten, neben Wasser während der Schmelzperiode noch Eis vorhanden ist, bleibt, constanten Druck und die Möglichkeit entsprechender Volumveränderung vorausgesetzt, die Temperatur auch constant und erst nach dem Uebergange des letzten Eiselementes in Wasser beginnt bei fortgesetzter Wärme-

zuführung die Temperaturerhöhung bis zu jenem Punkte, wo nun das Verdampfen eintritt und von jetzt an die Verhältnisse sich so gestalten, wie es vorhin besprochen worden ist.

Die Definition eines Gases als hoch überhitzter Dampf oder als Dampf, der weit von seinem Condensationspunkte entfernt liegt, ist aber keineswegs so bestimmt, als es auf den ersten Augenblick erscheint.

Wird nämlich irgend einem Dampfe, abgeschlossen von seiner Flüssigkeit, also in dem Zustande, in dem man ihn als überhitzt bezeichnet, fortwährend Wärme weiter zugeführt, so tritt von einer bestimmten Temperatur an mit ihm eine neue und bedeutsame Aenderung ein, die man als »Dissociation« bezeichnet und die als eine chemische Zustandsänderung, als Zersetzung, Zerlegung oder Zerfällung des Dampfes in seine Bestandtheile angesehen werden kann; und diese Bestandtheile können wiederum Dämpfe zusammengesetzter Art sein, oder auch die elementaren Bestandtheile des zerlegten Dampfes. So zersetzt sich Wasserdampf in seine Bestandtheile Wasserstoff und Sauerstoff; die Bildung des sogenannten Wassergases, wenn man Wasserdampf durch glühende Kohlen streichen lässt, findet ja für Heizzwecke bereits ausgedehnte Verwendung, und die allgemeine Benutzung desselben für Beleuchtungszwecke ist wohl nur noch eine Frage der Zeit.

So erscheint denn die Dissociation als ein dem Schmelzen und dem Verdampfen analoger Vorgang. Wird wieder als Beispiel das Eis herangezogen, und denkt man sich dasselbe bei einer Temperatur unter 0° Celsius und der Einfachheit wegen in allen Stadien seiner unter Wärmezuführung stattfindenden Zustandsänderungen unter atmosphärischem Drucke stehend, so beginnt das Schmelzen bei 0° C. und diese Temperatur erhält sich bis zur Vollendung der Schmelzung; nun beginnt die weitere Temperaturerhöhung bis 100° C. beim Eintritt des Verdampfens; diese Temperatur erhält sich wieder auf constanter Höhe bis zur Verdampfung des letzten Wasserelementes und nun beginnt die weitere Temperaturerhöhung bis zum Eintritt der Dissociation. Ob nun hier vom Anfange bis zum Ende der Dissociation unter der gemachten Voraussetzung (constanter atmosphärischer Druck) die Temperatur ebenfalls stationär bleibt, ist noch unentschieden; das Schmelzen und Verdampfen ist ein rein physikalischer Vor-

gang, die Dissociation zugleich ein chemischer und daher ist wohl möglich, dass nach den zur Zeit herrschenden Ansichten der ganze Verlauf der Dissociation unter zunehmender Temperatur erfolgt, zweifellos wird aber das Gesetz der Temperaturänderung unter Voraussetzung der Zuführung gleicher Wärmemengen hierbei ein anderes sein, wie vor dem Eintritte und dann wieder nach Vollendung der Dissociation.

In ähnlicher Weise werden auch die Volumenänderungen während, wie vor und nach der Dissociation verschiedenen Gesetzen unterworfen sein, wie dieses während, vor und nach dem Verdampfen resp. Schmelzen der Fall ist.

Bezüglich des Vorganges der Dissociation fehlt es noch vollständig an entsprechenden Versuchen, nur soviel lässt sich erwarten, dass im Allgemeinen während der Dissociation unter sonst gleichen Umständen die Volumenzunahme (bei constantem Drucke) in stärkerem Maasse erfolgen wird, wie vor dem Eintritt derselben.

Was bis jetzt unter regelmässigem Hinweis auf das Wasser in seinen verschiedenen Aggregatzuständen besprochen wurde, gilt auch für eine ganze Reihe anderer Körper; doch kommen auch Körper vor, bei denen gewisse Zwischenstufen der betrachteten Zustandsänderungen wegfallen. So gehen einzelne Körper direct, ohne vorhergehende Schmelzung, aus dem festen in den dampfförmigen Zustand über, während bei gewissen Körpern, wie beim Kohlenstoff, wohl nicht einmal die Zwischenstufe des Verdampfens, sondern die sofortige Dissociation vorliegt.

Ueber die Dissociationstemperatur, oder vielleicht richtiger gesagt, über die Temperatur beim Beginn der Dissociation, liegen bis jetzt nur sehr wenig Beobachtungen vor, es darf aber wohl als wahrscheinlich hingestellt werden, dass gewisse Luftarten schon bei verhältnissmässig niedriger Temperatur, also beispielsweise bei mittlerer atmosphärischer Temperatur, ganz oder theilweise dissociirt sein können, im letztern Falle also aus einem Gasgemisch, statt aus einem Gase von durchweg gleicher chemischer Beschaffenheit bestehen; es lassen sich jedoch Gründe dafür geltend machen, dass bei denjenigen Dampfarten, die in der Folge speciell als Gase aufgeführt werden, wenn auch vielleicht nur unter Voraussetzung verhältnissmässig enger Temperaturgrenzen, eine partielle Dissociation nicht vorliegt.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen soll nun im Folgenden als Gas kurzweg ein überhitzter Dampf vor dem Eintritt der Dissociation innerhalb derjenigen Strecke seiner Zustandsänderung bezeichnet werden, auf welcher er dem noch näher zu besprechenden Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetz genügt. Durch den letzten Zusatz wird dann zugleich angedeutet, dass auch Dampfarten existiren können, die in keinem Punkte ihrer Zustandsänderungen in dem angegebenen Sinne als Gase behandelt werden dürfen, es sei denn erst nach vollständiger Dissociation derselben, in welchem Falle aber der Dampf nicht mehr in der ursprünglichen chemischen Verbindung vorliegt.

Für die Thermodynamik ist der Nachweis, dass Gase nach der gegebenen Definition derselben wirklich existiren, von der höchsten Bedeutung, denn nur unter der Annahme der Existenz von Gasen ist man im Stande, die Form und Bedeutung der Temperaturfunction abzuleiten, die oben in § 12 S. 59 als »Carnot'sche Function« bezeichnet wurde. Bis jetzt ist es noch nicht gelungen, auf die Form dieser Function, die, wie bewiesen wurde, für alle Körper ohne Ausnahme die gleiche ist, einen Schluss zu ziehen aus dem physikalischen Verhalten der festen, flüssigen oder dampfförmigen Körper im Allgemeinen.

In der That kennt man nun mehrere Gasarten und Mischungen von solchen, zu welch' letzteren die atmosphärische Luft gehört, die der gegebenen Definition entsprechen, und daher ist es vollständig gerechtfertigt, in der Thermodynamik Gase und Dämpfe zu unterscheiden, umsomehr als die Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie, auf Gase in Anwendung gebracht, in einfacherer und übersichtlicherer Gestalt hervortreten, als dies bei Dämpfen der Fall ist.

§ 19. Zustandsgleichung der Gase.

Die Zustandsgleichung eines Gases (§ 12 S. 58) drückt die Beziehung aus zwischen dem Volumen v (der Gewichtseinheit), dem Drucke p und der Temperatur t (nach Celsius) und wird in der Physik als mathematischer Ausdruck der vereinigten Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac gegeben.

Nach Mariotte oder Boyle ändert sich der Druck eines Gases, wenn dasselbe bei constanter Temperatur expandirt

oder bei solcher comprimirt wird, dem Volumen umgekehrt proportional, so dass also das Product pv constant bleibt.

Ist der Anfangszustand durch p_1 und v_1 gegeben, so besteht demnach nach Mariotte die Beziehung:

$$pv = p_1 v_1, \tag{1}$$

welche die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel repräsentirt, wenn v als Abscisse und p als Ordinate aufgetragen wird; und da hierbei die Temperatur als constant vorausgesetzt wurde, so ist im vorstehenden Ausdrucke zugleich die Gleichung der durch den Punkt (p_1, v_1) hindurchgehenden »isothermischen Curve« (§ 6 S. 36) speciell für Gase gegeben.

Das andere Gesetz, das von Gay-Lussac, spricht aus, dass bei der Erwärmung eines Gases die Volumenzunahme der Temperaturzunahme proportional ist, wenn die Ausdehnung des Gases bei constantem Drucke erfolgt.

Bezeichnet α die Ausdehnung der Volumeneinheit eines Gases unter der gemachten Voraussetzung, so ist αt die Volumenvergrösserung bei der Erwärmung von 0° C. auf t°; und wenn das Gasvolumen bei 0° mit v_0 und bei t° mit v bezeichnet wird, so folgt

$$v = v_0 (1 + \alpha t)$$

und ebenso das Volumen v_1 bei der Temperatur t_1

$$v_1 = v_0 (1 + \alpha t_1) .$$

Durch Division folgt dann als Ausdruck für das Gay-Lussac'sche Gesetz, gültig für beliebigen, aber constanten Druck,

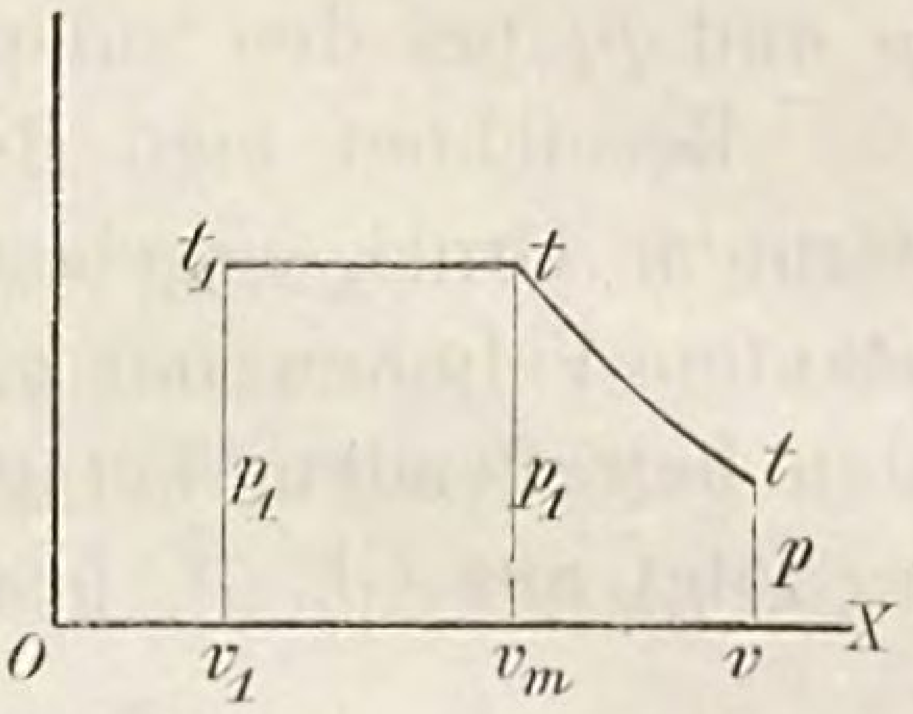
$$\frac{v}{v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1} .$$

Den Werth α bezeichnet man als den Ausdehnungscoefficienten des Gases; dividirt man Zähler und Nenner des vorstehenden Ausdruckes rechts mit α und bezeichnet man den reciproken Werth von α mit a, so folgt auch

$$\frac{v}{v_1} = \frac{a + t}{a + t_1} . \tag{2}$$

Ist der Anfangszustand der Gewichtseinheit eines Gases durch die Grössen $v_1 p_1 t_1$ gegeben (Fig. 18) und dehnt sich dasselbe bei constantem Druck p_1 unter Zuführung von Wärme von v_1 auf v_m aus, so gilt nach Gl. (2) die Beziehung:

Fig. 18.



$$\frac{v_m}{v_1} = \frac{a + t}{a + t_1} .$$

Lässt man jetzt das Gas bei constanter Temperatur t weiter von v_m auf v expandiren (was ebenfalls entsprechende Wärmezufuhr fordert), so sinkt der Druck von p_1 auf p, und es besteht nach Gl. (1) die Beziehung

$$p v = p_1 v_m .$$

Wird aus den beiden letzten Ausdrücken das Zwischenvolumen v_m eliminirt, so findet sich:

$$\frac{p v}{a + t} = \frac{p_1 v_1}{a + t_1} . \tag{3}$$

Wäre der Werth a durch Versuche bestimmt und hätte man für ein bestimmtes Gas bei bekannter Temperatur t_1 und dem bekannten Drucke p_1 das Volumen v_1 beobachtet, so liesse sich der Ausdruck der rechten Seite vorstehender Gleichung berechnen; wird der Werth dieses Ausdruckes mit B bezeichnet, so schreibt sich dann die Gleichung in der einfachen Form

$$p v = B (a + t) , \tag{3a}$$

und das ist die Zustandsgleichung der Gase, die zugleich in einfachster Form die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac zum Ausdruck bringt. Die vorstehende Form der Zustandsgleichung ist zuerst von Clapeyron benutzt worden.

Was nun die Constanten a und B der Zustandsgleichung der Gase betrifft, so möge zunächst die erstere Constante a näher besprochen werden.

Berechnet man aus Gl. (3) den Werth a, so findet sich:

$$a = \frac{p_1 v_1 t - p v t_1}{p v - p_1 v_1} . \tag{4}$$

Die hierüber vorliegenden Versuche sind nun in zweifacher Art ausgeführt worden; man hat entweder den Druck constant erhalten und die Volumina bei den Temperaturen t und t_1 beobachtet oder das Volumen constant gehalten und die Spannungen p und p_1 bei den entsprechenden Temperaturen ermittelt.

Bezeichnet man den Werth von a, den Versuche bei constantem Druck ergeben, mit a_p und denselben Werth bei constantem Volumen mit a_v (der Index p oder v deutet an, dass bei den betreffenden Versuchen die bezeichnete Grösse constant ist), so folgt aus Gl. (4) bez. für $p = p_1$ und $v = v_1$

$$a_p = \frac{v_1 t - v t_1}{v - v_1} \quad \text{und} \quad a_v = \frac{p_1 t - p t_1}{p - p_1}. \tag{5}$$

Denkt man in beiden Fällen an eine unendlich kleine Temperaturerhöhung dt, so ergiebt sich, wie leicht zu übersehen ist:

$$a_p = v \frac{\partial t}{\partial v} - t \quad \text{und} \quad a_v = p \frac{\partial t}{\partial p} - t. \tag{6}$$

Unter der Voraussetzung der vollen Richtigkeit der Zustandsgleichung müssten nun beide Versuchsmethoden für a_p und a_v auf ein und denselben Werth a führen, was nicht der Fall ist; man hat daher zu schliessen, dass die obige Zustandsgleichung nur als eine Näherungsformel anzusehen ist. Nun giebt es allerdings Luftarten, bei denen die Abweichungen so geringfügig sind, dass man unbedenklich die Gleichung als streng richtig ansehen darf, und diese Luftarten sind es denn eben, die im Weiteren nach den bereits in § 18 S. 87 gemachten Bemerkungen als Gase speciell bezeichnet werden sollen. Zu denselben gehört auch die atmosphärische Luft, die wir ihrer hohen technischen Wichtigkeit wegen auch jederzeit voranstellen werden, wenngleich dieselbe kein einfaches Gas, sondern eine Mischung zweier Gase, von Sauerstoff und Stickstoff, ist. Auch andre mechanische Mischungen von einfachen Gasen, wie Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, sowie von den chemisch zusammengesetzten Gasen Stickoxydgas und Kohlenoxydgas, die, wie schon hier bemerkt werden kann, die geringfügigsten Abweichungen zeigen, werden als dem Gesetze unterworfen angesehen werden können.

Nach den Versuchen von Regnault*) ergaben sich für An-

*) V. Regnault, Relation des expériences pour déterminer les princi-

fangspressungen, die wenig von atmosphärischem Druck abwichen, und für die Temperaturgrenzen von 0° bis 100° C. nach entsprechender Umrechnung der Regnault'schen Angaben*) für die Grössen a_p und a_v die folgenden Werthe:

	a_p	a_v
Atmosphärische Luft	272.48	272.85
Wasserstoff	273.15	272.70
Stickstoff	—	272.63
Kohlenoxyd	272.52	272.70
Kohlensäure	269.54	271.15
Stickstoffoxydul	268.89	272.03

(Für Sauerstoff wäre nach Jolly's Angaben a_v = 272.18 anzunehmen.)

Die Zahlenwerthe zeigen, dass mit Ausnahme des Wasserstoffes bei allen Gasen die Werthe a_v grösser als die Werthe a_p sind, dass bei den vorangestellten Gasen der Unterschied aber geringfügig ist; nur bei Kohlensäure und Stickstoffoxydul sind die Unterschiede beträchtlicher; das sind aber auch Luftarten, die ihrem Condensationspunkte weit näher stehen und daher nicht als Gasarten bezeichnet werden sollen. Bei einer andern Versuchsreihe beobachtete Regnault**) auch die Volumenänderung der im nachfolgenden genannten Luftarten bei verschiedenem, gleichbleibendem Druck; die Pressungen, in Millimeter Quecksilbersäule gemessen, ergeben folgende Werthe für a_p:

pales lois et les données numériques qui entrent dans le calcul des machines à vapeur. Paris.

Dieses dreibändige classische Werk, von welchem der erste Band 1847, der zweite 1862 und der dritte Band 1870 erschien, enthält die Resultate der zahllosen, bewunderungswürdigen Versuche Regnault's. Für die Entwickelung der Thermodynamik, gerade auch in technischer Richtung, sind die Arbeiten Regnault's von ganz unschätzbarem Werthe. — Henri Victor Regnault, geb. 21. Juli 1810 in Aachen, gestorben 19. Januar 1878 in Auteuil.

Das Werk wird im weiteren Verlaufe des vorliegenden Buches so oft citirt werden müssen, dass dasselbe einfach durch Rel., der betreffende Band durch römische, die Seitenzahl durch arabische Ziffer bezeichnet werden soll.

*) Rel. I. 91.

**) Rel. I. 115. 116. 117.

	Druck	Werth von a_p
Atmosphärische Luft	760	272.43
	2525	270.68
	2620	270.53
Wasserstoff	760	273.13
	2545	273.10
Kohlensäure	760	269.55
	2520	260.04

Man erkennt hieraus wieder das abweichende Verhalten der Kohlensäure, ferner dass bei grösserem Druck der Werth a_p kleiner erscheint.

Weitere Untersuchungen Regnault's beziehen sich auf atmosphärische Luft und Kohlensäure; für verschiedene Anfangspressungen bei 0° C. wurde unter constantem Volumen die Endpressung bei 100° C. beobachtet. Nach der zweiten der Gln. (5) berechnen sich aus Regnault's Angaben die Werthe von a_v der folgenden Zusammenstellungen:

Atmosphärische Luft*).

Druck bei 0° mm	Druck bei 100° mm	Werth von a_v
109.72	149.31	274.11
174.36	237.17	273.87
266.06	395.07	273.65
374.67	510.35	273.32
375.23	510.97	273.43
760.00	—	272.85
1678.40	2286.09	272.03
1692.53	2306.23	271.96
2144.18	2924.04	271.05
3655.56	4992.09	269.61

Kohlensäure**).

Druck bei 0°	Druck bei 100°	Werth von a_v
758.47	1034.54	271.33
901.09	1230.37	270.68
1742.73	2387.72	266.50
3589.07	4759.03	259.08

*) Rel. I. 110.
**) Rel. I. 112.

Man erkennt aus diesen Versuchsreihen, dass mit wachsendem Anfangsdruck bei gleichen Grenztemperaturen der Werth a_v abnimmt, wie dies auch in der vorhergehenden Zusammenstellung bei dem Werthe a_p hervortrat. Je grösser nun aber bei gleicher Temperatur der Druck ist, um so dichter ist das Gas, um so mehr werden die Gasmoleküle einander näher gerückt worden sein; da nun die Moleküle mit gewissen Kräften, die ohne Zweifel mit abnehmender Entfernung rasch wachsen, auf einander einwirken, so liegt der Gedanke nahe, diesem Umstande die Abweichungen zuzuschreiben, welche die Gase in ihrem Verhalten gegenüber den Voraussetzungen zeigen, welche der Ableitung der obigen Zustandsgleichung (3a) zu Grunde gelegt wurden. Man schliesst weiter, dass diese Abweichungen um so mehr verringert werden, je grösser die Verdünnung des Gases wird, und dass endlich ein Zustand angenommen werden könne, bei welchem die Moleküle gänzlich aus den Wirkungssphären ihrer gegenseitigen Anziehung herausgetreten sind, oder richtiger gesagt, bei welchem diese Kräfte bei weiteren Zustandsänderungen des Gases als verschwindend klein angesehen werden dürfen; in diesem Sinne spricht man von einem idealen Gase und für ein solches müsste dann der Unterschied, den die Versuche für die Grössen a_p und a_v ergeben, verschwinden und beide Werthe müssten sich bei allen Gasen ein und demselben fest bestimmten Werthe a nähern, der in der Zustandsgleichung eingeführt worden ist.

Betrachtet man unter Ausscheidung der für Kohlensäure und Stickstoffoxydul angegebenen Werthe zunächst die ersten beiden der vier oben gegebenen Zusammenstellungen der Regnault'schen Versuchsergebnisse, so zeigt sich, dass bei atmosphärischer Luft, bei Wasserstoff und Kohlenoxyd die Differenzen zwischen a_p und a_v nur sehr geringe sind und beachtet man weiter, dass unter allen Luftarten unter gleichen Verhältnissen das Wasserstoffgas die geringste Dichtigkeit hat und für dasselbe die beiden Werthe von a_p und a_v am wenigsten von einander abweichen und beide nahezu den Werth 273 anzeigen, so erscheint es durchaus gerechtfertigt, dass man fast allgemein diesen Werth als Grenzwerth angenommen hat. Die dritte der obigen Zusammenstellungen zeigt allerdings, dass nach Regnault für atmosphärische Luft unter der geringsten Pressung, die in seinen Versuchen vorkam, der Werth a_v sogar noch etwas grösser als 274 sich heraus-

stellt, was einzelne Schriftsteller veranlasst hat, diesen Werth als Grenzwerth anzunehmen. Der Umstand aber, dass der erstere Grenzwerth allgemeinere Annahme gefunden hat, ferner, dass die Annahme des einen oder andern Grenzwerthes nur sehr geringfügige Abweichungen in den Rechnungsresultaten zeigt, die bei technischen Untersuchungen gänzlich, bei feineren physikalischen Erörterungen sicher in den meisten Fällen unbeachtet bleiben können, ist der Grund, wesswegen bei allen weiteren Untersuchungen der Grenzwerth

$$a = 273$$

festgehalten wird, wie dies auch insbesondere von Clausius in allen seinen Arbeiten geschehen ist.

Setzt man den Grenzwerth in die Zustandsgleichung (3a) ein, so folgt

$$pv = B(273 + t)$$

und daraus ist ersichtlich, dass ein neuer Nullpunkt der Thermometerscala gewonnen wird, der gewissermaassen von der Natur selbst vorgeschrieben ist. Während der Gefrierpunkt des Wassers bei atmosphärischem Drucke als Ausgangspunkt zur Messung der Temperatur t nach Celsius dient, kann der Punkt der Thermometerscala, der um 273° C. unter dem Gefrierpunkt liegt, in gleicher Weise als Ausgangspunkt für Temperaturmessung benutzt werden; man nennt diesen Punkt den absoluten Nullpunkt und die entsprechende Temperatur $a + t = 273 + t$ die absolute Temperatur des betreffenden Körpers.

Die Zustandsgleichung (3a) setzt voraus, dass sich das Volumen v auf die Gewichtseinheit des betreffenden Gases beziehe; befindet sich nun aber in dem Raume V von dem Gase G kg eingeschlossen, so ist

$$V = Gv$$

und man hat daher, wenn Gl. (3a) auf beiden Seiten mit G multiplicirt wird:

$$Vp = GB(a + t) \ . \tag{7}$$

Diese Gleichung giebt das bequemste Mittel an die Hand, das Gewicht eines Gases zu berechnen, welches sich beim Drucke p und der Temperatur t, (welche Grössen sich leicht durch Beobachtungen ergeben), in einem gegebenen Raume von V cbm ein-

geschlossen findet, wenn man nur für das betreffende Gas die Constante B kennt.

Beträgt der Rauminhalt V gerade ein Cubikmeter, so ist G das Gewicht der Cubikeinheit Gas bei dem betreffenden Druck p und der zugehörigen Temperatur t und dieses Gewicht soll im Folgenden allgemein mit γ bezeichnet und das specifische Gewicht des Gases genannt werden. Gl. (7) giebt daher:

$$\frac{p}{\gamma} = B(a + t)\,, \tag{8}$$

woraus auch im Vergleich mit Gl. (3a) zwischen dem specifischen Volumen v und dem specifischen Gewicht γ die Beziehung

$$v\gamma = 1 \tag{9}$$

resultirt.

Es verdient übrigens hervorgehoben zu werden, dass den beiden Formen der Zustandsgleichung (3a) und (8) eine besondere Bedeutung untergelegt werden kann. Das Product pv repräsentirt die Arbeitsquantität, die erforderlich ist, um den Raum v unter constantem Druck p auszufüllen oder zu entleeren, also z. B. die Gewichtseinheit Gas unter der erwähnten Voraussetzung in den Raum v hinein- oder herauszudrücken; diese Arbeit ist demnach der absoluten Temperatur $a + t$ proportional.

Andrerseits bedeutet in Gl. (8) der Werth $p : \gamma$ die Höhe einer Gassäule, deren specifisches Gewicht überall γ ist und die vermöge ihres Gewichtes auf die Quadrateinheit Basis den Druck p ausübt.

Nimmt man an, Gl. (8) gelte für ein bestimmtes Gas, so wird für ein anderes Gas bei gleichem Druck p und gleicher Temperatur t sowohl das specifische Gewicht γ, sowie die Constante B einen anderen Werth annehmen; bezeichnet man diese Werthe beziehungsweise mit γ_0 und B_0, so ist auch

$$\frac{p}{\gamma_0} = B_0(a + t)\,,$$

und wenn man diese Gleichung durch Gl. (8) dividirt, so folgt:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{B_0}{B}\,. \tag{10}$$

Dieses Verhältniss, welches im Weiteren mit ε bezeichnet werden soll, ist das relative Gewicht des einen Gases in Hinsicht des andern.

In der Folge soll das relative Gewicht der Gase jederzeit auf Wasserstoff bezogen werden. Es folgt daher aus Gl. (10)

$$B_0 = B\varepsilon \,, \tag{11}$$

wonach für alle Gase der Werth $B\varepsilon$ von gleichem Werthe erscheint, und sich die Zustandsgleichung der Gase Gl. (3a) auch in der Form:

$$pv\varepsilon = B_0(a + t) \tag{3 c}$$

schreiben lässt.

Für trockene atmosphärische Luft fand Regnault*) das specifische Gewicht γ, also das Gewicht von einem Cubikmeter Luft in Kilogrammen gemessen bei der Temperatur von 0° C. und beim mittleren Barometerstande von 760 mm Quecksilbersäule,

$$\gamma = 1.293187 \text{ kg}$$

in der Breite von Paris. Da nach Regnault**) das Gewicht von 1 cbm Quecksilber 13596 kg beträgt, so entspricht dem Barometerstande von 760 mm ein specifischer Druck von $p = 0{,}760 \cdot 13596 = 10332.96$ kg oder genau genug von $p = 10333$ kg auf 1 qm welcher Werth im Folgenden als »mittlerer Atmosphärendruck« bezeichnet werden soll. Es ist daher für Luft

$$\frac{p}{\gamma} = 799.034$$

und ergiebt sich aus Gl. (8) für $t = 0$ und $a = 273$

$$B = 29.269 \,.$$

Auf Grund weiterer Versuche Regnault's**) ist die folgende Tabelle für diejenigen Gase berechnet worden, welche die gegebene Zustandsgleichung am vollkommensten befolgen:

	Specifisches Gewicht γ	Relatives Gewicht bezogen auf Wasserstoff ε	Werthe von B
Atmosphärische Luft.	1.293187	14.4384	29.269
Wasserstoff	0.089566 (γ_0)	1	422.591(B_0)
Sauerstoff	1.429786	15.9635	26.472
Stickstoff	1.256163	14.0250	30.131
Stickoxyd	1.34284	14.9928	28.186
Kohlenoxyd.........	1.25090	13.9662	30.258

*) Rel. I. 157. **) Rel. I. 142, 144, 145.

Diese Tabelle giebt zu einigen Bemerkungen Anlass. Das Product $B\varepsilon$, also der beiden zusammen gehörigen Werthe der letzten beiden Columnen, ist für alle die genannten Gase dasselbe und zwar 422.591; dass, nebenbei bemerkt, auch das Product $B\gamma$ bei gleichem Drucke und Volumen gleich gross ausfällt, folgt schon aus Gl. (8) direct. Merkwürdig ist aber, dass der Werth des erstgenannten Productes fast genau gleich dem mechanischen Wärmeäquivalente (424) ist. Dass eine vollkommene Gleichheit beider Werthe besteht, lässt sich, beim jetzigen Stande unserer Kenntniss der innern Beschaffenheit der Körper, nicht beweisen; immerhin kann man von dieser zufälligen Uebereinstimmung, wenn man sie so bezeichnen will, bei gewissen Näherungsrechnungen Nutzen ziehen. Da das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit (A) der reciproke Werth von 424 ist, so wäre für Wasserstoff $AB_0 = 1$ und für jedes andere Gas nach Gl. (11)

$$AB\varepsilon = 1$$

und die Zustandsgleichung der Gase würde sich dann nach Gl. (3a) S. 89 in der Form

$$Apv\varepsilon = a + t \tag{12}$$

schreiben lassen, so dass also bei allen Gasen, bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur genommen, das Product $v\varepsilon$ gleich gross erscheint, was übrigens auch schon aus der Verbindung der Gl. (10) und (11) resultirt; das Product entspricht dem specifischen Volumen des Wasserstoffes, welches bei atmosphärischer Pressung und 0° Temperatur

$$v_0 = \frac{1}{\gamma_0} = 11.1649 \text{ cbm}$$

beträgt.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber noch folgende Bemerkung. Betrachtet man in vorstehender Tabelle, unter Ausschluss der atmosphärischen Luft (die eine Mischung von Gasen ist), die Zahlenwerthe der zweiten Columne, so sieht man, dass dieselben fast genau mit dem halben Werthe des sogenannten Molekulargewichtes der betreffenden Gase übereinstimmen.

Bezeichnet man für die verschiedenen chemischen Elemente E_1 E_2 u. s. w. die entsprechenden Atomgewichte mit e_1 e_2 e_3 u. s. f., und nimmt man an, dass das Molekül irgend eines chemisch zusammengesetzten Körpers aus n_1 Atomen des ersten

Bayerische Staatsbibliothek München

Elementes E_1, aus n_2 Atomen des zweiten Elementes E_2 u. s. f. besteht, so ist das Molekulargewicht m dieses Körpers

$$m = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + \ldots$$

oder einfach

$$m = \Sigma(ne) \,. \tag{13}$$

Für diejenigen Elemente, die in den folgenden Untersuchungen in Betracht kommen könnten, sind die Atomgewichte die nachstehenden:

Wasserstoff (H)	$e = 1$	Kohlenstoff (C)	$e = 12$
Sauerstoff (O)	16	Chlor (Cl)	35.5
Stickstoff (N)	14	Schwefel (S)	32.

So findet sich also z. B. für:

Wasserdampf (H_2O)	$m = 2.1 + 1.16 = 18$
Ammoniakdampf (NH_3)	$m = 1.14 + 3.1 = 17.$

In der Tabelle unten auf S. 121 findet sich noch für eine ganze Reihe von Luftarten in den Columnen 1—3 die chemische Zusammensetzung, die Atomzahl und das Molekulargewicht m angegeben; Col. 4 giebt das relative Gewicht ε in Hinsicht des Wasserstoffes.

In der letzten Zusammenstellung, S. 96, sind die als Gase aufgeführten Luftarten sämmtlich zweiatomig; bezeichnet man das Molekulargewicht des Wasserstoffes mit m_0 (es ist $m_0 = 2$), so erscheinen die dort mit ε bezeichneten Gase fast genau mit den Werthen $m : m_0$ der folgenden Zusammenstellung zusammenfallend, worauf zuerst Gay-Lussac aufmerksam gemacht hat. Die Uebereinstimmung tritt auch bei allen andern (z. B. bei den in der unten S. 121 gegebenen Tabelle aufgeführten) Luftarten hervor. Benutzt man nun den Werth $\varepsilon = m : m_0$ in Gl. (11), so wäre die Constante B der Zustandsgleichung eines Gases

$$B = \frac{B_0 m_0}{m} = \frac{845.182}{m} \,, \tag{14}$$

wenn man die Werthe von $B_0 = 422.591$ und $m_0 = 2$, für Wasserstoff gültig, substituirt. An Stelle der letzten Zusammenstellung träte daher die folgende:

	Zusammensetzung	Molekulargewicht	Werthe $B = \frac{B_0 m_0}{m}$
Wasserstoff	H_2	$2 = m_0$	422.591
Sauerstoff......	O_2	32	26.412
Stickstoff	N_2	28	30.185
Stickoxyd......	NO	30	28.173
Kohlenoxyd....	CO	28	30.185

Die Werthe von B stehen in befriedigender Uebereinstimmung mit den direct aus den Versuchen berechneten und auf S. 96 gegebenen Werthen. Die Benutzung der Beziehung (14) in der Zustandsgleichung giebt, wenn man diese noch auf beiden Seiten mit A multiplicirt,

$$A\,pmv = A\,B_0 m_0 (a + t) , \tag{15}$$

worin $A\,B_0 m_0 = 1.9933$ ist; diese Grösse wäre 2, wenn man, wie vorhin angedeutet wurde, B_0 mit 424 identisch voraussetzen wollte. Im Uebrigen zeigt vorstehende Gleichung, dass bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur das Product mv für alle Gase gleich gross ist; ersetzt man das specifische Volumen v durch das specifische Gewicht γ, so gilt nach Vorstehendem für zwei verschiedene Gase die Beziehung

$$\frac{m_1}{\gamma_1} = \frac{m_2}{\gamma_2} . \tag{16}$$

Denkt man sich nun, in einem Raume V befänden sich einmal n_1 Moleküle eines Gases vom Molekulargewicht m_1 und ein anderes Mal im gleichen Raume n_2 Moleküle vom Molekulargewicht m_2, so ist das Verhältniss der Gewichte G_1 und G_2 beider Gasmengen

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{n_1 m_1}{n_2 m_2} .$$

Andererseits ist auch:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{V\gamma_1}{V\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} .$$

Die Verbindung beider Gleichungen giebt daher

$$\frac{n_1 m_1}{\gamma_1} = \frac{n_2 m_2}{\gamma_2}$$

und hieraus ist bei dem Vergleich mit Gl. (16) der Schluss zu ziehen, dass $n_1 = n_2$ sein muss. Es folgt daher, dass gleiche Volume verschiedener Gase bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl von Molekülen enthalten.

Es ist dieses das Gesetz von Avogadro, welches eine der wichtigsten Grundlagen der heutigen Chemie bildet*).

§ 20. Ueber Gasmischungen.

Die Untersuchungen über das Verhalten von Mischungen, mechanischen Gemengen mehrerer Gase, sind für gewisse technische Fragen von Wichtigkeit, es rechtfertigt sich daher ein näheres Eingehen auf dieselben.

Befinden sich in einem Raume vom Inhalte V zwei Gase, von dem einen G_1, vom andern G_2 Kilogramm; die Temperatur beider Gase, wie ihrer Mischung sei t, die Constante B der Zustandsgleichung sei beziehungsweise B_1 und B_2, der Druck des einen Gases p_1 und des andern p_2; so gelten, weil nach einem bekannten Satze sich das eine Gas in dem Raume ausbreitet, wie wenn das zweite nicht vorhanden wäre, nach Gl. (7) die beiden Beziehungen

$$Vp_1 = G_1 B_1 (a + t) \quad \text{und} \quad Vp_2 = G_2 B_2 (a + t) \; , \qquad (17)$$

und aus der Addition folgt, wenn die Summe der Drücke $p_1 + p_2$ mit p bezeichnet wird, welch letzterer Werth der Beobachtung unterworfen werden kann,

$$Vp = (G_1 B_1 + G_2 B_2) (a + t) \; . \qquad (18)$$

Ist v das specifische Volumen der Mischung und $G = G_1 + G_2$ das Gesammtgewicht derselben, so ist auch $V = Gv$, und aus vorstehender Formel folgt daher für die Mischung:

*) Eine weitere Verfolgung der zuletzt behandelten Fragen führt in das rein theoretische Gebiet der Physik und Chemie und liegt den Zielen der vorliegenden Schrift fern. Von den verschiedenen Werken, welche diese hoch interessanten Fragen gründlich behandeln, seien erwähnt: Alexander Naumann, Thermochemie. Braunschweig 1882. — Lothar Meyer, Die modernen Theorien der Chemie. Breslau 1883. — Gmelin-Kraut, Handbuch der organischen Chemie. Heidelberg 1877. Bd. I. — Wurtz, Die atomistische Theorie. Leipzig 1879.

$$pv = \left(\frac{G_1 B_1 + G_2 B_2}{G_1 + G_2}\right)(a + t) .$$

Bezeichnet man den Factor von $(a + t)$ der rechten Seite mit B_m, so folgt für die Mischung genau, wie für ein einfaches Gas

$$pv = B_m(a + t) ,$$

wobei aber die Constante B_m durch die Gleichung

$$B_m = \frac{G_1 B_1 + G_2 B_2}{G_1 + G_2} \tag{19}$$

bestimmt ist. Man erkennt sogleich, dass dieses Gesetz auch für mehr als zwei Gase gültig ist und dass sich in solchem Falle für die Mischung allgemein findet

$$B_m = \frac{\Sigma(GB)}{\Sigma(G)} . \tag{19a}$$

Die Drücke der einzelnen Gase in der Mischung ergeben sich leicht, wenn man die Gln. (17) durch Gl. (18) dividirt; man erhält beziehungsweise:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{G_1 B_1}{G_1 B_1 + G_2 B_2} \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{p} = \frac{G_2 B_2}{G_1 B_1 + G_2 B_2} , \tag{20}$$

welcher Satz sich gleichfalls leicht auf den Fall des Vorhandenseins von mehr als zwei Gasen übertragen lässt.

Wäre für zwei Gase die Constante B_m für die Mischung durch Beobachtung bestimmt worden, so liesse sich aus Gl. (19) leicht das Mischungsverhältniss berechnen.

Ist, wie bemerkt, das Gewicht beider Gase $G = G_1 + G_2$, so folgt

$$\frac{G_2}{G} = 1 - \frac{G_1}{G}$$

und daher berechnet sich sogleich aus Gl. (19)

$$\frac{G_1}{G} = \frac{B_m - B_2}{B_1 - B_2} \quad \text{und} \quad \frac{G_2}{G} = \frac{B_1 - B_m}{B_1 - B_2} . \tag{21}$$

Benutzt man diese beiden Formeln in den Gln. (20), so folgt der Druck p_1 des einen und p_2 des andern Gases aus den Gleichungen:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{(B_m - B_2)\, B_1}{(B_1 - B_2)\, B_m} = \frac{G_1 B_1}{G\, B_m} \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{p} = \frac{(B_1 - B_m)\, B_2}{(B_1 - B_2)\, B_m} = \frac{G_2 B_2}{G\, B_m} . \tag{22}$$

Den wichtigsten Fall einer Gasmischung bietet die atmo-

sphärische Luft, welche aus Stickstoff und Sauerstoff gemischt ist; für dieselbe lassen sich daher die vorstehenden Werthe leicht berechnen. Nach der Zusammenstellung auf S. 96 ist für Stickstoff $B_1 = 30{,}131$, für Sauerstoff $B_2 = 26{,}472$ und für die atmosphärische Luft $B_m = 29{,}269$. Aus den Gleichungen (21) folgt daher für die letztere

$$\frac{G_1}{G} = 0{,}7644 \quad \text{und} \quad \frac{G_2}{G} = 0{,}2356\ .$$

Die atmosphärische Luft erscheint also dem Gewichte nach zusammengesetzt aus

76,44 % Stickstoff und 23,56 % Sauerstoff.

Die Gln. (22) ergeben dagegen

$$\frac{p_1}{p} = 0{,}7869 \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{p} = 0{,}2131\ .$$

Beim Druck p der atmosphärischen Luft, z. B. einem beobachteten Barometerstand, rühren also 78,69 % des Druckes vom Stickstoff und 21,31 % vom Sauerstoff her, vorausgesetzt dass das Mischungsverhältniss der atmosphärischen Luft ein unveränderliches wäre, also genau den vorhin berechneten Werthen entsprechen würde. Nach neueren Forschungen scheint das Mischungsverhältniss unserer Atmosphäre Schwankungen, allerdings zwischen engen Grenzen, unterworfen zu sein; damit würden sich die vorhin berechneten Pressungsverhältnisse ändern; auf diese gewährt aber die Beobachtung des Gesammtdruckes p, also des veränderlichen Barometerstandes, keinen Rückschluss.

Die Chemiker vergleichen gewöhnlich verschiedene Gasmengen nicht dem Gewichte nach, sondern dem Volumen nach bei gleichem Druck und gleicher Temperatur.

In dem vorliegenden Falle würden die G_1 kg Gas der ersten Art beim Druck p und der Temperatur t das Volumen V_1 und die G_2 kg Gas der andern Art das Volumen V_2 einnehmen und die Beziehungen bestehen:

$$V_1 p = G_1 B_1 (a + t) \quad \text{und} \quad V_2 p = G_2 B_2 (a + t)\ ;$$

aus der Addition beider Gleichungen folgt, weil $V_1 + V_2 = V$ das Gesammtvolumen bildet,

$$Vp = (G_1 B_1 + G_2 B_2)(a + t)$$

oder nach Gl. (19)

$$Vp = G B_m (a + t) .$$

Dividirt man mit diesem Ausdrucke in die beiden voranstehenden Gleichungen, so folgen die Mischungsverhältnisse dem Volumen nach genommen:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{G_1 B_1}{G B_m} \quad \text{und} \quad \frac{V_2}{V} = \frac{G_2 B_2}{G B_m} . \tag{23}$$

Diese Ausdrücke sind aber identisch mit denen der Druckverhältnisse nach Gl. (22).

Hiernach folgt beispielsweise, dass die atmosphärische Luft nach den obigen Rechnungsergebnissen dem Volumen nach aus 78,69 % Stickstoff und 21,31 % Sauerstoff besteht.

Denkt man wieder an die Mischung beliebig vieler Gasmengen und bezeichnet man mit G das Gesammtgewicht $\Sigma(G)$, so ist allgemein nach Gl. (19a)

$$G B_m = \Sigma(G B) .$$

Bezeichnet ferner ε_m das relative Gewicht der Mischung bezogen auf Wasserstoff, und sind ebenso $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \cdots$ die relativen Gewichte der einzelnen Gase, so war nach Gl. (11)

$$B = \frac{B_o}{\varepsilon} ,$$

wobei $B_o = 422{,}591$ betrug; die vorstehende Formel giebt daher:

$$\frac{G}{\varepsilon_m} = \frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} + \frac{G_3}{\varepsilon_3} + \cdots ,$$

woraus $\varepsilon_m = \dfrac{\Sigma(G)}{\Sigma\left(\dfrac{G}{\varepsilon}\right)}$ (24) und dann $B_m = \dfrac{B_o}{\varepsilon_m}$ folgt.

Aus Gl. (3c) S. 96, nämlich

$$p v_m \varepsilon_m = B_o (a + t) ,$$

bestimmt sich dann das specifische Volumen v_m der Mischung bei gegebenem Druck p und bekannter Temperatur t.

Für die Technik sind von besonderer Bedeutung solche Gasgemische, welche durch Zündung, sei es durch Gasflammen oder durch den elektrischen Funken, explodiren, also in chemische

Verbindung treten. Hierbei ist zu unterscheiden, ob das Gas gemisch, z. B. bei zwei Gasen, so gewählt worden ist, dass aus beiden Gasen ein einziges Gas von bestimmter chemischer Beschaffenheit entsteht oder ob das eine Gas im Ueberschuss vorhanden war und daher bei der Zündung ein neues Gasgemisch aus dem Ueberschuss des einen Gases und der chemischen Verbindung des Restes mit dem andern Gase entsteht.

Da im weitern Verlaufe der Schrift auf die vorstehende Frage ausführlicher zurückzukommen ist, so mag nur der erstere Fall noch einer kurzen Erläuterung unterworfen werden. Besteht eine chemische Verbindung aus den Elementen: $E_1 E_2 E_3 \ldots$
sind ferner deren Atomgewichte: $e_1 \; e_2 \; e_3 \ldots$
und bedeuten weiterhin: $n_1 \; n_2 \; n_3 \ldots$
die Anzahlen der Atome, aus denen die Elementargase vor Eintritt der chemischen Verbindung bestehen, so sind die Molekulargewichte der einzelnen Gase $m_1 = n_1 e_1$; $m_2 = n_2 e_2$ u. s. f. und diese Werthe treten in Gl. (24) an die Stelle der Gewichte G_1, G_2 u. s. f.

Es folgt daher $\Sigma(G) = n_1 e_1 + n_2 e_2 + \cdots = \Sigma(ne)$

und
$$\Sigma\left(\frac{G}{\varepsilon}\right) = \frac{n_1 e_1}{\varepsilon_1} + \frac{n_2 e_2}{\varepsilon_2} + \cdots$$

Nun sind für die Elemente die relativen Gewichte ε (in Hinsicht auf Wasserstoff) mit den Atomgewichten identisch, daher ergiebt die letzte Formel einfach

$$\Sigma\left(\frac{G}{\varepsilon}\right) = \Sigma(n)$$

und hiernach ist nach Gl. (24) das relative Gewicht ε_m der Mischung

$$\varepsilon_m = \frac{\Sigma(ne)}{\Sigma(n)} .$$

Es bedeutet nun aber $\Sigma(ne)$ das Molekulargewicht m der betreffenden chemischen Verbindung, und $\Sigma(n)$ ist die Anzahl n der Atome, aus welcher dieselbe besteht; es ist daher einfach das relative Gewicht der Mischung

$$\varepsilon_m = \frac{m}{n} , \tag{25}$$

während das relative Gewicht ε der zugehörigen chemischen Verbindung sich

$$\varepsilon = \frac{m}{m_0} \tag{26}$$

ergab, wobei $m_0 = 2$ das Molekulargewicht des Wasserstoffes ist. Ist v_m das specifische Volumen der Mischung und v das der chemischen Verbindung, so besteht nach Gl. (3c) bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die Beziehung

$$v \varepsilon = v_m \varepsilon_m$$

und hieraus folgt unter Benutzung vorstehender Werthe, wenn man $m_0 = 2$ substituirt,

$$\frac{v}{v_m} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon} = \frac{2}{n}, \tag{27}$$

woraus man einen Schluss auf die Volumenänderung ziehen kann, wenn die Mischung durch Zündung oder durch einfache Erwärmung in eine chemische Verbindung übergeht, vorausgesetzt, dass am Ende der anfängliche Druck und die anfängliche Temperatur wieder hergestellt worden ist.

Die Constante B der Zustandsgleichung ferner findet sich nach Gl. (11)

$$\text{für die Mischung } B_m = n. \frac{B_0}{m},$$

$$\text{für die chemische Verbindung } B = 2 \frac{B_0}{m},$$

allerdings vorausgesetzt, dass auch die chemische Verbindung in Dampfform der Zustandsgleichung der Gase entspricht. Bei zweiatomigen Gasen, bei denen $n = 2$ ist, findet eine Volumenveränderung, wie Gl. (27) zeigt, nicht statt. Bei einer Vereinigung von Stickstoff und Sauerstoff im Verhältniss der chemischen Verbindung Stickoxyd (NO) ist daher in der mechanischen Mischung, wie in der chemischen Verbindung, B gleichgross.

Dem Gewichte nach ist übrigens die Mischung zusammengesetzt in folgender Weise:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{n_1}{m} e_1; \quad \frac{G_2}{G} = \frac{n_2}{m} e_2, \quad \frac{G_3}{G} = \frac{n_3}{m} e_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{28}$$

Dem Volumen nach ist sie dagegen zufolge der Gln. (23) zusammengesetzt, wenn man bedenkt, dass nach Gl. (11) $B_0 = B_1 \varepsilon_1$;

$B_0 = B_2 \varepsilon_2$ u. s. f., sowie $B_0 = B_m \varepsilon_m$ ist und ausserdem $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_2$ u. s. f. anzunehmen ist:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1}{m} \varepsilon_m , \quad \frac{V_2}{V} = \frac{n_2}{m} \varepsilon_m , \quad \frac{V_3}{V} = \frac{n_3}{m} \varepsilon_m \cdots \qquad (29)$$

Diese letzten Ausdrücke geben zugleich an, wie der Vergleich der Gl. (23) mit der Gl. (22) zeigt, in welchem Maasse die einzelnen Gase mit ihrem Drucke an dem Gesammtdruck p der Mischung participiren; es ist also auch

$$\frac{p_1}{p} = \frac{n_1}{m} \varepsilon_m ; \quad \frac{p_2}{p} = \frac{n_2}{m} \varepsilon_m ; \quad \frac{p_3}{p} = \frac{n_3}{m} \varepsilon_m \cdots \qquad (30)$$

So findet sich z. B. für eine Mischung von Wasserstoff und Sauerstoff in dem Verhältniss, in welchem sie sich zu Wasser verbinden, als sogenanntes Knallgas, — da nach der chemischen Formel des Wassers H_2O die Anzahl der Atome $n = 3$ beträgt und das Molekulargewicht des Wassers

$$m = n_1 e_1 + n_2 e_2 = 2 \,.\, 1 + 1 \,.\, 16 = 18$$

ist (s. S. 98), — das relative Gewicht des Knallgases $\varepsilon_m = 6$ nach Gl. (25) und das des Wasserdampfes (hoch überhitzt gedacht) nach Eintritt der Explosion $\varepsilon = 9$.

Die Constante B der Zustandsgleichung für Knallgas folgt:

$$B_m = \frac{B_0}{6} = \frac{422{,}591}{6} = 70{,}432$$

und die des Wasserdampfes, allerdings in dem Zustande genommen, in welchem derselbe als ein Gas angesehen werden kann:

$$B = \frac{B_0}{9} = 46{,}954 \,.$$

Das Verhältniss der Volume von Wasserdampf und Knallgas findet sich nach Gl. (27)

$$\frac{V}{V_m} = \frac{2}{3} ;$$

mit der Explosion ist daher eine starke Volumenverminderung verbunden, — die Zurückführung auf gleichen Druck und gleiche Temperatur vorausgesetzt.

Die Mischung (Knallgas) wie auch Wasserdampf ist nach der Gl. (28) dem Gewichte nach zusammengesetzt:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{n_1}{m} e_1 = \frac{2}{18} 1 = \frac{1}{9} \quad ; \quad \frac{G_2}{G} = \frac{n_2}{m} e_2 = \frac{1}{18} 16 = \frac{8}{9} .$$

Dem Volumen nach dagegen ist die Zusammensetzung der Mischung (Knallgas) nach der Gl. (29)

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1}{m} \varepsilon_m = \frac{2}{18} . 6 = \frac{2}{3} \text{ und } \frac{V_2}{V} = \frac{n_2}{m} \varepsilon_m = \frac{1}{18} . 6 = \frac{1}{3} .$$

Von gleichem Werthe sind die Druckverhältnisse. Ist p der Druck der Mischung, so beträgt der Druck des Wasserstoffes $p_1 = \frac{2}{3} p$ und der des Sauerstoffs $p_2 = \frac{1}{3} p$.

Auf demselben Wege findet sich für das (wegen seiner Verwendung bei den Kaltdampfmaschinen) technisch wichtige Ammoniak (NH_3) die Zahl der Atome $n = 4$; das Molekulargewicht $m = 17$. Für die Mischung von Stickstoff und Wasserstoff im entsprechenden Verhältniss ist $\varepsilon_m = {}^{17}/_4$ und für die chemische Verbindung als Ammoniak $\varepsilon = {}^{17}/_2$; das Volumenverhältniss zwischen Dampf und Mischung ist

$$\frac{v}{v_m} = \frac{1}{2} .$$

Die Constante der Zustandsgleichung ist für die Mischung $B_m = 99{,}432$ und für den Ammoniakdampf (hochüberhitzt) $B = 49{,}716$. Dem Gewichte nach besteht die Mischung aus ${}^{14}/_{17}$ Stickstoff und ${}^{3}/_{17}$ Wasserstoff; dagegen dem Volumen nach aus ${}^{1}/_{4}$ Stickstoff und ${}^{3}/_{4}$ Wasserstoff; im gleichen Verhältniss stehen auch die Pressungen der beiden Elementargase in der Mischung.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die im Vorstehenden berechneten Werthe von B für die Dämpfe von Wasser und Ammoniak einen technischen Werth nicht haben. Diese Dämpfe zeigen, wenn man sie wie hier der Gas-Zustandsgleichung unterworfen ansieht, innerhalb der Grenzen, zwischen welchen sie Verwendung finden, Abweichungen, die viel zu gross sind. Bei den später folgenden Untersuchungen über das Verhalten der Dämpfe wird auf diese Frage zurückgekommen werden.

§ 21. Specifische Wärme der Gase.

Die Wärmemenge, welche erforderlich ist, ein Kilogramm Wasser von 0° auf 1° C. zu erwärmen, bildet die Maasseinheit für Wärmemessungen, die Wärmeeinheit; die Wärmemenge dQ zur Erwärmung des Wassers um dt, ebenfalls von 0° ausgegangen, ist daher $dQ = dt$.

Um nun aber die Gewichtseinheit irgend eines andern Körpers, von der Anfangstemperatur t ab gerechnet, um dt zu erwärmen, wobei zunächst an feste oder flüssige Körper gedacht werden mag, wird die erforderliche Wärmemenge eine andere sein, die man einfach setzt:

$$dQ = c\,dt \tag{31}$$

und wobei man voraussetzt, dass für den betreffenden Körper der Factor c durch Versuche bestimmt sei. Der Werth c heisst die specifische Wärme dieses Körpers und stellt also einen Verhältnisswerth:

$$c = \frac{dQ}{dt}$$

dar, nämlich das Verhältniss der Wärmemenge, welche der Körper bei der Temperaturänderung dt verbraucht, verglichen mit derjenigen, welche eine gleiche Masse Wasser bei derselben Temperaturerhöhung fordert; dabei denkt man aber ausdrücklich bei Wasser an die Anfangstemperatur 0° C., für welches in diesem Falle $c = 1$ ist, während bei dem in Betrachtung stehenden Körper die Anfangstemperatur t als beliebig, aber als bekannt angesehen wird, weil die Versuche die specifische Wärme c als mit der Temperatur veränderlich, als eine Function von t, ergeben haben. Diese Veränderlichkeit mit der Anfangstemperatur ist auch bei Wasser hervorgetreten, und darin liegt es begründet, dass zur Schaffung einer festen Basis bei obigem Vergleich das Wasser von bestimmter Anfangstemperatur, von 0°, angenommen wird.

Es ist vorhin die Gewichtseinheit Körpermasse mit der Gewichtseinheit Wasser verglichen worden, man nennt daher auch c die specifische Wärme bei gleichem Gewichte.

Man hätte nämlich auch die Cubikeinheit (ein Cubikmeter)

Körpermasse mit einem Cubikmeter Wasser von 0° bezüglich der Wärmeaufnahme bei der Temperaturzunahme dt vergleichen können und würde es dann mit der specifischen Wärme bei gleichem Volumen zu thun haben.

Die eine Art der specifischen Wärme lässt sich aber leicht aus der anderen bestimmen.

Ist γ das specifische Gewicht des Körpers d. h. das Gewicht von einem Cubikmeter desselben in Kilogramm gemessen und ist γ_0 das specifische Gewicht des Wassers ($\gamma_0 = 1000$), so erfordert der Körper die Wärmemenge $\gamma c\, dt$ bei der Temperaturerhöhung um dt und das Wasser von 0° die Wärmemenge $\gamma_0 dt$; das Verhältniss beider, welches mit ω bezeichnet werden mag, ist daher:

$$\omega = \frac{\gamma}{\gamma_0} c \tag{32}$$

und das ist die specifische Wärme bei gleichem Volumen; man erhält daher dieselbe, wenn man die specifische Wärme c bei gleichem Gewichte mit dem Quotienten $\gamma : \gamma_0$ d. h. mit dem relativem Gewichte des Körpers in Hinsicht auf Wasser multiplicirt.

Die im Vorstehenden enthaltene Darlegung der älteren Physik muss aber nach den Lehren der Thermodynamik erweitert werden, denn die Wärmemenge, welche ein Körper bei der Temperaturerhöhung dt erfordert, ist keineswegs von dieser Erhöhung und seiner Anfangstemperatur allein abhängig. Die Temperatur ist eine Function von Druck und Volumen des Körpers und da der unter dem äussern Druck p stehende Körper während der Wärmemittheilung Volumenveränderung erleidet, so kommt hier noch die äussere Arbeit in Betracht, welche der Körper verrichtet oder aufnimmt. In Abschnitt I. § 3 S. 26 ist ausführlich erörtert worden, dass die Wärmemenge, welche für eine gewisse Zustandsänderung mitgetheilt werden muss, abhängig ist von dem Wege, auf dem der Körper aus dem Anfangszustand in den gegebenen Endzustand übergeführt wird, und solcher Uebergänge können unendlich viele vorliegen. Die Gl. (31) hat daher überhaupt keine allgemeine Giltigkeit, sondern setzt bei ihrer Anwendung ein ganz bestimmtes Gesetz der Aenderung des äussern Druckes p mit dem Körpervolumen v voraus. Für Gase wird

dieses Gesetz in den später folgenden Entwickelungen hervortreten; bei jeder andern Beziehung zwischen p und v während der Wärmemittheilung hat aber dann Gl. (31) keinen Sinn. So steht es aber auch mit festen und flüssigen Körpern, nur mit dem Unterschiede, dass für solche das allgemeine Gesetz der Zustandsänderungen, bei welchen Gl. (31) giltig ist, nicht einmal bekannt ist, weil die sogenannte Zustandsgleichung der festen und flüssigen Körper noch nicht aufgefunden worden ist; nur so viel ist als sicher zu betrachten, dass die Gleichung (31) nur in Anwendung gebracht werden darf bei solchen festen und flüssigen Körpern, die während der Erwärmung eine unmerkliche und bei den Rechnungen zu vernachlässigende Volumenänderung zeigen, weil in diesem Falle die äussere Arbeit nicht in Betracht fällt. Bei Gasen, die bei der Erwärmung im Allgemeinen beträchtliche Volumenänderungen zeigen, konnte man aber den Unterschied von Anfang an nicht unbeachtet lassen und hat daher schon vor Klarlegung der Frage durch die Thermodynamik bei Gasen zwei Arten der Erwärmung unterschieden; entweder dachte man sich die Erwärmung des Gases bei constantem Druck oder bei constantem Volumen; im ersten Falle sei die Wärmemenge für die Temperaturerhöhung des Gases um dt

$$dQ_p = c_p\,dt\,, \tag{33}$$

im andern Falle

$$dQ_v = c_v\,dt\,, \tag{34}$$

wobei der Index p oder v andeuten soll, welche Grösse bei der gedachten Wärmezuführung als constant angesehen wird.

Man nennt c_p die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck und c_v die bei constantem Volumen und müsste eigentlich, da an ein Kilogramm Gas verglichen mit einem Kilogramm Wasser gedacht wird, noch in beiden Fällen hinzufügen: bei gleichem Gewicht; der Zusatz ist aber unnöthig, da bei allen Untersuchungen der Thermodynamik die Gewichtseinheit der in Betrachtung stehenden Körper zu Grunde gelegt wird und nur in Ausnahmefällen die Volumeneinheit in Betracht gezogen wird.

Die im Vorstehenden genannten beiden Fälle der Erwärmung des Gases werden übrigens in den weitern Untersuchungen nur als specielle Fälle eines allgemeinen Gesetzes hervortreten; für die

hier zu behandelnden Fragen sind aber die beiden Fälle deshalb von hervorragender Bedeutung, weil die Werthe c_p und c_v für verschiedene Gase durch Versuche bestimmt sind.

Die ersten zuverlässigen Versuche bezüglich des Werthes c_p, der specifischen Wärme der Gase bei constantem Druck, verdanken wir wiederum Regnault.*) Die folgende Zusammenstellung giebt die Werthe von c_p und die Producte γc_p, worin γ das specifische Gewicht d. h. das Gewicht der Cubikeinheit des Gases ist (vergl. S. 96) für diejenigen Gase, welche der obigen Zustandsgleichung mit hinreichender Genauigkeit entsprechen. Dividirt man die letzteren Werthe γc_p mit dem specifischen Gewicht $\gamma_0 = 1000$ des Wassers, so erhält man für das betreffende Gas nach vorstehenden Erörterungen die specifische Wärme unter constantem Drucke bei gleichem Volumen.

	c_p	γc_p
Atmosphärische Luft.	0.2375	0.3071
Wasserstoff	3.4090	0.3053
Sauerstoff	0.2175	0.3110
Stickstoff	0.2438	0.3062
Stickoxyd	0.2317	0.3114
Kohlenoxyd	0.2450	0.3065

Man ersieht, dass die specifische Wärme c_p für verschiedene Gase verschieden ist, dass aber in merkwürdiger Weise das Wasserstoffgas hervortritt; die specifische Wärme desselben ist, wie noch andere Versuche zeigen, sogar grösser, als für irgend einen festen oder flüssigen Körper.

Anderes zeigen die Werthe γc_p der letzten Columne, die für die angegebenen Gase nahezu gleich sind, wie schon Delaroche und Bérard erkannt hatten; der kleinste Werth tritt bei Wasserstoff hervor und da dieses Gas nach allen Erfahrungen dem vollkommenen Gase am nächsten steht, so schliesst man, dass die einzelnen Gase in ihrem Verhalten von den Voraussetzungen, unter denen die Zustandsgleichung abgeleitet worden ist, um so mehr abweichen, je grösser die Abweichung des Werthes γc_p der-

*) Rel. II. 303.

selben von dem Werthe ist, der für Wasserstoff vorliegt. Bei den im Vorstehenden aufgeführten Gasen sind aber die Abweichungen so unbedeutend, dass man auch aus diesem Grunde bei allen von der Zustandsgleichung Gebrauch machen kann. Setzt man volle Gleichheit der Werthe γc_p voraus, so ist zu schliessen, dass bei gleichem Volumen alle Gase bei gleicher Temperaturerhöhung unter constantem Druck die gleiche Wärmemenge erfordern, welcher Satz nach dem Avogadro'schen Gesetz (§ 19 S. 100) sich auch auf die Moleküle selbst ausdehnen lässt.

Die Untersuchungen Regnault's über die specifische Wärme der Gase bei constantem Druck haben aber noch auf andere für die unten folgenden Betrachtungen wichtige Ergebnisse geführt.

Zunächst zeigten ausgedehnte Versuche mit atmosphärischer Luft, Wasserstoff und Kohlensäure, dass für diese drei Gase (also selbst bei Kohlensäure, die im Uebrigen sich keineswegs der Zustandsgleichung der Gase unterzieht, also im Sinne des Vorstehenden nicht zu den Gasen zu rechnen ist) die specifische Wärme unabhängig vom Drucke ist, dass also die Gewichtseinheit jedes dieser Gase zur Temperaturerhöhung dt bei constantem, aber beliebigem Drucke, welches Volumen auch vorliegen mag, immer die gleiche Wärmemenge fordert.

Fernerhin stellte sich heraus, dass bei atmosphärischer Luft und Wasserstoff die specifische Wärme c_p zwischen weiten Temperaturgrenzen (von — 30° bis 200°) eine constante Grösse ist, dass dagegen bei Kohlensäure die specifische Wärme mit steigender Temperatur nicht unbeträchtlich zunimmt.

Man hat daraus den berechtigten Schluss gezogen, dass bei denjenigen Luftarten, die in obigen Zusammenstellungen genannt sind und die früher als permanente Gase bezeichnet wurden, die specifische Wärme bei constantem Druck als unabhängig von Druck und Temperatur, also als constanter Werth, wenigstens innerhalb der gewöhnlichen Druck- und Temperaturgrenzen angesehen werden dürfe, dass dagegen bei anderen Luftarten die specifische Wärme mit wachsender Temperatur zunimmt.

Was nun im Weiteren die specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen (c_v) betrifft, so ist eine directe Bestimmung derselben bis jetzt noch nicht gelungen, wohl aber hat man nach verschiedenen Versuchsmethoden, von welchen eine der wichtigsten später näher besprochen werden wird, das Ver-

hältniss der beiden specifischen Wärmen c_p und c_v, für welches im Weiteren die Bezeichnung:

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{35}$$

benutzt werden soll, ermittelt.

Nach der von Laplace gegebenen Formel für die Schallgeschwindigkeit, welche diesen Werth $\varkappa$ enthält, ist aus der Schallgeschwindigkeit in der atmosphärischen Luft, die man genau kennt, $\varkappa$ im Mittel 1,403 gefunden worden; Dulong fand aus Versuchen von Schwingungen der Gase in Röhren, welche Versuche allerdings gewisse Unvollkommenheiten zeigen, für atmosphärische Luft $\varkappa = 1{,}421$; für Kohlenoxydgas $\varkappa = 1{,}428$; für Kohlensäure 1,338.

Genauere Versuche ähnlicher Art unter Anwendung eines von Kundt gegebenen Verfahrens rühren von Wüllner her, der das Verdienst hat, zugleich den Einfluss der Temperatur in Betracht gezogen zu haben. Wüllner fand u. a. für die Temperatur von 0° und 100° C. für atmosphärische Luft bez. $\varkappa = 1{,}4053$ und 1,4029, sowie für Kohlenoxyd bez. $\varkappa = 1{,}4032$ und 1,3946.

Nach andern, im Princip wenig von einander abweichenden Versuchsmethoden, die im weitern Verlaufe der Schrift berührt werden, wurde für atmosphärische Luft gefunden von Clément 1,356; von Masson 1,419; von Hirn 1,384; von Weisbach 1,402; von Cazin 1,410; von Röntgen 1,405.

Als mittleren und zuverlässigsten Werth betrachtet man mit Recht

$$\varkappa = 1{,}410\ ,$$

ein Werth, der auch durch die folgenden Untersuchungen als solcher hervortritt, der andern Ergebnissen der Thermodynamik am besten entspricht. Im Uebrigen hat man diesen, speciell für Gase, die sich der obigen Zustandsgleichung unterwerfen, gültigen Werth von Anfang an als eine constante, also von Druck und Temperatur unabhängige Grösse angesehen, eine Annahme, die bezüglich der Temperatur durch Wüllner's Versuche hinreichende Bestätigung gefunden hat.

Da nach Obigem die specifische Wärme bei constantem Druck (c_p) bei Gasen als constant zu betrachten ist, in gleicher Weise auch $\varkappa$ als unveränderlich angesehen wird, so tritt nach Gl. (35)

auch die specifische Wärme bei constantem Volumen (c_v) als constant hervor. Für das technisch wichtigste Gas, die atmosphärische Luft, wurde $c_p = 0{,}2375$ angegeben; für $\varkappa = 1{,}410$ findet sich daher für dieselbe $c_v = 0{,}1684$.

§ 22. Erste Hauptgleichung der Thermodynamik unter Berücksichtigung des Verhaltens der Gase.

Die Wärmemenge dQ, welche der Gewichtseinheit irgend eines Körpers mitzutheilen ist, um dessen Druck, Volumen und Temperatur um dp, dv und dt zu erhöhen, ergab sich nach den Gln. (IIIa) § 12 S. 60

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A[Xdp + Ydv] \\ &= \frac{A}{\frac{\partial t}{\partial p}}[Xdt + Tdv] \\ &= \frac{A}{\frac{\partial t}{\partial v}}[Ydt - Tdp] \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

In diesen drei identischen Gleichungen bedeutet T die Carnot'sche Temperaturfunction, deren Form zunächst noch unbekannt ist; die beiden Grössen X und Y waren für den betreffenden Körper Functionen von p und v, auf deren Feststellung für Gase es nun zunächst ankommt.

Setzt man einmal Erwärmung des Körpers bei constantem Druck, ein anderes Mal solche bei constantem Volumen voraus, so ergiebt für den ersten Fall (für $dp = 0$) die dritte der vorstehenden Gleichungen

$$dQ_p = \frac{AY}{\frac{\partial t}{\partial v}}\, dt \tag{37}$$

und die zweite Gleichung, für $dv = 0$

$$dQ_v = \frac{AX}{\frac{\partial t}{\partial p}}\, dt\ . \tag{38}$$

Der Vergleich dieser beiden Formeln mit den Gln. (33) und (34) ergiebt nun

$$A\,Y = c_p \frac{\partial t}{\partial v} \quad \text{und} \quad A\,X = c_v \frac{\partial t}{\partial p} \,. \tag{39}$$

Beide Formeln sind noch gültig für jeden Körper; speciell für Gase sind aber nach Obigem die beiden specifischen Wärmen c_p und c_v als constant zu betrachten und aus der Zustandsgleichung

$$p\,v = B(a + t)$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{B} \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{B} \tag{40}$$

und durch Substitution in die Gl. (39)

$$Y = \frac{c_p}{A\,B} \cdot p \quad \text{und} \quad X = \frac{c_v}{A\,B} \cdot v \,, \tag{41}$$

wonach also bei Gasen die Function Y nur von p und die Function X nur von v abhängig ist und überdies diese Functionen den zugehörigen Werthen direct proportional erscheinen.

Nun hatte aber die erste Hauptgleichung der Thermodynamik nach Gl. (Ia), § 12, S. 59, die Form

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 1 \,.$$

Die Differentiation der Gln. (41) und die Substitution der beiden Differentialquotienten in die vorstehende Gleichung ergiebt dann:

$$c_p - c_v = A\,B \tag{42}$$

als diejenige Form, in welche die erste Hauptgleichung in ihrer Anwendung auf Gase übergeht. Benutzt man hier noch die in Gl. (35) angegebene Bezeichnung, so folgen die verschiedenen Formen:

$$c_p - c_v = c_v(\varkappa - 1) = c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = A\,B \,, \tag{43}$$

und nach den Gln. (41) schreiben sich die Formeln für die beiden Functionen Y und X einfacher auch:

$$Y = \frac{\varkappa\,p}{\varkappa - 1} \quad \text{und} \quad X = \frac{v}{\varkappa - 1} \,. \tag{44}$$

Die wichtige Gleichung (42) ist in vorstehender Form zuerst von Clausius gegeben worden, sie enthält vier Grössen, die sämmtlich einzeln durch besondere Versuche bestimmt worden sind; die Substitution der experimentell bestimmten Grössen in diese Gleichung müsste dann den entsprechenden Zusammenhang ergeben. Setzt man z. B. für atmosphärische Luft die oben angegebenen Werthe $c_p = 0{,}2375$, $B = 29{,}269$ und $A = 1 : 424$ ein, so ergiebt die Formel $c_v = 0{,}1685$ und daher $\varkappa = 1{,}4095$ oder rund $\varkappa = 1{,}410$ in voller Uebereinstimmung mit den im vorigen Paragraphen gemachten Angaben.*)

Die folgende Zusammenstellung giebt, auf gleiche Art aus Gl. (42) berechnet, für die schon oben aufgeführten Gase in der ersten Columne die specifische Wärme bei constantem Volumen für gleiche Gewichte, während in der zweiten Columne unter Benutzung der in der Tabelle S. 96 gegebenen Werthe von γ die Producte γc_v berechnet erscheinen, die, durch 1000 dividirt gedacht, die specifische Wärme bei constantem und für die verschiedenen Körper gleichem Volumen (mit Wasser verglichen) ergeben.

	c_v	γc_v
Atmosphärische Luft.	0.1685	0.2170
Wasserstoff	2.4123	0.2161
Sauerstoff	0.1551	0.2217
Stickstoff...........	0.1727	0.2169
Stickoxyd	0.1652	0.2218
Kohlenoxyd..........	0.1736	0.2172

Man ersieht aus den Werthen der letzten Columne, dass die specifische Wärme c_v bei gleichem Volumen genommen, bei allen Gasen nahezu die gleiche ist; man schliesst daraus, dass

*) Verfolgt man den Gedankengang von Robert Meyer (1842), der zuerst das mechanische Wärmeäquivalent berechnet hat, so entspricht derselbe, in mathematische Form gebracht, der Gleichung (42) des Textes; nur findet Meyer 365 statt 424, was aber nur dem Umstande zuzuschreiben ist, dass derselbe die specifische Wärme c_p der Luft nach Bérard zu 0,267 annahm, während der richtige Werth $c_p = 0{,}2375$ erst später von Regnault gefunden wurde.

alle Gase für die gleiche Temperaturerhöhung dieselbe Wärmemenge fordern, wenn beim Versuche die Volumeneinheit zu Grunde gelegt wird, wie dies auch mit der specifischen Wärme unter constantem Drucke der Fall ist und bei Betrachtung der Tabelle auf S. 111 besprochen worden ist. In der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen, S. 121, sind für eine ganze Reihe von Luftarten die Versuchsresultate zusammengestellt; direct aus Versuchen sind die Werthe der Columnen 3, 4 und 5 hervorgegangen; die sechs ersten Luftarten sind diejenigen, die im Vorstehenden als Gase d. h. als solche Luftarten behandelt worden sind, die sich der Zustandsgleichung der Gase hinreichend genau unterwerfen und bei denselben zeigt sich auch das Verhältniss $c_p : c_v$, d. h. der Werth $\varkappa$ von dem Mittelwerthe 1,410 wenig abweichend.

Die folgende Tabelle ist beigefügt worden, weil eine Reihe der aufgeführten Luftarten oder Dämpfe, wie Wasser, Ammoniak, schweflige Säure und die verschiedenen Kohlenwasserstoffverbindungen (im Leuchtgase enthalten) eine wichtige technische Rolle spielen.

Bei Benutzung der Tabellenwerthe ist aber wohl zu beachten, dass die Werthe der specifischen Wärme bei constantem Drucke (c_p) Versuchen entspringen, dagegen diejenigen bei constantem Volumen (c_v) nach Gl. (42) berechnet sind, sowie endlich, dass bezüglich der Werthe $\varkappa$, mit Ausnahme der eigentlichen Gase, noch grosse Unsicherheit herrscht. Bei Anwendung der betreffenden Zahlenwerthe wird man daher immer den Zusatz denken müssen, dass die betreffenden Dämpfe im Gaszustande vorausgesetzt werden, in welchem sie dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze unterworfen wären. Da bei einer gewissen Anzahl solcher Dämpfe, wie insbesondere die Versuche von E. Wiedemann gezeigt haben, die specifische Wärme c_p bei constantem Drucke mit der Temperatur variirt, also wie man das nach Regnault bei den eigentlichen Gasen annehmen kann, keineswegs constant ist, so ist die grössere Zahl der in Columne 5 angegebenen und der daraus abgeleiteten Werthe der Columnen 6 und 7 mit Unsicherheiten behaftet; jedenfalls ist es misslich, anzunehmen, wie dies mehrfach geschehen ist, dass die Grösse $\varkappa$ einfach nur von der Atomzahl der betreffenden Verbindung abhängig sein soll, denn selbst bei den zweiatomigen Gasen wie Chlor und Brom zeigen sich schon beträchtliche Ab-

weichungen. Immerhin wird man unter dem Vorbehalt, dass es sich bei den betreffenden technischen Untersuchungen um Näherungsrechnungen handelt, von der Tabelle Gebrauch machen dürfen, auch bei solchen Luftarten, die unter gewöhnlichen Verhältnissen dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze nicht folgen.

Führt man, wie dies bei der Betrachtung der Zustandsgleichung in § 19 geschehen ist, das relative Gewicht ε des Gases in Hinsicht des Wasserstoffes auch in die Formeln des vorhergehenden Paragraphen ein, so ergeben sich noch eine Reihe von einfachen Sätzen, die der Hervorhebung werth sind. Multiplicirt man Gl. (42) auf beiden Seiten mit ε, so folgt

$$\varepsilon(c_p - c_v) = AB\varepsilon\ .$$

Da aber nach Gl. (11) die Beziehung $B_0 = B\varepsilon$ besteht, wobei B_0 die Constante B der Zustandsgleichung auf Wasserstoff angewendet ist ($B_0 = 422{,}591$) Tab. S. 96, so folgt

$$\varepsilon(c_p - c_v) = AB_0\ , \tag{45}$$

wonach also für alle Gase die linke Seite der Gleichung als eine constante Grösse erscheint, worauf schon Clapeyron*) aufmerksam gemacht hat. Der Werth von AB_0 ist übrigens, was schon in § 19, S. 97, bei Gl. (12) nebenbei bemerkt wurde, so nahe der Einheit gleich (genau ist nach den in vorliegender Schrift benutzten Werthen der Constanten A und B_0 die Grösse $AB_0 = 0{,}9967$), dass man in den meisten Fällen der Rechnungen von der Annahme $AB_0 = 1$ Gebrauch machen könnte, was jedoch, weil eine theoretische Begründung dieser Beziehung zur Zeit noch nicht vorliegt, im weitern Verlaufe der vorliegenden Schrift unterlassen wird.

Für die in der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen S. 121 aufgeführten Gase und Dämpfe ist in Col. 6 die specifische Wärme bei constantem Volumen (c_v) nach Gl. (45) unter Zugrundelegung der in Col. 5 angegebenen Versuchswerthe der specifischen Wärme bei constantem Drucke (c_p) berechnet worden und Col. 7 giebt das zugehörige Verhältniss $c_p : c_v$.

Da bei allen aufgeführten Luftarten das relative Gewicht ε mit dem halben Molekulargewicht m übereinstimmt, so liesse sich Gl. (45) auch schreiben:

*) Poggendorff's Annalen. Bd. 59. S. 451. (1843.)

$$m\,(c_p - c_v) = 2\,A B_0 = 1{,}9934\,. \tag{46}$$

Für eine mechanische Mischung von Gasen fand sich nach Gl. (24), wenn $G_1\, G_2\, G_3 \ldots$ die Gewichte der einzelnen Gase und $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots$ die relativen Gewichte derselben in Hinsicht auf Wasserstoff bedeuten,

$$\varepsilon_m = \frac{\Sigma\,(G)}{\Sigma\left(\frac{G}{\varepsilon}\right)}$$

und daher wäre für die Gewichtseinheit einer solchen Mischung nach Gl. (45), wenn für dieselbe die specifischen Wärmen mit c'_p und c'_v bezeichnet werden,

$$c'_p - c'_v = A B_0\, \Sigma\left(\frac{G}{\varepsilon}\right)\,, \tag{47}$$

oder wenn man die Molekulargewichte der Gase substituirt:

$$c'_p - c'_v = 2\,A B_0\, \Sigma\left(\frac{G}{m}\right)\,. \tag{48}$$

Für diejenigen Mischungen, die aus einfachen Gasen bestehen, für welche $\varkappa = 1{,}410$ ist, entspricht dieser Werth von $\varkappa$ auch der Mischung selbst und daher folgt

$$c'_v = \frac{2\,A B_0}{\varkappa - 1}\, \Sigma\left(\frac{G}{m}\right) = 4{,}8618\,.\,\Sigma\left(\frac{G}{m}\right)\,.$$

So besteht z. B. atmosphärische Luft aus $G_1 = 0{,}7644$ kg Stickstoff und $G_2 = 0{,}2356$ kg Sauerstoff und es ist $m_1 = 28$, $m_2 = 32$, daher folgt für dieselbe nach der letzten Formel

$$c'_v = 0{,}1685\,,$$

wie auch früher gefunden wurde.

In Fällen, wie den vorstehenden, berechnet man am besten zunächst das relative Gewicht ε_m der Mischung, dann nach Gl. (45)

$$\varepsilon_m\,(c'_p - c'_v) = A B_0 \tag{48a}$$

und hieraus die Differenz $c'_p - c'_v$, woraus für den besondern Fall, dass die Mischung aus einfachen Gasen besteht, für $\varkappa = 1{,}410$, auch noch c'_v und c'_p gesondert berechnet werden können, wie es im vorstehenden Beispiel geschehen ist.

Für den besondern Fall, dass die einzelnen Gase in solchem Verhältniss gemischt sind, dass daraus eine chemische Verbindung erzeugt werden kann, folgt für die letztere

$$\varepsilon(c_p - c_v) = AB_0 ,$$

wonach zwischen chemischer Verbindung und mechanischer Mischung die Beziehung

$$\varepsilon(c_p - c_v) = \varepsilon_m(c'_p - c'_v) \qquad (48\text{b})$$

besteht; oder es ist, wenn man die Gln. (25) und (26) benutzt, nach Gl. (48 a)

$$c'_p - c'_v = \frac{AB_0}{m} \cdot n \qquad (49\text{a})$$

und nach (48 b)

$$c_p - c_v = \frac{2}{n}(c'_p - c'_v) , \qquad (49\text{b})$$

wobei m das Molekulargewicht der Verbindung und n die Atomzahl bedeutet.

So ist z. B. bei einer Mischung von Wasserstoff und Sauerstoff als Knallgas und bei ihrer Verbindung zu Wasserdampf $m = 18$ und $n = 3$ (vergl. S. 106). Daher für das Knallgas $c'_p - c'_v = 0{,}1667$ und für Wasserdampf $c_p - c_v = 0{,}1111$. Für Knallgas ist $\varkappa = 1{,}410$ und daher folgt weiter für dieses $c'_v = 0{,}4066$ und $c'_p = 0{,}5733$, während für Wasserdampf (im Gaszustande gedacht) die Werthe c_p und c_v nicht berechnet werden können, weil ihr Verhältniss nicht bekannt ist. Für Wasserdampf fand Regnault allerdings $c_p = 0{,}4805$, wonach $c_v = 0{,}3694$ wäre; der Versuchswerth gilt aber für Wasserdampf, der dem Condensationspunkte nahe stand; es wird sich später Gelegenheit finden, diese, auch technisch wichtige Frage noch näher zu verfolgen.

Um ein weiteres Beispiel anzuführen, sei noch Ammoniak erwähnt; für dieses und für die entsprechende mechanische Mischung ist (s. S. 107) $m = 17$ und $n = 4$, daher nach Gl. (49 a und b)

$c_p' - c_v' = 0{,}2345$ für die Mischung,
$c_p - c_v = 0{,}1172$ für Ammoniakdampf.

Da die Mischung aus einfachen Gasen besteht, so ist für dieselbe wieder $\varkappa = 1{,}410$ und daher:

$$c_p' = 0{,}8064 ; \quad c_v' = 0{,}5719 .$$

Die Differenz $c_p - c_v$ für Ammoniakdampf steht wieder in Uebereinstimmung mit den in der Tabelle angegebenen Werthen, was in der Art der Berechnung der Werthe der Col. 6 seinen Grund hat.

Namen der Gase	1 Zusammen-setzung	2 Atom-zahl n	3 Molekular-gewicht m	4 Relatives Gewicht in Hinsicht des Wasserstoffes ε	5 Specifische Wärme bei constantem Druck c_p beobachtet (Regnault)	6 Specifische Wärme bei constantem Volumen c_v berechnet (Gl. 45 S. 118)	7 Werthe von $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$	8 Werthe von $m c_p$
Wasserstoff	H_2	2	2	1.	3.4090	2.4123	1.412	6.818
Sauerstoff	O_2	„	32	15.9635	0.2175	0.1551	1.403	6.960
Stickstoff	N_2	„	28	14.0250	0.2438	0.1727	1.411	6.826
Stickoxyd	NO	„	30	14.9928	0.2317	0.1652	1.403	6.951
Kohlenoxyd	CO	„	28	13.9662	0.2450	0.1736	1.411	6.860
Chlorwasserstoff	HCl	„	36,5	18.1865	0.1852	0.1304	1.420	6.760
Chlor	Cl_2	„	71	35.3768	0.1210	0.0928	1.303	8.591
Brom	Br_2	„	160	79.0817	0.0555	0.0429	1.294	8.880
Kohlensäure	CO_2	3	44	22.0762	0.2169	0.1718	1.263	9.544
Stickoxydul	N_2O	„	44	22.0055	0.2262	0.1809	1.250	9.953
Wasser	H_2O	„	18	8.9792	0.4805	0.3695	1.300	8.649
Schweflige Säure	SO_2	„	64	31.9261	0.1544	0.1232	1.253	9.882
Schwefelwasserstoff	H_2S	„	34	16.9607	0.2432	0.1844	1.319	8.269
Schwefelkohlenstoff	CS_2	„	76	37.9122	0.1569	0.1306	1.201	11.924
Ammoniak	NH_3	4	17	8.5100	0.5084	0.3913	1.299	8.643
Sumpfgas	CH_4	5	16	7.9801	0.5929	0.4680	1.267	9.486
Chloroform	$CHCl_3$	„	119,5	59.5495	0.1567	0.1400	1.128	18.726
Holzgeist	CH_4O	6	32	15.9616	0.4580	0.3956	1.158	14.656
Aethylen	C_2H_4	„	28	13.9648	0.4040	0.3326	1.215	11.312
Aethylchlorid	C_2H_5Cl	8	64,5	32.1527	0.2738	0.2428	1.128	17.660
Aethylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	„	99	49.3416	0.2293	0.2091	1.097	22.701
Alkohol	C_2H_6O	9	46	22.9425	0.4534	0.4100	1.106	20.856
Aethylcyanid	C_3H_5N	„	55	27.4632	0.4262	0.3899	1.093	23.441
Aceton	C_3H_6O	10	58	28.9287	0.4125	0.3781	1.091	23.925
Benzol	C_6H_6	12	78	38.8998	0.3754	0.3498	1.073	29.281
Essigäther	$C_4H_8O_2$	14	88	43.8926	0.4008	0.3781	1.060	35.270
Aether	$C_4H_{10}O$	15	74	36.9232	0.4797	0.4522	1.061	35.498
Schwefeläthyl	$C_4H_{10}S$	„	90	44.9047	0.4008	0.3786	1.059	36.072
Terpentinöl	$C_{10}H_{16}$	26	136	67.8285	0.5061	0.4914	1.030	68.830

Vergl. Gmelin-Kraut, Handbuch der anorg. Chemie. Bd. I. Abth. 1. S. 276. — Clausius, Annalen der Chemie und Pharmacie. Bd. 118. — Naumann. Ebendaselbst Bd. 142.

§ 23. Zweite Hauptgleichung der Thermodynamik unter Berücksichtigung des Verhaltens der Gase. — Bestimmung der Carnot'schen Function.

Die zweite Hauptgleichung war nach Gl. (IIa) S. 59 allgemein giltig für jeden Körper und hatte folgende Form:

$$Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v} = T,$$

hierin war T eine Function der Temperatur t, von welcher nur bekannt war, dass sie für alle Körper der Natur von gleicher Form sein müsse; über die Form selbst ergaben aber die allgemeinen Untersuchungen keinen Aufschluss.

Setzt man nun aber in vorstehender Gleichung die Werthe von Y und X ein, welche sich für Gase durch die Gln. (44) herausstellten, nämlich:

$$Y = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1} \quad \text{und} \quad X = \frac{v}{\varkappa - 1}$$

und ersetzt man ebenso die beiden partiellen Differentialquotienten durch die Gl. (40), wie sie sich für Gase fanden, nämlich:

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{B} \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{B},$$

so schreibt sich die vorstehende Hauptgleichung:

$$T = \frac{\varkappa p}{\varkappa - 1} \cdot \frac{v}{B} - \frac{v}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p}{B}$$

oder einfach:

$$T = \frac{pv}{B},$$

oder unter Heranziehung der Zustandsgleichung der Gase (3a) S. 89:

$$T = a + t = 273 + t, \tag{IIb}$$

ein für die Thermodynamik hochbedeutungsvolles Resultat. Die Carnot'sche Temperaturfunction ist also nichts anderes, als die absolute Temperatur, also die Temperatur des Körpers nach Celsius, gemessen von einem Punkte aus, der 273° unter

dem Gefrierpunkte des Wassers liegt. Im weiteren Verlauf dieser Schrift wird denn nun auch die Bezeichnung »Carnot'sche Function« nicht mehr vorkommen, sondern einfach von der absoluten Temperatur eines Körpers gesprochen werden; die Zustandsgleichung der Gase wird einfach in der Form

$$pv = BT \tag{50}$$

geschrieben und die Temperaturerhöhung dt in der Regel durch dT ausgedrückt werden.

Es ist schon wiederholt und zuerst bei der Einführung der Carnot'schen Function in die allgemeinen Betrachtungen des ersten Abschnittes dieser Schrift darauf hingewiesen worden, dass nicht nur die Form, sondern auch der Werth dieser Function bei der gleichen Temperatur für alle Körper derselbe sein müsse; es ist daher vollständig hinreichend, auch nur für eine Art der Körperform die Beziehung aufzufinden, und dazu haben uns jetzt die Gase das Mittel an die Hand gegeben; es ändert nichts an der vollen Zuverlässigkeit der Angabe der Gl. (IIb), dass streng genommen unter allen Gasen nur Wasserstoff und wohl auch dieser nur innerhalb gewisser Grenzen dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze folgt, man braucht sich dann eben nur sämmtliche Betrachtungen, welche der Ableitung der Gl. (IIb) vorausgingen, auf diesen einen Körper und sein Gas-Intervall angewendet zu denken*).

*) Den Werth der Carnot'schen Function für einzelne Temperaturwerthe hat zuerst Clapeyron (a. a. O. 1834) zu bestimmen gesucht unter geschickter Benutzung verschiedener, damals freilich noch unsicherer Resultate experimenteller Untersuchungen über Gase und Dämpfe. Die von ihm mit C bezeichnete Temperaturfunction steht mit der oben im Texte benutzten Bezeichnung in der Beziehung $C = AT$, aus welcher durch Differentiation $\frac{dC}{dt} = A = 0{,}002358$ resultirt. Für diesen Differentialquotienten giebt Clapeyron auf Grund gewisser Versuche den Werth $0{,}00187$, nach einer andern Versuchsreihe $0{,}002565$, macht auf die geringe Abweichung beider Werthe von einander aufmerksam und schliesst, dass C nur langsam mit der Temperatur wachse. Clapeyron berechnet dann weiter für fünf verschiedene zwischen $0°$ und $156{,}8°$ liegende Temperaturen den reciproken Werth von C nach zwei verschiedenen Methoden, von denen die eine Werthe ergab, die fast genau mit den richtigen Werthen übereingestimmt haben würden, wenn Clapeyron nicht für den reciproken Werth des Ausdehnungs-

Die Feststellung der Carnot'schen Function führt nun sogleich auf die Function $S = f(p, v)$, welche im ersten Abschnitte dieser Schrift (S. 29) eingeführt wurde und die bei den weiteren Betrachtungen sich ebenfalls als eine Function der Temperatur herausstellte (s. S. 57).

Nach Gl. (43) S. 59 ergab sich die Beziehung

$$\frac{dS}{S} = \frac{dt}{T} \,.$$

Setzt man hier nun nach dem Vorstehenden $T = a + t$ ein, so ergiebt die Integration

$$S = k(a + t) \,,$$

wobei k eine willkürliche Integrationsconstante bedeutet, für deren Werth man die Einheit setzen kann. (Vergleiche die Anmerkung auf S. 30.)

Es folgt daher das weitere wichtige Resultat, dass die Function S mit der Carnot'schen Function T identisch ist und daher gleichfalls durch die absolute Temperatur gemessen wird.

In allen Formeln des zweiten Abschnittes kann daher die Function S durch die absolute Temperatur ersetzt werden und insbesondere sind es die dort entwickelten Sätze über die »Abbildung der Druckcurven und Indicatordiagramme« (§ 14, S. 66), die jetzt eine einfache Deutung gewinnen.

Fasst man die Function S als Function von p und v auf, so schreibt sich

$$f(p, v) = T \,,$$

welche Gleichung allerdings nur bei Gasen in die Zustandsgleichung (50) S. 123, nämlich

$$pv = BT \,,$$

übergeht. Für alle andern Körper ist $f(p, v)$ von anderer und zwar, nebenbei bemerkt, noch von unbekannter Form.

coefficienten der Gase den damals bekannten Werth 267 (statt 273) hätte benutzen müssen.

Die Form der Carnot'schen Function hat im Grunde genommen zuerst Helmholtz (»Ueber die Erhaltung der Kraft«. Berlin 1847. S. 36) erkannt, indem er eine der Gleichungen von Clapeyron (die zweite Hauptgleichung) mit einer Gleichung zusammenstellte, welche zuerst Holtzmann (»Ueber die Wärme und Elasticität der Gase« Mannheim 1845) entwickelt hatte. Helmholtz hat aber damals die Frage nicht weiter verfolgt.

Genau in der Form $C = A(a + t)$ ist die Carnot'sche Function zuerst von Clausius in seiner ersten Abhandlung (1850) gegeben worden.

§ 24. Die innere Arbeit (Energie) der Gase.

Gleich im Eingange der allgemeinen Untersuchungen des ersten Abschnittes wurde die Function $U = F(p, v)$ (Gl. 3 und 4, S. 23) in die Betrachtungen eingeführt und als innere Arbeit des Körpers näher besprochen. Das Differential wurde in der Form

$$dU = X dp + Z dv$$

geschrieben. Die Function Y, deren Bedeutung in § 4, S. 28, für Gase bereits erkannt worden ist, steht nach Gl. (12) S. 28 zu dem partiellen Differentialquotienten Z in der Beziehung $Z = Y - p$ und daher folgt speciell für Gase, wenn man die erste der Gln. (24) hier benutzt und die andere dieser Gln. wieder mit aufführt

$$Z = \frac{p}{\varkappa - 1} \quad \text{und} \quad X = \frac{v}{\varkappa - 1} .$$

Die Substitution in vorstehende Formel für dU ergiebt daher:

$$dU = \frac{1}{\varkappa - 1} (v dp + p dv)$$

oder einfach:

$$dU = \frac{d(pv)}{\varkappa - 1} ; \qquad (51)$$

durch Integration folgt, wenn mit U_0 die Integrationsconstante bezeichnet wird:

$$U = U_0 + \frac{pv}{\varkappa - 1} \qquad (52)$$

und damit ist denn für Gase auch die Form der Function $U = F(p, v)$ bestimmt. Der absolute Werth der Constanten U_0 ist nicht bestimmbar und wird möglicherweise für verschiedene Gase verschieden sein, wenn man bei Betrachtung derselben von gleichen Anfangswerthen, sei es des Druckes, des Volumens oder der Temperatur ausgeht. Für den grössten Theil aller physikalischen und technischen Untersuchungen der Gase ist aber auch die Kenntniss der Constanten U_0 nicht erforderlich, da bei den gewöhnlichen Fällen der Anwendung der Gl. (52) die Grösse U_0 aus den Formeln verschwindet.

Ersetzt man in den beiden vorstehenden Gleichungen $p v$ durch $B T$ und multiplicirt man auf beiden Seiten mit A, so folgt:

$$A d U = \frac{A B}{\varkappa - 1} d T$$

und

$$A U = A U_0 + \frac{A B T}{\varkappa - 1} ;$$

oder wenn man die eine der in den Gln. (43) S. 115 angegebenen Beziehungen benutzt:

$$A d U = c_v d T \qquad (51\,a)$$

und

$$A U = A U_0 + c_v T \, . \qquad (52\,a)$$

In der letzteren Formel bedeutet $A U$ die innere Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen, für welche im Weiteren die einfache Bezeichnung $A U = J$ wie auch $A U_0 = J_0$ benutzt werden soll; es ist daher auch

$$d J = c_v d T \qquad (51\,b)$$

und

$$J = J_0 + c_v T \, . \qquad (52\,b)$$

Die Grösse J kann als »Wärme-Inhalt« der Gewichtseinheit Gas bei der (absoluten) Temperatur T bezeichnet werden.

Bemerkenswerth ist, dass J, wie $A U$, nur von der Temperatur T abhängig ist, welchen Werth auch der Druck p oder das Volumen v der Gewichtseinheit des Gases haben möge. Denkt man sich das Gas von einer bestimmten Anfangstemperatur T_1 auf irgend welchem Wege auf die Temperatur T gebracht, so folgt nach Gl. (52 b)

$$J - J_1 = c_v (T - T_1)$$

und diese Grösse bedeutet diejenige Wärmemenge, welche von der gesammten Wärmemenge, die bei dieser Ueberführung von aussen zuzuführen war, im Gase selbst zurückgeblieben ist, also zur Vergrösserung des Wärme-Inhaltes verbraucht wurde. In den folgenden Betrachtungen soll übrigens statt des Ausdrucks Wärme-Inhalt eines Gases auch die Bezeichnung »Gaswärme« benutzt werden.

Es liegt der Gedanke nahe, dass beim absoluten Nullpunkte,

also für $T = 0$, von einem Wärme-Inhalte überhaupt nicht mehr gesprochen werden könne und dass daher in den Gln. (52 a) und (52 b) $A\,U_0$ resp. J_0 der Null gleich gesetzt werden dürfe.

Einer solchen Annahme und der damit verbundenen Vereinfachung der beiden Gleichungen steht für die meisten Fälle ihrer Verwerthung nichts im Wege; immerhin ist es zu empfehlen, diese Vereinfachung zu unterlassen, denn es ist zu bedenken, dass beide Gleichungen aus Beobachtungen an Gasen entsprungen sind, die doch nur zwischen verhältnissmässig engbegrenzten Temperaturwerthen stattgefunden haben. Bei Gasen, wie auch bei allen andern Körpern, ist allerdings die Annahme gestattet, dass beim absoluten Nullpunkte eine vollständige Auflösung und Zerstreuung des Körpers in der Art vorliege, dass alle kleinsten Theile desselben nicht nur vollständig aus dem Bereiche der gegenseitigen Krafteinwirkungen herausgetreten, sondern auch in den Ruhezustand übergegangen sind.

§ 25. Die Wärmegleichungen und das Wärmegewicht der Gase.

Benutzt man die Ergebnisse der letzten Paragraphen zur Umformung der im ersten Abschnitte aufgeführten allgemeinen Gleichungen (III a) S. 60, so ergiebt zuerst die vierte der dort aufgeführten Formeln, wenn man für sie Gl. (51) oder (51 a) benutzt, speciell für Gase:

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1} d(pv) + A p\, dv \tag{53a}$$

und:

$$dQ = c_v\, dT + A p\, dv\ . \tag{53b}$$

Die Umformung der ersten drei der Gln. (III a) ergiebt dagegen, wie sich leicht übersehen lässt, wenn man die Formeln (40), (43) und (44) S. 115 benutzt:

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}(v\,dp + \varkappa p\, dv) \tag{53c}$$

$$= c_v\left(dT + (\varkappa - 1)\, T\frac{dv}{v}\right) \tag{53d}$$

$$= c_p\left(dT - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\cdot T\frac{dp}{p}\right) \tag{53e}$$

und in der vorstehenden Form werden denn nun bei Gasen die Gleichungen in Anwendung kommen; die verschiedenen Formeln sind identisch, bei Lösung bestimmter Probleme greift man diejenige heraus, die voraussichtlich am schnellsten zum Ziele führt, wobei dann in der Regel nur noch die Benutzung der Zustandsgleichung in einer der im Folgenden angegebenen Formen in Betracht kommt, wie sie aus der Verbindung der Gl. (50) mit der Gl. (43) S. 115 resultirt:

$$Apv = ABT = c_v(\varkappa - 1)\,T = c_p \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot T\,. \tag{54}$$

Nun lassen sich auch noch verschiedene Formeln für das Wärmegewicht P der Gase entwickeln. Ersetzt man in der letzten der Gln. (IIIa) S. 60 die Function S durch die absolute Temperatur T, so ist auch:

$$dQ = A\,T\,dP\,. \tag{53f}$$

Drückt man nach Gl. (54) T durch pv aus, so ergiebt die Substitution in Gl. (53c) sogleich

$$dP = \frac{dQ}{AT} = \frac{c_v}{A}\left(\frac{dp}{p} + \varkappa\,\frac{dv}{v}\right)$$

und ferner folgt, wenn die Gl. (53d) und (53e) durch AT dividirt werden:

$$dP = \frac{c_v}{A}\left(\frac{dT}{T} + (\varkappa - 1)\,\frac{dv}{v}\right)$$

und

$$dP = \frac{c_p}{A}\left(\frac{dT}{T} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{dp}{p}\right)\,.$$

Integrirt man diese Gleichungen und setzt man die Integrationsconstante P_0, die übrigens in den meisten Fällen der Anwendung aus den Formeln herausfällt, so ergiebt sich

$$P = P_0 + \frac{c_v}{A}\,\mathrm{logn}\,(pv^{\varkappa}) \tag{55a}$$

oder

$$= P_0 + \frac{c_v}{A}\,\mathrm{logn}\,(Tv^{\varkappa-1}) \tag{55b}$$

oder endlich auch

$$= P_0 + \frac{c_p}{A}\,\mathrm{logn}\left(\frac{T}{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}\right)\cdot \tag{55c}$$

Die sämmtlichen im Vorstehenden entwickelten Gleichungen gelten für die Gewichtseinheit (1 kg) Gas; sind demnach für ein solches von den drei Grössen p, v und T zwei gegeben, so bestimmt man die dritte Grösse aus Gl, (54) und berechnet dann mit Leichtigkeit nach einer der Gln. (55) das Wärmegewicht P; die Benutzung der Gl. (53) zur Bestimmung der Wärmemenge Q für irgend eine endliche Zustandsänderung des Gases erfordert dagegen die Angabe, auf welchem Wege der Uebergang stattgefunden hat. Es wird nun Aufgabe der folgenden Untersuchungen sein, für eine Reihe der wichtigsten Uebergänge solcher Art die Rechnungen durchzuführen.

Zu einer besondern Bemerkung giebt noch Gl. (53b) Anlass; ersetzt man in derselben, dem gewöhnlichen Gebrauche entsprechend, die absolute Temperatur T durch die Temperatur t, so ist auch

$$dQ = c_v dt + Apdv \;.$$

Die dem Gase mitzutheilende Wärmemenge theilt sich demnach in zwei Theile, wovon der im Gase selbst verbrauchte Theil $c_v dt$ derjenigen Wärmemenge entspricht, welche dem Gase zugeführt werden müsste, wenn es bei constantem Volumen dieselbe Temperaturerhöhung erfahren sollte; dieser im Innern des Gases verbrauchte Theil wäre also immer der gleiche, welche Aenderung mit dem Gase nach Druck und Volumen auch stattfinden möge. Der Gedanke, dass dem so sei, liegt so nahe, dass man die vorstehende Gleichung auch ohne Weiteres hätte anschreiben können; die Verbindung der Gleichung mit der Zustandsgleichung der Gase, dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze, führt dann mit Leichtigkeit auf alle die Gleichungen, die im Vorstehenden für Gase aufgefunden worden sind. Der angedeutete Weg ist auch längst schon und vielfach, wie u. A. von Robert Mayer eingeschlagen worden. Nach den neueren Anschauungen (der kinetischen Gastheorie) denkt man sich, dass bei einem vollkommenen Gase die Moleküle ganz aus dem Bereich ihrer gegenseitigen Anziehung herausgetreten sind, sich geradlinig gleichförmig im Raume fortbewegen und durch den Anstoss gegen andere Moleküle und die Gefässwandungen nur Richtungsänderungen erleiden. Die im Innern der Gase verbrauchte Wärmemenge betrachtet man dann als verwendet zur Erhöhung der

Summe der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie der Moleküle; diese kinetische Energie nimmt man als der absoluten Temperatur proportional und ihren Zuwachs eben durch das erste Glied der vorstehenden Gleichung gegeben an. Bei den meisten luftförmigen Körpern sind die Krafteinwirkungen der Moleküle auf einander nicht mehr zu vernachlässigen und werden um so stärker hervortreten, je dichter die Luftart ist, je kleiner also das specifische Volumen ist, je mehr die Moleküle einander genähert sind. Man kann dann die Gleichung in folgender Form schreiben

$$dQ = c_w dt + dR + Ap\, dv$$

und die Grösse R als eine Function von p und v oder auch von t und v ansehen; es schreibt sich daher auch:

$$dQ = \left(c_w + \frac{\partial R}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial R}{\partial v} + Ap\right) dv$$

und hieraus fände sich bei der Erwärmung bei constantem Volumen im Vergleich mit der obigen Gleichung

$$c_v = c_w + \frac{\partial R}{\partial t}\,.$$

Die Grösse c_w haben Rankine und Clausius die wahre specifische Wärme genannt, die also bei einem vollkommenen Gase, für welches $R = 0$ ist, mit der specifischen Wärme bei constantem Volumen identisch wird; bei andern Luftarten würde dann, wenn man auch die wahre specifische Wärme als eine constante Grösse ansieht, die specifische Wärme bei constantem Volumen als eine variable Grösse hervortreten. Ueber die Function R der vorstehenden Gleichung ist nur soviel als sicher anzunehmen, dass sie bei denjenigen Körpern, die wir oben speciell als Gase bezeichnet haben, wenigstens innerhalb der Druck- und Temperaturgrenzen, die gewöhnlich vorliegen, ihrem numerischen Werthe nach als verschwindend klein betrachtet werden darf.

Bei der Untersuchung der Dämpfe bietet sich Gelegenheit, auf die vorstehenden Andeutungen zurückzukommen.

§ 26. Die isothermische und isodynamische Curve der Gase.

Die »isothermische Curve« (§ 6 S. 36) giebt das Gesetz, nach welchem sich in einem Körper bei Zustandsänderungen auf umkehrbarem Wege der Druck p mit dem Volumen v ändert, sofern durch Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung die Temperatur T constant erhalten wird.

Speciell für Gase findet sich aus deren Zustandsgleichung:

$$pv = BT$$

sogleich, wenn der Anfangszustand durch die Grössen p_1, v_1 und T_1 gegeben ist, wegen $T = T_1$ als Gleichung der gesuchten Curve:

$$pv = p_1 v_1 \ .$$

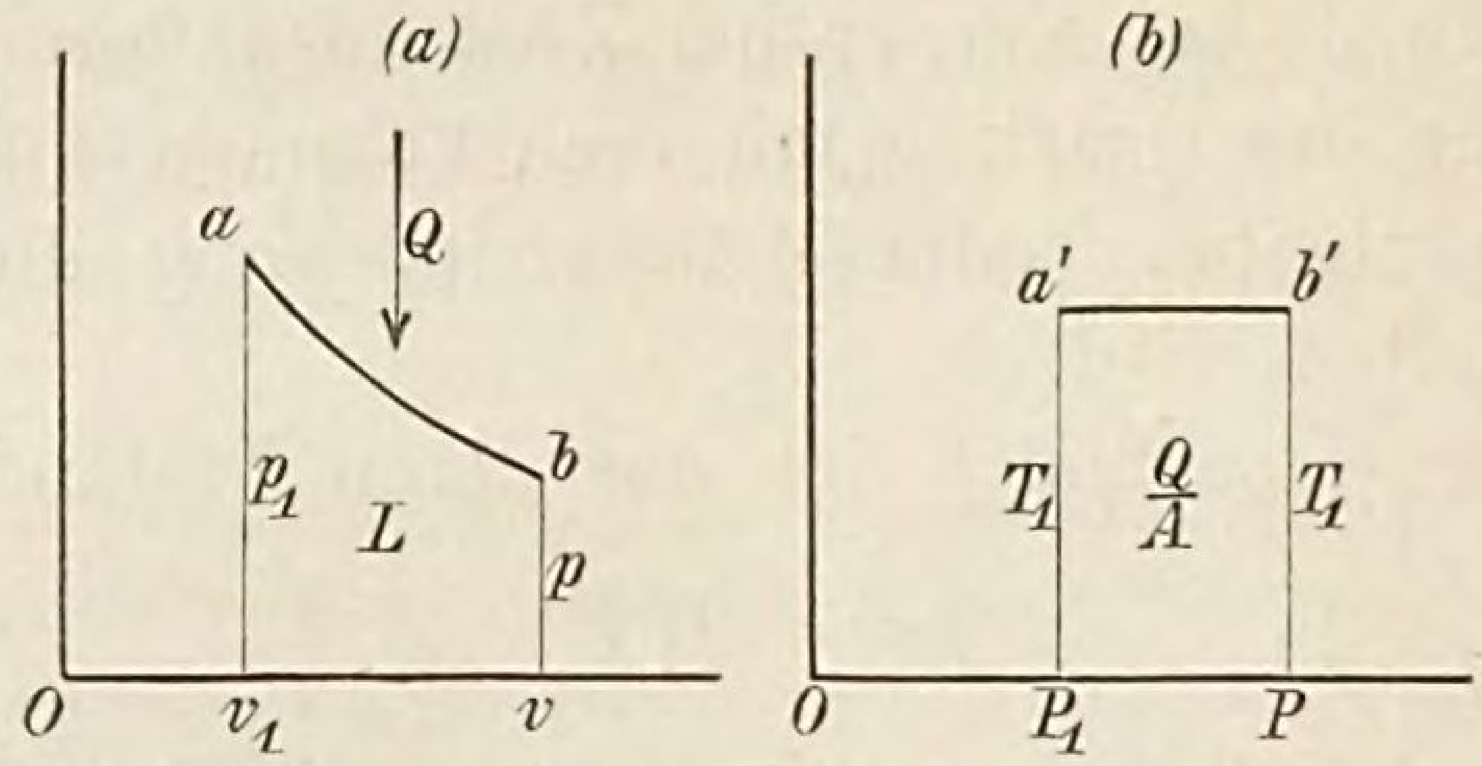
Die isothermische Curve der Gase ist daher eine »gleichseitige Hyperbel«, deren Constante $p_1 v_1 = BT_1$ durch den Anfangszustand und zwar, wenn man wie hier die Gewichtseinheit eines Gases zu Grunde legt, durch die Anfangstemperatur T_1 allein schon vollständig bestimmt ist.

Die »isodynamische Curve« stellt (§ 6 S. 35) die Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v dar, wenn während der Zustandsänderung die innere Arbeit U constant erhalten wird; die mitzutheilende oder zu entziehende Wärmemenge also vollständig in äussere Arbeit verwandelt, bez. durch solche erzeugt wird. Aus der Gl. (52) und (52b), S. 125, ergiebt sich aber sofort unter Voraussetzung eines constanten Werthes von U, dass auch pv und ebenso die Temperatur T constant erscheint. Bei Gasen ist daher die isodynamische Curve mit der isothermischen Curve identisch. Expandirt die Gewichtseinheit Gas vom Volumen v_1 auf das Volumen v isothermisch oder isodynamisch (Fig. 19a) a. f. S., so bestimmt sich leicht auch die Abbildung $a'b'$ der Druckcurve ab, wenn man in Fig. 19b die zugehörigen Wärmegewichte als Abscissen und die Temperaturen T_1 als Ordinaten aufträgt: man berechne nach Gl. (55a) für den Anfangszustand (p_1, v_1) und für den Endzustand (p, v) den Werth P_1, mache also in Fig. 19b

$$O P_1 = \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} p_1 v_1^{\varkappa} \quad \text{und} \quad O P = \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} p v^{\varkappa}$$

und ziehe der Ordinate T_1 entsprechend die Horizontale $a' b'$.

Fig. 19.



Die von der Druckcurve $a b$ begrenzte Fläche repräsentirt die bei der Expansion gewonnene Arbeit, während die durch die Abbildung gegebene Fläche $P_1 a' b' P$ die in Arbeitseinheiten gemessene Wärmemenge Q ergiebt, welche dem Gase während der vorausgesetzten Zustandsänderung von aussen zuzuführen war.

Die Wärmemenge berechnet sich aus den Gln. (53 d) und (53 e), weil $T = T_1$ und $d T = 0$ ist, durch Integration

$$Q = c_v (\varkappa - 1) T_1 \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} = c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p} \tag{56 a}$$

oder in Berücksichtigung der durch Gl. (54) gegebenen Beziehungen auch:

$$Q = A B T_1 \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} = A B T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p} \tag{56 b}$$

und in Berücksichtigung der Zustandsgleichung:

$$= A p_1 v_1 \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} = A p_1 v_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p} \,. \tag{56 c}$$

Da bei unveränderlichem Werthe von U die zugeleitete Wärmemenge Q vollständig in äussere Arbeit umgewandelt wird, so ist

$$Q = A L \tag{57}$$

und daher folgt aus den Gln. (56 b und c) die bei isothermischer oder isodynamischer Expansion oder Compression gewonnene oder aufgewandte Arbeit auch direct:

$$L = B T_1 \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} = B T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p} \tag{58 a}$$

oder auch:

$$L = p_1 v_1 \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} = p_1 v_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p} . \tag{58 b}$$

Aus der Gleichung (57) ist ersichtlich, dass die Abbildung $a' b'$ der hier betrachteten Druckcurve (Fig. 19) den gleichen Flächeninhalt L, wie die Druckcurve selbst umschliesst, ein Satz, der überhaupt für die isothermische Curve eines jeden Körpers giltig ist.

Beispiel. Denkt man sich, ein Kilogramm atmosphärischer Luft von der Temperatur $t_1 = 15^\circ$ Celsius expandire isothermisch vom Anfangsdruck 2,5 Atmosphären auf 1 Atmosphäre Druck, so ist $p_1 = 2{,}5 . 10333$ und $p = 1 . 10333$, sowie $T_1 = 288^\circ$; daher folgt aus der Zustandsgleichung, weil für Luft $B = 29{,}269$ ist, s. S. 96, das specifische Volumen im Anfange und am Ende: $v_1 = 0{,}3263$ cbm und $v = 2{,}5 . v_1 = 0{,}8158$ cbm, daher nach Gl. (58 a) die gewonnene Arbeit $L = 7723{,}85$ mkg und die Wärmemenge, welche mitzutheilen war, um die Temperatur constant zu erhalten: $Q = AL = 18{,}217$ cal.

Nach Gl. (55 a) ergiebt sich, da für Luft die specifische Wärme $c_v = 0{,}1685$ und $\varkappa = 1{,}410$ ist (s. S. 116), das Wärmegewicht im Anfange und am Ende:

$$P_1 = 371{,}78 \quad \text{und} \quad P = 398{,}60 ,$$

wonach sich die Arbeit auch durch den Ausdruck $L = (P - P_1) T_1$ findet.

Die oben für die äussere Arbeit L gegebenen Formeln (58 b) sind in der Physik und Mechanik, wie in der Maschinenlehre schon längst in ausgedehntem Maasse benutzt worden, lange vor dem Entstehen der heutigen Thermodynamik. Die Annahme der Expansion und Compression nach der gleichseitigen Hyperbel war naheliegend, dass aber eine solche Zustandsänderung eines Gases nur unter Voraussetzung entsprechender Mittheilung bez. Entziehung von Wärme erfolgen kann, ist erst durch die Untersuchungen hervorgetreten, welche sich auf die Sätze der Thermodynamik stützen; daher kommt es, dass diese Art der Zustandsänderung auch in Fällen vorausgesetzt worden ist und auffälligerweise noch heute, insbesondere in den elementaren Handbüchern der Physik und Mechanik vorausgesetzt wird, wie z. B. beim Ausflussproblem, bei denen diese Voraussetzung durchaus unzulässig ist.

§ 27. Die adiabatische Curve der Gase.

Findet während der umkehrbaren Zustandsänderung eines Gases und zwar im ganzen Verlauf und in allen Theilen derselben weder eine Mittheilung noch Entziehung von Wärme statt, so ändert sich der Druck p des Gases mit dem Volumen v desselben nach einer Curve, die als »adiabatische Curve« bezeichnet worden ist. (Vergl. § 6, S. 36.)

Bei der adiabatischen Zustandsänderung ändert sich mit Druck und Volumen zugleich auch nach bestimmtem Gesetz die Temperatur T; die betreffenden Aenderungen ergeben sich ohne Weiteres aus den für das Wärmegewicht P der Gase gegebenen Gleichungen (55a bis c) S. 128.

Da unter der bezeichneten Voraussetzung für alle Elemente der Zustandsänderung $dQ = 0$ ist, so folgt nach Gl. (53f) auch $dP = 0$; es ist daher das Wärmegewicht P für alle Punkte der Adiabaten gleich gross; es folgt hiernach aus Gl. (55a), wenn man die willkürliche Constante P_0 Null setzt, für den Anfangs- und Endzustand (Fig. 20) a. f. S.

$$P = \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} p_1 v_1^{\varkappa} = \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} p v^{\varkappa} \tag{59}$$

und demnach die Gleichung der adiabatischen Curve einfach auch

$$p v^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa} . \tag{60}$$

Auf gleichem Wege bestimmt sich aus den Gleichungen (55b) und (55c)

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa-1} \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \tag{61}$$

wonach sich für einen beliebigen Punkt der Adiabate zu einem gegebenen Werth von v oder p die Temperatur T bestimmt.

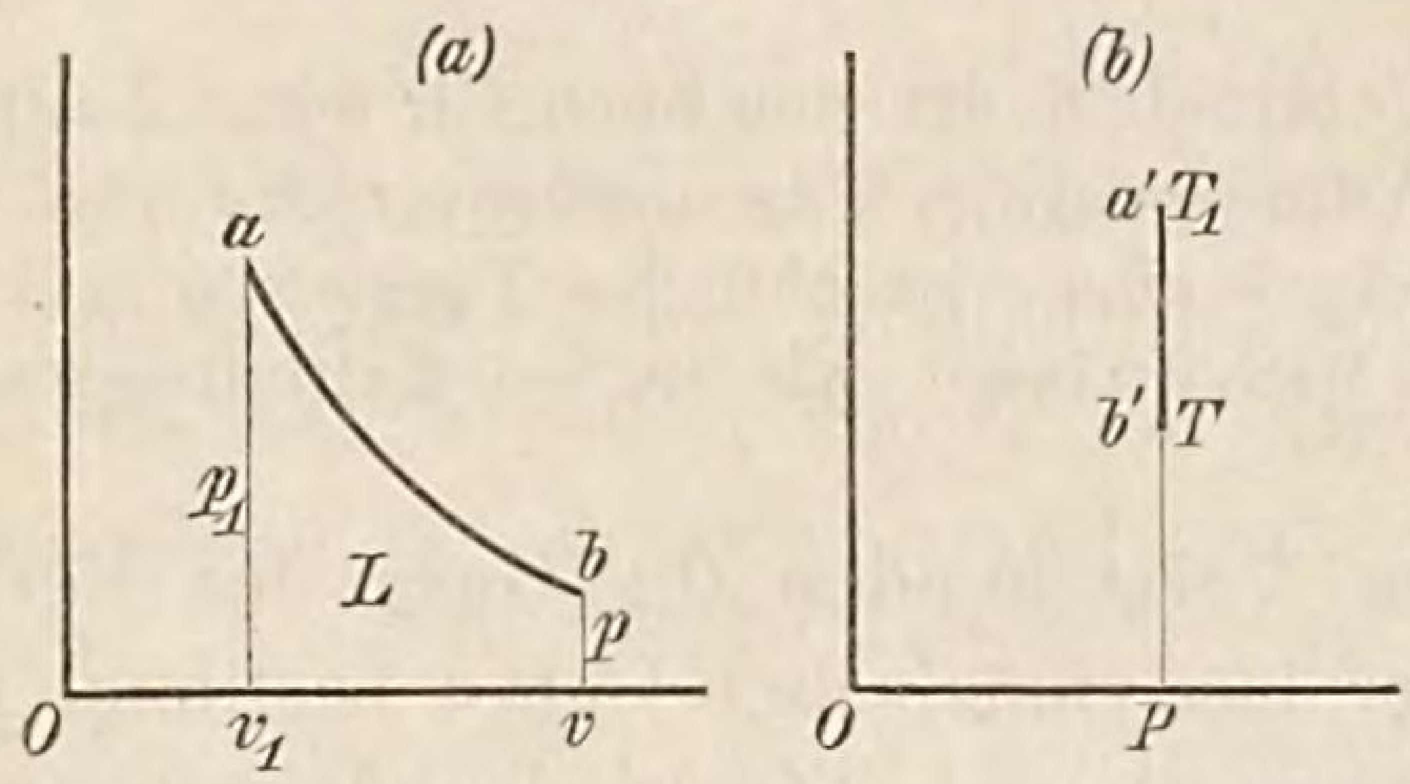
Die Abbildung der adiabatischen Curve ab (Fig. 20a) ist durch die Gerade $a'b'$ (Fig. 20b) gegeben.

Die vorstehenden Resultate (60) und (61) hätten sich auch aus den Gleichungen (53c bis e) ergeben, wenn man dort $dQ = 0$ gesetzt und integrirt hätte.

Die Arbeit L, welche bei adiabatischer Expansion oder

Compression gewonnen bez. verbraucht worden ist, berechnet

Fig. 20.



sich aus Gl. (53b) S. 127, wenn man dort $dQ = 0$ setzt, durch Integration der Gleichung:

$$Apdv = -c_v dT\,,$$

woraus folgt

$$L = \frac{c_v}{A}(T_1 - T)\,. \tag{62 a}$$

Benutzt man hier die Beziehung (54), so schreibt sich auch:

$$L = \frac{1}{\varkappa - 1}(p_1 v_1 - pv) \tag{62 b}$$

oder unter Benutzung der Formeln (61)

$$L = \frac{c_v T_1}{A}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa-1}\right] = \frac{c_v T_1}{A}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \tag{63}$$

In diesen beiden Ausdrücken lässt sich der Factor vor der Parenthese auch noch durch

$$\frac{c_v T_1}{A} = \frac{p_1 v_1}{\varkappa - 1}$$

ersetzen.

Im Uebrigen zeigt Gl. (62b) das Resultat, dass bei adiabatischer Zustandsänderung die Arbeit der Differenz der beiden Rechteckflächen $p_1 v_1$ und pv proportional ist, welche aus den Anfangs- und Endcoordinaten construirt werden können.

Beispiel. Expandirt ein Kilogramm atmosphärischer Luft von der Temperatur $t_1 = 15^\circ$ C. und $2^1/_2$ Atmosphären Druck adiabatisch auf eine Atmosphäre Druck, so ist $T_1 = 288$, $p_1 = 2{,}5 . 10333$ und $p = 1 . 10333$ und das Anfangsvolumen v_1 ergiebt sich, wie in dem Beispiele des vorigen Paragraphen, $v_1 = 0{,}3263$ cbm.

Nach Gl. (61) ergiebt sich zunächst die Endtemperatur $T = 220{,}63$ oder nach Celsius $t = -52{,}^\circ 37$ und das Endvolumen $v = 0{,}6249$, sowie das Expansionsverhältniss: $\frac{v}{v_1} = 1{,}915$.

Die gewonnene Arbeit findet sich nach Gl. (62a) $L = 4813{,}16$ mkg und die entsprechende Wärmemenge, welche hierbei verschwindet, $AL = 11{,}352$ cal. Es findet also hierbei eine beträchtliche Temperatursenkung statt. Das Beispiel entspricht Verhältnissen, wie sie bei Kaltluftmaschinen vorkommen können.

Nachdem im Vorstehenden für Gase der Verlauf der adiabatischen und der isodynamischen Curve bestimmt ist, würde sich nun leicht für irgend eine Zustandsänderung des Gases auf graphischem Wege die Wärmemenge Q ermitteln lassen, wie dieses unter Zugrundelegung der Fig. 4, § 7 S. 37, ausführlich erläutert worden ist. Man erkennt aber jetzt, was dort schon betont wurde, dass die beiden Schnittpunkte c und d bei der Anwendung auf Gase unsicher ausfallen, weil sich hier die betreffenden Curven unter sehr spitzem Winkel schneiden.

Die zweite der oben gegebenen graphischen Methoden, nämlich durch Abbildung der Druckcurve, würde daher vorzuziehen sein.

§ 28. Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme.

Aus den Versuchen von Regnault ist zuerst erkannt worden, dass für diejenigen luftförmigen Körper, welche als Gase bezeichnet worden sind, die specifische Wärme bei constantem Drucke (c_p) als absolut constant, d. h. als unabhängig von Druck, Volumen und Temperatur, anzusehen ist; dieselbe Annahme (vergl. § 11, S. 113) hat man, wozu volle Berechtigung vorliegt, auch auf die specifische Wärme bei constantem Volumen (c_v) übertragen. Für gewisse andere luftförmige Körper und zwar solche, die uns als »Dämpfe« bekannt sind und verhältnissmässig leicht in den flüssigen Zustand übergeführt werden können, hat sich aber diese Annahme nicht bestätigt, vielmehr, wie aus dem unten folgenden Berichte über die betreffenden Versuche hervorgeht, eine Veränderlichkeit der Werthe c_p und c_v ergeben. Dieses Ergebniss hat man gewöhnlich ausschliesslich als eine Folge des Umstandes hingestellt, dass die betreffenden Körper das Mariotte-

und Gay-Lussac'sche Gesetz nicht mehr befolgen, sich also nicht der Zustandsgleichung der Gase unterwerfen; dieser Schluss ist jedoch nicht zulässig.

Setzt man die beiden aus den Gln. (39), S 115, hervorgehenden Werthe von Y und X, welche Gleichungen noch für eine beliebige Veränderlichkeit von c_p und c_v gültig sind, in die zweite Hauptgleichung (II a), S. 59, ein, so folgt

$$(c_p - c_v) \frac{\partial t}{\partial p} \cdot \frac{\partial t}{\partial v} = A T \tag{64}$$

und die Substitution in die erste Hauptgleichung (Ia), S. 59, ergiebt

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial t}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial t}{\partial p}\right) = A\,. \tag{65}$$

Diese beiden Gleichungen gelten für Körper jeder Art, nur dass man jetzt aus der Untersuchung nahezu vollkommener Gase weiss, dass die Temperaturfunction T mit der absoluten Temperatur $(273^0 + t)$ identisch ist.

Macht man nun die ausdrückliche Voraussetzung, dass das betreffende Gas der einfachen Zustandsgleichung $pv = BT$ unterworfen sei, so ergiebt sich

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{B} \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{B}$$

und aus der Substitution in vorstehende Gleichungen folgt dann

$$c_p - c_v = AB \tag{64a}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial p}(p c_p) - \frac{\partial}{\partial v}(v c_v) = AB\,. \tag{65a}$$

Führt man in der letzten Gleichung die Differentiation aus und verbindet sie mit der vorhergehenden, so ist

$$p \cdot \frac{\partial c_p}{\partial p} = v \cdot \frac{\partial c_v}{\partial v}$$

oder unter Beachtung von Gl. (64a), wenn man dieselbe in Hinsicht auf v differentiirt:

$$p \cdot \frac{\partial c_p}{\partial p} = v \cdot \frac{\partial c_p}{\partial v}\,.$$

Diese Gleichung wird aber nur befriedigt, wenn c_p eine Function des Productes pv ist; da aber dieses Product der absoluten Temperatur T proportional ist, so ergiebt sich der Satz, dass unter der gemachten Voraussetzung ($pv = BT$)

1) die specifische Wärme c_p bei constantem Drucke, wenn sie überhaupt veränderlich ist, nur eine Function der Temperatur t sein kann, und

2) dass die specifische Wärme c_v bei constantem Volumen sich nach Gl. (64a) nur durch eine Constante von dem Werthe c_p unterscheiden kann.

Multiplicirt man Gl. (64 a) auf beiden Seiten mit dem Molekulargewichte m des betreffenden Gases (s. Tabelle S. 121), so erhält man nach Gl. (46), S. 119, wenn man dort, was statthaft erscheint, den Werth 1,9934 der rechten Seite durch 2 ersetzt,

$$c m_p - m c_v = 2\,,$$

woraus sich, wenn c_p bekannt ist, sehr leicht c_v und das Verhältniss $\varkappa$ beider Werthe berechnet. Werthvolle Versuche über die Veränderlichkeit der specifischen Wärme c_p mit der Temperatur liegen von Eilhard Wiedemann*) vor. Derselbe fand für atmosphärische Luft $c_p = 0{,}2389$, für Wasserstoff $c_p = 3{,}4100$, für Kohlenoxyd $c_p = 0{,}2425$, Werthe, die sehr wenig von den Regnault'schen Ergebnissen abweichen. Auch E. Wiedemann fand, dass diese Werthe von der Temperatur unabhängig waren, dagegen fand derselbe für die folgenden Gase eine Zunahme des Werthes c_p mit der Temperatur:

	für $t =$ 0°	100°	200° C.
Kohlensäure	$c_p =$ 0,1952	0,2169	0,2387
Ammoniak	0,5009	0,5317	0,5629
Aethylen	0,3364	0,4189	0,5015
Stickstoffoxydul	0,1983	0,2212	0,2442

Speciell für die technisch wichtige Kohlensäure berechnet sich hieraus (wegen $m = 44$)

	für $t =$ 0°	100°	200° C.
$mc_p =$	8,589	9,544	10,503
$mc_v =$	6,589	7,544	8,503
$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} =$	1,303	1,265	1,236

*) E. Wiedemann »Ueber die specifische Wärme der Gase«. Poggendorff's Ann. Bd. 157. S. 1.

Hieraus bestimmt sich das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Volumen (c_v) bei 100° C. zu der bei 0° C. zu 7,544 : 6,589 = 1,145, welches Verhältniss A. Winkelmann*) auf anderm Wege zu 1,172 ermittelt hat.

Auf demselben Wege findet sich für Ammoniak aus den Wiedemann'schen Zahlenwerthen das gleiche Verhältniss zu 1,080, während Winkelmann dafür 1,184 ableitet. Man hat daraus zu schliessen, was auch sonst anerkannt ist, dass, abweichend von der oben gemachten Annahme, Kohlensäure und Ammoniak sich nicht der Zustandsgleichung der Gase unterwerfen.

Für Kohlensäure insbesondere hat im Uebrigen schon Regnault die Zunahme der specifischen Wärme mit der Temperatur nachgewiesen; derselbe**) fand für 0°, 100° und 200° resp. $c_p = 0{,}1870$, 0,2145 und 0,2396, Werthe, die von den von E. Wiedemann gefundenen nur wenig abweichen.

In letzter Zeit ist die Frage von Mallard und Le Chatelier***) erneuter Prüfung unterzogen worden; dieselben haben ihre Aufmerksamkeit vorzugsweise dem Verhalten der Verbrennungsproducte explosibler Gase, nämlich der Kohlensäure und dem Wasserdampfe, zugewendet und geben (a. a. O. p. 524) für Kohlensäure:

$$mc_v = 6{,}3 + 0{,}006\,\tau - 0{,}00000118\,\tau^2\,,$$

für Wasserdampf (a. a. O. p. 528)

$$mc_v = 5{,}61 + 0{,}00328\,\tau$$

und für die sogenannten »permanenten Gase« (a. a. O. p. 552)

$$mc_v = 4{,}8 + 0{,}0006\,\tau\,.$$

In diesen empirischen Formeln bedeutet aber τ nicht die dem Werthe c_v entsprechende augenblickliche Temperatur t, sondern c_v soll dem Werthe der mittlern zwischen 0° und τ° entsprechenden Temperatur zukommen.

Folgt man dem Gedankengange, welchen die genannten

*) A. Winkelmann »Ueber die Wärmeleitung von Gasen und Dämpfen und die Abhängigkeit der specifischen Wärme derselben von der Temperatur«. Poggendorff's Ann. Bd. 159. S. 177.

**) Rel. II. 130.

***) »Recherches expérimentales et théoriques sur la combustion des mélanges gazeux explosifs« par Mallard et Le Chatelier, Ingénieurs au corps des Mines. Annales des Mines t. IV. 1883.

Experimentatoren bei der Aufstellung ihrer empirischen Formeln eingeschlagen haben, so finden sich folgende Ausdrücke zur Berechnung der specifischen Wärme c_p bei constantem Drucke als Function der Temperatur t

für Kohlensäure:

$$mc_p = 8{,}26 + 0{,}0012\, t - 0{,}00000236\, t^2\,, \tag{66}$$

für Wasserdampf

$$mc_p = 7{,}57 + 0{,}00656\, t \tag{67}$$

und für die eigentlichen Gase (Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenoxyd), abweichend von den darüber bestehenden und oben besprochenen Annahmen:

$$mc_p = 6{,}76 + 0{,}0012\, t\,. \tag{68}$$

Um die specifische Wärme mc_v zu bestimmen, hätte man auf der rechten Seite dieser Formeln 2 (oder genauer 1,9934) zu subtrahiren*).

Man würde hiernach folgende Tabelle erhalten:

	Für $t =$ 0°	100°	200°	500°	1000°	2000°
Kohlensäure: $c_p =$	0,188	0,214	0,240	0,311	0,407	0,519
Wasserdampf: $c_p =$	0,420	0,457	0,493	0,603	0,885	1,149

Für die Kohlensäure stimmen die Werthe für 0° bis 200° mit Regnault überein, was aber darin seinen Grund hat, dass Mallard und Le Chatelier bei der Construction ihrer empirischen Formeln die Regnault'schen Angaben benutzt haben; bei Wasserdampf hat man keinen Anhalt zu Vergleichen, als den Umstand, dass der Werth von Regnault ($c_p = 0{,}4805$) gerade zwischen die Grenzen der bei Dampfkesseln vorkommenden Temperaturen fällt; auffällig wäre aber nach dem Vorstehenden die enorme Zunahme der specifischen Wärme des Wasserdampfes mit der Temperatur. Merkwürdig wäre endlich auch noch Gl. (68), wonach die specifische Wärme der eigentlichen Gase sich ebenfalls verhältnissmässig stark mit der Temperatur ändern würde. So fände sich z. B. für Wasserstoffgas ($m = 2$), vergl. Tabelle S. 121:

*) Anmerkung. Für atmosphärische Luft würde Gl. (68) ergeben: $c_p = 0{,}2343 + 0{,}0000416\, t$ und $c_v = 0{,}1650 + 0{,}0000416\, t$. Das Verhältniss $\varkappa$ beider Werthe würde dann mit der Temperatur abnehmen, es wäre beispielsweise $\varkappa = 1{,}420$ für $t = 0°$ und $1{,}334$ für $t = 1000°$ C.

$t =$	0°	100°	200°	500°	1000°
$c_p =$	3,38	3,44	3,50	3,68	3,98,

Werthe, die aber doch wohl nöthig erscheinen lassen, erst noch weitere experimentelle Bestätigung der im Vorstehenden behandelten Versuchsresultate abzuwarten. Die Arbeit von Mallard und Le Chatelier hat unter den Ingenieuren Deutschlands wohlverdientes Aufsehen erregt, weil sie Fragen berührt, die bei der Beurtheilung der Gas-(Explosions-)Maschinen und bei der Untersuchung der Verbrennungserscheinungen überhaupt eine bedeutsame Rolle spielen. Würde man die Resultate der hier besprochenen Versuche der genannten Ingenieure als vollkommen zuverlässig annehmen, so würde fast Alles hinfällig, was bis jetzt über die Berechnung der Verbrennungstemperaturen und über die Vorgänge in den Gasmaschinen gegeben worden ist; ich glaube aber doch, dass es verfrüht wäre, schon jetzt auf die erwähnten Untersuchungen weitere Schlüsse zu gründen. Bei Aufstellung der oben gegebenen empirischen Formeln haben Mallard und Le Chatelier nur wenige bei sehr hoher Temperatur (ohngefähr 2000°) ausgeführte eigene Versuche benutzt und der Gang ihrer Schlüsse erscheint mir auch nicht einwurfsfrei; aber abgesehen davon lassen sich auch theoretische Gründe aufführen, die zur Vorsicht beim weitern Vorgehen mahnen. Gerade die Verbrennungsproducte Kohlensäure und Wasserdampf sind luftförmige Körper, welche sich der einfachen Zustandsgleichung der Gase nicht unterwerfen und für diesen Fall ist es noch keineswegs erwiesen, dass die specifischen Wärmen nur Functionen der Temperatur sind, sie werden möglicher Weise von der Temperatur und dem Drucke abhängen; es wäre daher gewagt, in solchen Fällen, wo mit starken Temperaturänderungen zugleich beträchtliche Aenderungen des Druckes (wie bei der Verbrennung in der Gasmaschine) vorliegen, von den im Vorstehenden besprochenen Ergebnissen schon jetzt Gebrauch zu machen.

In allen folgenden Untersuchungen soll daher an den frühern Voraussetzungen, dass die specifischen Wärmen c_p und c_v constant sind oder wenigstens innerhalb der angenommenen Grenzen als unveränderlich angesehen werden dürfen, festgehalten werden; nur bei den Betrachtungen über Gasmaschinen wird auf die Frage gelegentlich zurückzukommen sein.

Anwendungen.

Physikalischer Theil.

I. Zustandsänderungen der Gase auf umkehrbarem Wege.

§ 29. Die polytropische Curve der Gase.

Von den zahlreichen Druckcurven, nach welchen man die umkehrbaren Zustandsänderungen eines Gases vor sich gehend annehmen kann, ist besonders ein Fall von besonderer Bedeutung, da er unzählige Einzelfälle und gerade diejenigen einschliesst, die von physikalischer und technischer Wichtigkeit sind. Das angedeutete Problem umschliesst die Frage nach dem Verhalten des Gases unter der Voraussetzung, dass »die dem Gase zugeführte beziehungsweise entzogene Wärmemenge der Temperaturänderung direct proportional ist«.

Ist die Gewichtseinheit Gas vom Drucke p dem Volumen v und der Temperatur T gegeben, so soll also die Druckcurve bestimmt werden, wenn die Wärmemenge für eine unendlich kleine Zustandsänderung durch die Formel

$$d\,Q = c\,d\,T \tag{1}$$

gegeben ist, in welcher Formel c eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Nach Gl. (54), S. 128, schreibt sich die Zustandsgleichung in der Form:

$$Apv = c_v\,(\varkappa - 1)\,T\ .$$

Differentiirt man dieselbe und setzt man den Werth von $d\,T$ in vorstehende Gleichung (1) ein, so folgt für den angenommenen Fall:

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1} \cdot \frac{c}{c_v}(v\,dp + p\,dv) \ .$$

Andererseits gilt aber allgemein für jede Art der Zustandsänderung nach Gl. (53c), S. 127),

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}(v\,dp + \varkappa p\,dv) \ .$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke und unter Beachtung, dass $c_p = \varkappa c_v$ ist, folgt:

$$(c - c_v)\,v\,dp + (c - c_p)\,p\,dv = 0 \ .$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $(c - c_v)pv$ und setzt man

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} = n \ , \tag{2}$$

wobei n eine neue constante Grösse ist, die aber durch den Werth c, sowie durch die specifische Wärme bei constantem Druck (c_p) und die bei constantem Volumen (c_v) vollständig bestimmt ist, so ergiebt sich:

$$\frac{dp}{p} + n\frac{dv}{v} = 0$$

und hieraus durch Integration:

$$pv^n = C \ , \tag{3}$$

wobei C eine Constante bedeutet.

Wäre der Anfangszustand durch p_1 und v_1 gegeben, so folgt demnach:

$$pv^n = p_1 v_1{}^n \tag{3 a}$$

als Gleichung der gesuchten Druckcurve, die im Weiteren als polytropische Curve bezeichnet werden soll. Wäre statt des Factors c der Gleichung (1) von vorn herein der Exponent n der vorstehenden Formel gegeben, so berechnet sich aus Gl. (2) umgekehrt:

$$c = \frac{n - \varkappa}{n - 1} \cdot c_v \ . \tag{4}$$

Ich nenne c die »specifische Wärme des Gases für die Druckcurve $pv^n = C$«*.)

*) Auf diesen allgemeinen Fall der Zustandsänderung eines Gases habe ich zuerst in der 2. Auflage der vorliegenden Schrift (1866) aufmerksam gemacht. Seit dieser Zeit sind die betreffenden Formeln und Sätze vielfach, besonders bei technischen Untersuchungen, angewendet worden.

Wegen der beliebigen Wahl des Exponenten n giebt es demnach unendlich viele Werthe der specifischen Wärme; aber nur unter Voraussetzung der aufgefundenen Druckcurve zeigt sich die Wärmemenge der Temperaturänderung proportional.

Schreibt man die Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{T}{T_1},$$

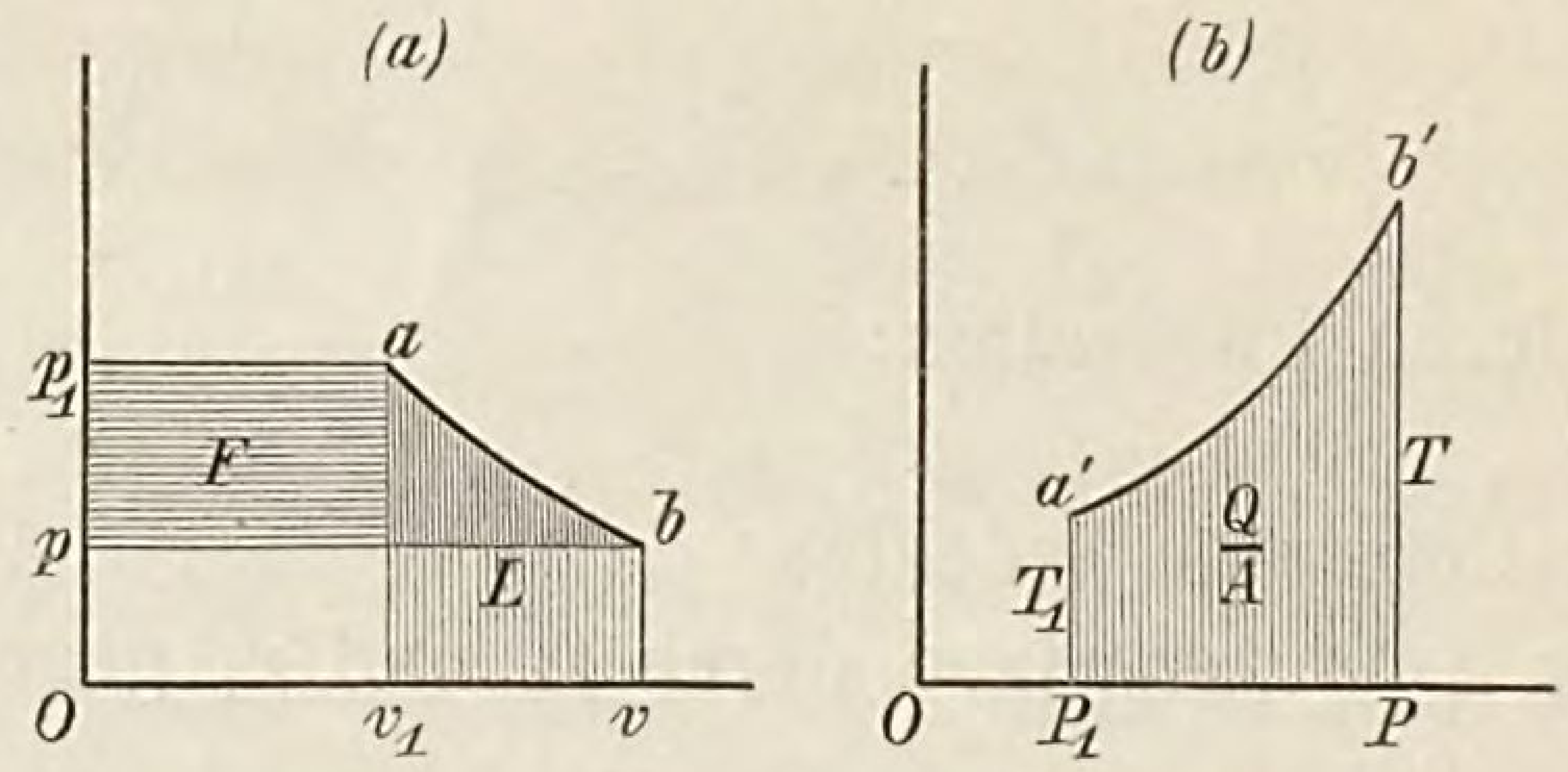
so ergiebt die Verbindung derselben mit Gl. (3) auch

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{5}$$

nach welchen Gleichungen sich direct die Temperatur T für jeden Punkt der Druckcurve zu dem entsprechenden Werth des Volumens v oder des Druckes p ermitteln lässt.

Die Wärmemenge, welche während des Ueberganges nach

Fig. 21.



der Druckcurve ab (Fig. 21) zuzuführen ist, findet sich nach Gl. (1) sofort

$$Q = c(T - T_1) \tag{6}$$

und die gewonnene Arbeit bestimmt sich durch Integration der Gl. (53b) S. 127

$$L = \frac{(c - c_v)}{A}(T - T_1). \tag{7}$$

Die Division dieser Formel durch Gl. (6) ergiebt

$$\frac{AL}{Q} = \frac{c - c_v}{c}. \tag{7a}$$

wonach also die äussere Arbeit ebenfalls der Temperaturänderung und damit auch der Wärmemenge Q direct proportional erscheint.

Ersetzt man in Gl. (7) die specifische Wärme c durch den in Gl. (4) gegebenen Werth, so folgt unter Berücksichtigung von Gl. (54) S. 128:

$$c - c_v = -\frac{c_v(\varkappa - 1)}{n - 1} = -\frac{AB}{n - 1}$$

und hiernach die äussere Arbeit auch:

$$L = \frac{1}{n-1}(p_1 v_1 - p v) \qquad (7\,\mathrm{b})$$

oder

$$L = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1}\right) = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right), \qquad (7\,\mathrm{c})$$

in welch letzteren Formeln sich der Factor $p_1 v_1$ auch durch $B T_1$ ersetzen lässt.

Einfach erscheint insbesondere Gl. (7 b). Die äussere Arbeit L, welche in Fig. 21 a durch die vertical schraffirte Fläche dargestellt ist, erscheint der Differenz der beiden Rechteckflächen proportional, welche sich durch Druck und Volumen im Anfang und am Ende darstellen.

Würde man in Fig. 21 a durch Planimetriren die Fläche L und die beiden Rechteckflächen ermitteln, so liesse sich nach Gl. (7 b) der Exponent n und damit auch die specifische Wärme c finden, vorausgesetzt allerdings, dass die Druckcurve wirklich dem Gesetze $pv^n =$ Const. unterworfen wäre.

Eine wichtige Rolle spielt bei gewissen Untersuchungen, in die später eingetreten werden wird, auch die von der Druckcurve ab abgeschlossene Fläche $p_1 abp$, die in Fig. 21 a durch theils horizontale theils enge Schraffur ausgezeichnet ist. Bezeichnet man diese Fläche mit F, so ist, wie aus der Figur ersichtlich:

$$F = p_1 v_1 + L - pv$$

und daher unter Benutzung von Gl. (7 b)

$$F = \frac{n}{n-1}(p_1 v_1 - pv), \qquad (8)$$

wonach durch Verbindung beider Gleichungen sehr einfach auch

$$\frac{F}{L} = n \qquad (9)$$

folgt, welche Formel noch leichter durch Planimetriren auf den Werth des Exponenten n führt.

Die Benutzung der Beziehung (6) in Gl. (7b) führt auf die Formel

$$Q = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} \cdot AL \qquad (10)$$

oder unter Benutzung von (9) auf

$$Q = \frac{A}{\varkappa - 1}(\varkappa L - F) \; , \qquad (10a)$$

wonach man durch Planimetriren auch direct die Wärmemenge Q ermitteln kann, welche während der durch Zeichnung gegebenen Zustandsänderung mitzutheilen gewesen ist.

Die vorstehenden Sätze lassen sich selbst dann anwenden, wenn das Gesetz der Zustandsänderung nicht bekannt ist und dasselbe nicht der Bedingung $p v^n$ = Constans unterworfen ist.

Denkt man sich nämlich, die Druckcurve $a\,b$ Fig. 21a stelle einen Theil der Curve eines Indicatordiagrammes einer Heiss- oder Kaltluftmaschine vor und zwar einen Theil, welcher der Expansion oder Compression der Luft im Maschinencylinder entspricht, so lässt sich die Curve in einzelne kurze Strecken zerlegt denken, bei denen näherungsweise das vorstehende Aenderungsgesetz als gültig angenommen werden kann; bedeutet hier, wo man es nicht mit der Gewichtseinheit zu thun hat, V_1 und V_2 das Volumen und p_1 und p_2 den Druck für den Anfang und das Ende einer beliebigen kurzen Curvenstrecke, durch Messung dem Indicatordiagramme entnommen, so kann man $p_2 V_2{}^n = p_1 V_1{}^n$ setzen und hieraus

$$n = \frac{\log V_2 - \log V_1}{\log p_1 - \log p_2} \; ,$$

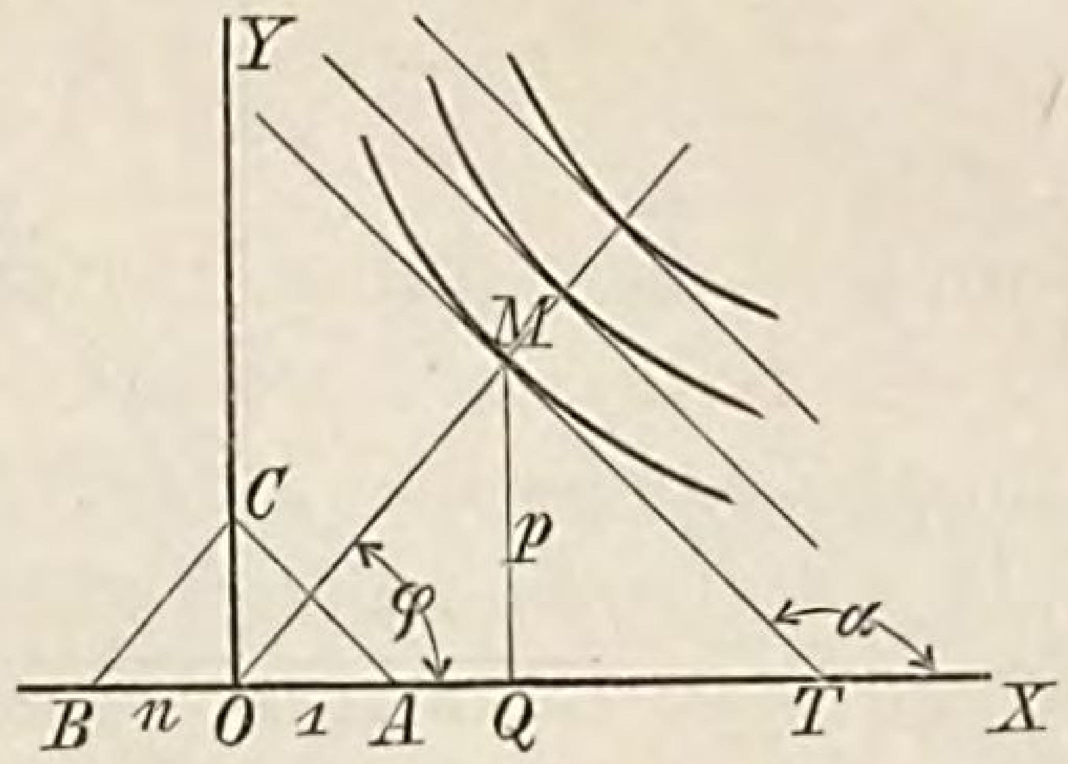
sowie hierauf nach Gl. (4) die specifische Wärme c berechnen. Führt man diese Rechnung für die einzelnen Intervalle der Curve aus, so erhält man einen Einblick, ob auf dem ganzen Wege der Expansion oder Compression eine Zuführung oder Ableitung von Wärme erfolgt ist und in welchem Maasse dies geschah; für die einzelnen Intervalle wird sich hierbei im Allgemeinen n und c verschieden herausstellen. Diese Methode der Untersuchung der Druckcurve ist schon mehrfach praktisch verwerthet worden, doch

gewährt die Lösung dieser Aufgabe mit Hülfe der Abbildung der Druckcurve, wie noch gezeigt werden soll, bessern Einblick in die Frage.

§ 30. Weitere Eigenschaften der polytropischen Curve.

Denkt man sich der Constanten C der Gl. (3) S. 143 verschiedene Werthe beigelegt, so erhält man eine unendliche Schaar von Druckcurven desselben Gesetzes (Fig. 22). Die Differentiation der Gleichung giebt

Fig. 22.



$$np\,dv + v\,dp = 0$$

oder

$$-\frac{dp}{dv} = n\frac{p}{v} \,. \tag{11}$$

Ist nun MTX der Tangentenwinkel α und $MOX = \varphi$ der Winkel, den ein beliebiger Radiusvector OM mit der Axe OX einschliesst, so folgt nach Gl. (11)

$$\operatorname{tg}\alpha = n \operatorname{tg}\varphi \,. \tag{11a}$$

Daher schneidet der Radiusvector die ganze Curvenschaar unter demselben Winkel, oder die Tangenten seiner sämmtlichen Schnittpunkte liegen parallel.

Weiter ist aber nach der Figur auch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MQ}{QT} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{MQ}{OQ} \,.$$

Die Benutzung dieser Beziehungen in Gl. (11a) ergiebt dann einfach:

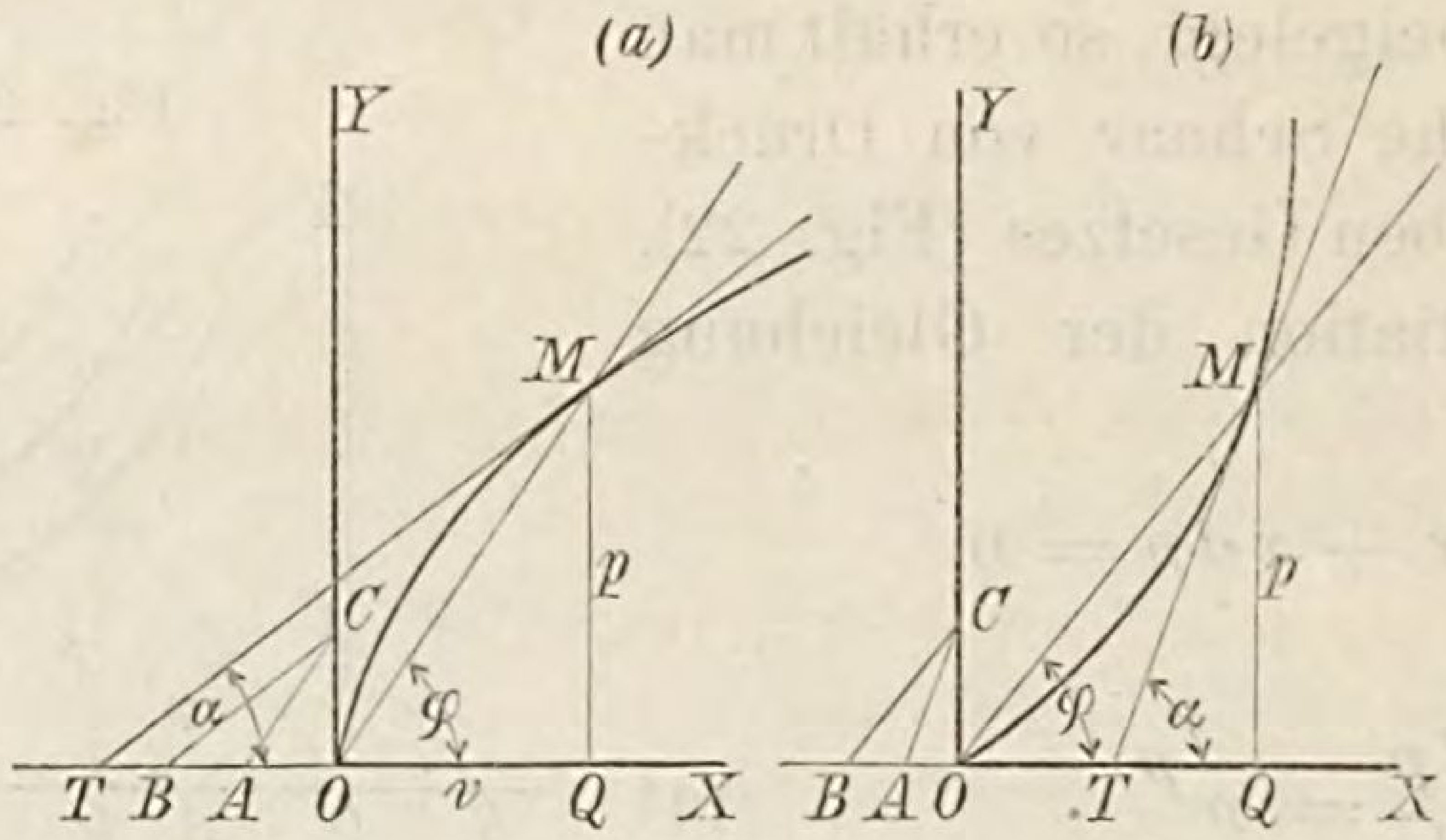
$$n = \frac{OQ}{QT}\,, \tag{12}$$

wonach der Exponent n als der Quotient aus der Abscisse OQ und der Subtangente QT erscheint.

Trägt man auf der X-Axe von O aus die Strecke OA als Längeneinheit auf, zieht man durch den Punkt A die Länge AC der Tangente parallel und durch den Schnittpunkt C die Strecke CB parallel dem Radius vector, so ergiebt sich in dem Ab-

schnitte OB ohne Weiteres der Werth des Exponenten n, wonach ein weiteres Mittel gegeben ist, eine vorgelegte Druckcurve daraufhin zu untersuchen, ob sie dem Gesetze $pv^n = \text{Const.}$ unterworfen ist und wenn nicht, wie sich n von Element zu Element ändert. Fig. 23a und Fig. 23b geben den Verlauf der

Fig. 23.



vorgelegten Druckcurve unter der Voraussetzung, dass der Exponent n negativ ist.

Fig. 23a gilt unter der Voraussetzung $n < 1$ und Fig. 23b für $n > 1$, in beiden Fällen gehen die Curven durch den Anfangspunkt O der Coordinatenaxen (Parabeln höherer Ordnung).

Für $QT = 0$ ergiebt sich nach Gl. (12) $n = \infty$, dann verwandelt sich die Curve in eine Gerade, welche parallel der Ordinatenaxe OY liegt.

In diesem Falle giebt Gl. (4) die specifische Wärme $c = c_v$; nach Gl. (6) folgt die mitzutheilende Wärmemenge $Q = c_v(T - T_1)$ und nach Gl. (7) die äussere Arbeit $L = 0$; man stösst also hier auf den in der Physik längst behandelten Fall der Erwärmung des Gases bei constantem Volumen.

Ist hingegen die Subtangente $QT = \infty$, so folgt aus (12) $n = 0$ und hiernach aus Gl. (4) $c = \varkappa c_v = c_p$; die zugeführte Wärmemenge findet sich nach Gl. (6) $Q = c_p(T - T_1)$, und weil hier nach Gl. (3) $p = p_1$ ist, die äussere Arbeit nach Gl. (7b)

$$L = p_1(v - v_1)\ .$$

Hier liegt demnach der andere längst bekannte Fall der Erwärmung des Gases bei constantem Drucke vor.

Setzt man ferner in den gegebenen Gleichungen des allgemeinen Falles $n = \varkappa$, so folgt nach Gl. (4) $c = 0$, man stösst

demnach unter dieser Voraussetzung auf die adiabatische Curve; sämmtliche Gleichungen gehen dann in die Formen über, welche in § 27 für die adiabatische Curve gefunden worden sind.

Macht man endlich die Voraussetzung $n = 1$, so geben die Gln. (5) $T = T_1$ und demnach folgt $pv = p_1 v_1$, welche Resultate der isothermischen und isodynamischen Zustandsänderung entsprechen; die Gln. (7b) und (10) ergeben dann allerdings die unbestimmten Ausdrücke

$$L = \frac{0}{0} \quad \text{und} \quad Q = \frac{0}{0},$$

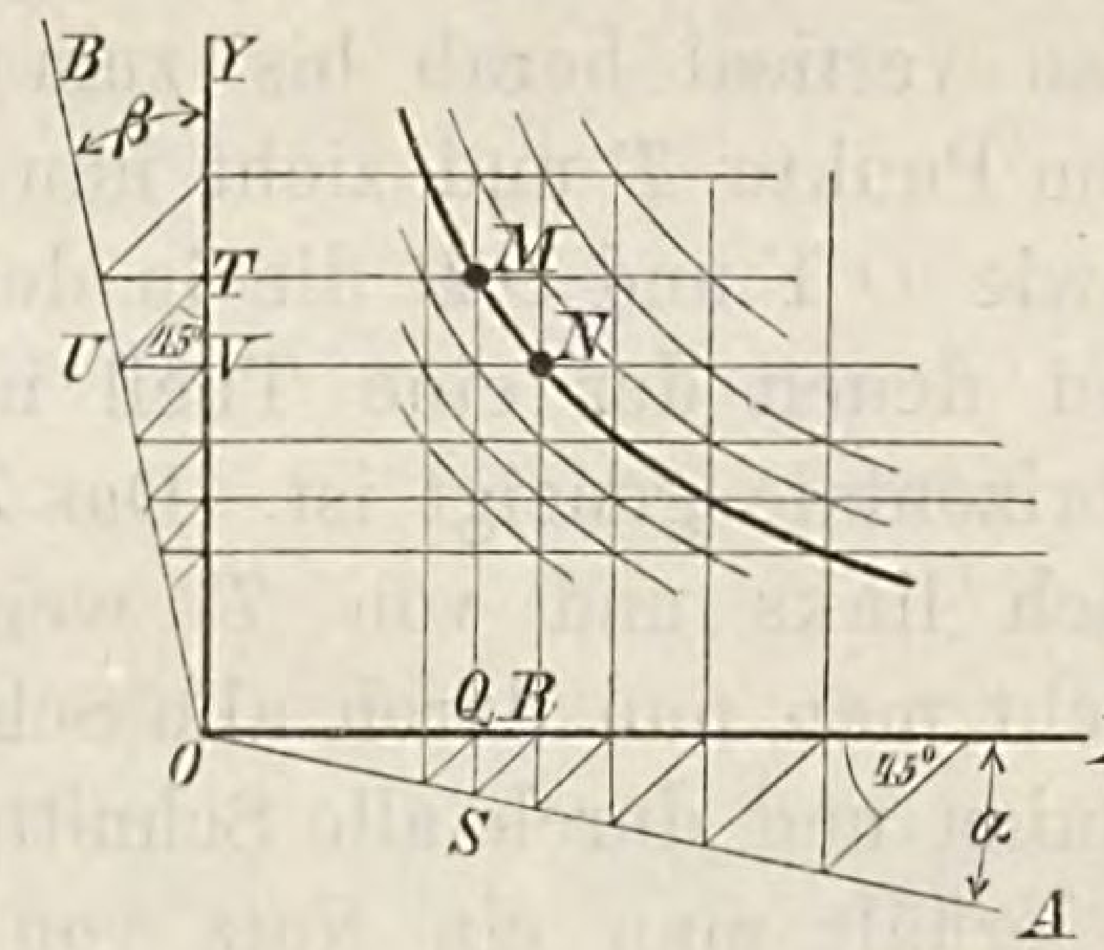
deren Werthe aber früher durch die Gln. (56b) und (58a) S. 132 direct gefunden worden sind.

Die polytropische Curve umfasst demnach **alle** Einzelfälle, die oben behandelt worden sind.

§ 31. Die Construction der polytropischen Curve und deren Abbildung.

Soll durch den Punkt M (Fig. 24), dessen Coordinaten OQ und QM mit v_1 und p_1 bezeichnet werden mögen, eine polytropische Curve vom Gesetze $pv^n = p_1 v_1^n =$ Const. gelegt werden, so ergiebt sich eine einfache Constructionsmethode leicht durch folgende Betrachtung*): Man ziehe die Linie OA, um den beliebigen Winkel $XOA = \alpha$ gegen die Axe OX geneigt, und ebenso die Linie OB, um den Winkel $BOY = \beta$ von der Verticalen OY abweichend; geht man jetzt vom Punkte M vertical herab bis zum Schnittpunkte S mit der Richtung OA und horizontal herüber bis zum Schnittpunkte T mit der Axe OY; legt man weiter durch die Punkte S und T die Linien SR und TU um 45° gegen die Horizontale

Fig. 24.



*) Nach **Brauer**: »Construction gesetzmässiger Expansionscurven von der allgemeinen Form $pv^n = C$«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1885. Bd. 29. S. 433.

geneigt und zieht man durch R eine Verticale und durch U eine Horizontale, so schneiden sich diese im Punkte N, dessen Coordinaten OR und $RN = OV$ mit v und p bezeichnet werden mögen. Nach der angegebenen Construction ist nun $QS = QR = v - v_1$ und $VT = UV = p_1 - p$ und hiernach:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v - v_1}{v_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p_1 - p}{p}$$

oder

$$v = v_1 (1 + \operatorname{tg} \alpha) \quad \text{und} \quad p_1 = p (1 + \operatorname{tg} \beta) .$$

Soll nun der Punkt N ein Punkt der durch M gehenden polytropischen Curve sein, so muss die Beziehung

$$p v^n = p_1 v_1{}^n$$

gelten, oder es folgt unter Benutzung der beiden vorausgehenden Ausdrücke, wenn man aus denselben p und v bestimmt und substituirt, die Gleichung

$$(1 + \operatorname{tg} \beta) = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^n .$$

Ist daher der Exponent n der polytropischen Curve gegeben und der Winkel α beliebig gewählt worden, so berechnet man nach dieser Gleichung den Winkel β und macht (Fig. 24) $\sphericalangle XOA = \alpha$ und $\sphericalangle YOB = \beta$. Die Constructionsregel ist nun einfach folgende, wie sich leicht übersieht. Von dem gegebenen Punkte M geht man vertical herab bis zum Punkte S; horizontal herüber bis zum Punkte T und zieht nun zwischen den Linien OX und OA, sowie OY und OB die in der Figur angedeuteten Zickzacklinien, von denen der eine Theil in beiden Zügen um 45° gegen die Horizontale geneigt ist. Das Zickzack kann auch von S aus noch nach links und von T weiter nach oben fortgesetzt werden. Zieht man nun durch alle Schnittpunkte in der Axe OX verticale Linien und durch alle Schnittpunkte in der Axe OY horizontale, so erhält man ein Netz von sich senkrecht durchschneidenden Geraden, deren correspondirende Schnittpunkte in der gesuchten Curve liegen. Man sieht, dass auf diesem Wege nicht nur die durch den gegebenen Punkt M gehende polytropische Curve hervortritt, sondern dass man eine ganze Schaar Curven derselben Gattung erhält. Je kleiner bei Ausführung der Construction der Winkel α gewählt wird, um so näher liegen die gesuchten Punkte der Curven neben einander.

An die im Vorstehenden gegebene Constructionsmethode mögen nun die Sätze über die »Abbildung« der polytropischen Curve angeschlossen werden.

Setzt man in der Formel zur Berechnung des Wärmegewichtes

$$P = \int \frac{dQ}{AT}$$

die Wärmemenge dQ, nach Gl. (1) $dQ = c\,dT$, ein, so folgt sogleich durch Integriren

$$AP = AP_0 + c \operatorname{logn} T\,, \tag{13}$$

wobei P_0 eine willkürliche Integrationsconstante bedeutet. Ist für den Anfangszustand P_1 das Wärmegewicht und T_1 die Temperatur, so folgt auch

$$A(P - P_1) = c \operatorname{logn} \frac{T}{T_1} \tag{13a}$$

und das ist zugleich auch, wenn P und P_1 als Abscissen und T und T_1 als Ordinaten aufgetragen werden (Fig. 21b, S. 144), die Gleichung der Abbildung $a'b'$ der betreffenden polytropischen Curve, eine Gleichung die auch in der Exponentialform

$$T = T_1 e^{\frac{A(P - P_0)}{c}}$$

geschrieben werden kann, wobei $e = 2{,}71828\,.\,.$ ist.

Benutzt man in Gl. (13a) die Gln. (5) und ersetzt man c durch den Ausdruck (4), so folgt auch:

$$A\,(P - P_1) = (n - \varkappa)\, c_v \operatorname{logn} \frac{v_1}{v}\,, \tag{13b}$$

sowie

$$A(P - P_1) = \left(\frac{n - \varkappa}{n}\right) c_v \operatorname{logn} \frac{p}{p_1}\,. \tag{13c}$$

Diese Formeln schliessen natürlich auch alle Specialfälle ein, welche oben besprochen wurden.

Bei Erwärmung unter constantem Volumen ist $c = c_v$ und $n = \infty$ und

bei Erwärmung unter constantem Drucke ist $c = c_p$ und $n = 0$ zu substituiren.

Bei adiabatischer Expansion ist $c = 0$ und $n = \varkappa$, desshalb nach Gl. (13a) $P = P_1$, die Abbildung der Adiabaten also

eine Gerade, welche der Ordinatenaxe parallel liegt, wie früher bereits besprochen wurde.

Bei isothermischer und isodynamischer Expansion ist $c = \infty$ und $n = 1$, die Abbildung daher eine horizontale Gerade.

Würde in einem beliebigen andern Falle mit einer Expansion eine Wärmeentziehung verbunden sein, so stellt sich $P < P_1$ heraus; in der Abbildung der Druckcurve ab (Fig. 21b) erscheint dann die Lage der Punkte a' und b' vertauscht.

§ 32. Druckcurve der Gase, wenn die Wärmemenge der Druckänderung oder der Volumenänderung proportional ist.

Wenn auch in den vorstehenden Untersuchungen der polytropischen Curve die wichtigsten Fälle und zwar diejenigen im Einschlusse mit behandelt worden sind, auf die schon in den physikalischen Schriften hingewiesen wird, so erscheint es doch zweckmässig, von den Fällen, in welchen die dem Gase zugeführte Wärme der Temperaturänderung nicht proportional ist, wenigstens noch die in der Ueberschrift dieses Paragraphen angegebenen Druckcurven zu behandeln.

Es sei die mitzutheilende Wärmemenge durch den Ausdruck

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}\left[v_0\, dp + \varkappa p_0\, dv\right] \tag{14}$$

gegeben und hierbei mögen v_0 und p_0 beliebige constante Grössen darstellen, die man, wie die eingeführte Bezeichnung andeuten soll, als beliebige Werthe eines Volumens oder eines Druckes ansehen kann.

Entsprechen die Werthe p_1 und v_1 dem Anfangszustande des Gases, so giebt die Integration der vorstehenden Gleichung sofort

$$Q = \frac{A}{\varkappa - 1}\left[v_0 (p - p_1) + \varkappa p_0 (v - v_1)\right] \cdot \tag{14a}$$

Die Veränderung der inneren Arbeit folgt hierbei nach Gl. (52) S. 125

$$U - U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1}\left[pv - p_1 v_1\right] \tag{14b}$$

und hiernach unter Benutzung der Formel

$$Q = A(U - U_1 + L)$$

die äussere Arbeit:

$$L = \frac{1}{\varkappa - 1}\left[v_0(p - p_1) + \varkappa p_0(v - v_1) + p_1 v_1 - p v\right] \cdot \quad (14\,c)$$

Für den speciellen Fall, dass die Wärmemenge Q der Volumenänderung $v - v_1$ proportional sein soll, hat man $v_0 = 0$ zu setzen; dagegen wäre $p_0 = 0$ zu substituiren, wenn die mitzutheilende Wärmemenge der Druckänderung $p - p_1$ proportional vorausgesetzt wird.

Verbindet man die vorgelegte Gl. (14) mit der allgemein gültigen Gl. (53c) S. 127, so folgt

$$v\,dp + \varkappa p\,dv = v_0\,dp + \varkappa p_0\,dv$$

und hieraus durch Integration die Gleichung der betreffenden Druckcurve:

$$(p - p_0)(v - v_0)^{\varkappa} = (p_1 - p_0)(v_1 - v_0)^{\varkappa} \cdot \quad (15)$$

Die Curve ist daher mit der Adiabaten verwandt; die Coordinatenaxen der letzteren erscheinen nur um v_0 und p_0 parallel verschoben.

Hat man nach Gl. (15) für einen beliebigen Werth von v den Druck p berechnet, so ermittelt sich nach der Zustandsgleichung $pv = BT$ die Temperatur T für den betreffenden Punkt der Druckcurve und hierauf nach einer der Gln. (55) S. 128 der zugehörige Werth des Wärmegewichtes P. Damit ist auch der Weg angegeben, die vorliegende Druckcurve in ihrer Abbildung vorzuführen.

II. Zustandsänderungen der Gase auf nicht umkehrbarem Wege.

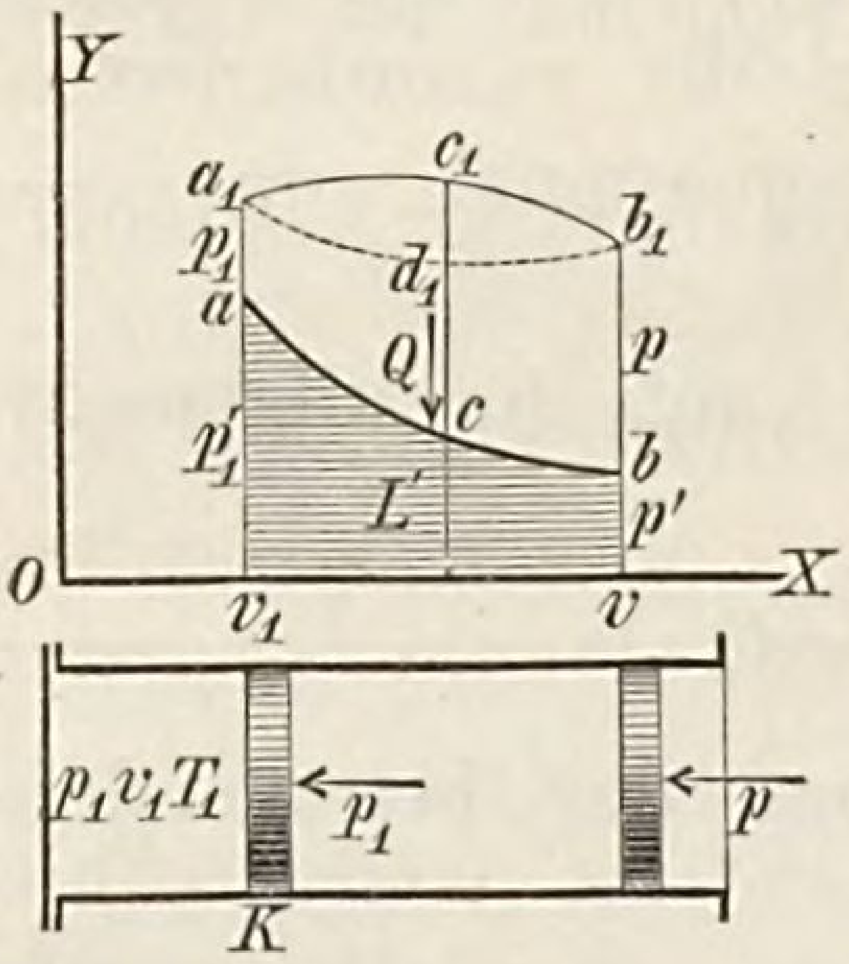
§ 33. Expansion der Gase unter verschiedenen Umständen.

Im ersten Abschnitte § 15 ist der nicht umkehrbare Process eines beliebigen Körpers ausführlich besprochen worden;

anschliessend an jene Betrachtungen lassen sich jetzt die gewonnenen Sätze leicht auf das Verhalten der Gase übertragen.

Denkt man sich durch einen Kolben in einem Cylinder die Gewichtseinheit Gas abgeschlossen und entspricht dem Punkte a_1 (Fig. 25) das Volumen v_1, der Druck p_1 und die Temperatur T_1 im Anfangszustande, der ein Gleichgewichts- und Ruhezustand sei, so wird sofort eine Expansion des Gases eintreten, sobald der von aussen auf den Kolben K wirkende Druck p_1 plötzlich auf den kleineren Werth p_1' gebracht wird, und die Arbeit L', welche hierbei während der Expansion auf das Volumen v nach aussen abgegeben wird, ist bestimmt, wenn durch Angabe des Verlaufes der Druckcurve acb, der »Arbeitsdruckcurve«, das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich während der Expansion der von aussen auf den Kolben wirkende Gegendruck p' ändert.

Fig. 25.



Wird nun nach Erreichung des Volumens v der (gewichtslos gedachte) Kolben plötzlich festgehalten, so wird das in stürmische Bewegung gerathene Gas allmählich in den Ruhezustand übergehen und nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes der Druck des Gases sich auf den Werth p einstellen, der in Fig. 25 dem Punkte b_1 entspricht; diesem Punkte entspricht dann auch eine bestimmte Temperatur T, die als Gleichgewichtstemperatur bezeichnet werden mag und deren Beziehung zu p und v durch die Zustandsgleichung des Gases gegeben ist. So entspricht aber auch jedem Zwischenpunkte c der Arbeitsdruckcurve im Punkte c_1 ein gewisser Gleichgewichtsdruck und eine bestimmte Gleichgewichtstemperatur, so dass neben der Arbeitsdruckcurve acb noch eine zweite Curve $a_1c_1b_1$ hervortritt, die als Gleichgewichtsdruckcurve bezeichnet worden ist (S. 73). Ist die Gleichgewichtstemperatur im Anfange und am Ende bekannt, so ist nach Gl. (52 a) S. 126 die zu innerer Arbeit verbrauchte Wärmemenge

$$A(U - U_1) = c_v(T - T_1) ,$$

und daher ergiebt sich für Gase die Wärmemenge Q', welche während dieses nicht umkehrbaren Processes von aussen zuzuführen war, nach Gl. (52) S. 73:

$$Q' = c_v(T - T_1) + AL' \tag{1}$$

oder wenn man zum Differential übergeht,

$$dQ' = c_v dT + Ap'dv \ , \tag{1a}$$

und unter Beachtung von Gl. (43) S. 115 und der Zustandsgleichung

$$dQ' = \frac{A}{\varkappa - 1} d(pv) + Ap'dv \ . \tag{1b}$$

Diese Gleichungen sind hinreichend, Probleme der vorgelegten Art zu lösen.

Ist der Verlauf beider Druckcurven bekannt, so bestimmt sich die Wärmemenge Q', ist dagegen das Gesetz der Wärmemittheilung bekannt und eine der beiden Druckcurven, so bestimmt sich leicht der Verlauf der andern. Für den speciellen Fall $p' = p$ fallen beide Curven zusammen und der Process verwandelt sich in einen umkehrbaren.

Als Anwendung der vorstehenden Formeln mag nur ein Fall behandelt werden, der aber unendlich viele und gerade diejenigen Fälle umschliesst, die etwa technisches Interesse haben können. Man setze voraus, es sei die während des angenommenen nicht umkehrbaren Processes mitgetheilte Wärmemenge der Aenderung der Gleichgewichtstemperatur direct proportional, also dQ' durch die Formel

$$dQ' = c\,dT \tag{2}$$

bestimmt, in welcher der Factor c als eine beliebige constante Grösse gegeben sei, die als specifische Wärme für den vorgelegten Fall bezeichnet werden kann, und ferner sei der Verlauf der Arbeitsdruckcurve acb (Fig. 25) durch die Gleichung

$$p'v^r = p_1'v_1^r \tag{3}$$

gegeben, in welcher Gleichung der Exponent r wiederum eine beliebige constante Grösse bedeutet, die zur erstgenannten Grösse c in keiner weiteren Beziehung stehen soll.

Hier ergiebt nun die Integration der Gl. (2) zunächst die Wärmemenge Q', welche während des angenommenen Ueberganges zuzuführen ist:

$$Q' = c(T - T_1) \tag{4}$$

und durch Substitution in Gl. (1) folgt dann die äussere Arbeit L' durch:

$$AL' = (c - c_v)(T - T_1) \; . \tag{5}$$

Ersetzt man hier die Temperaturwerthe durch die in Gl. (54) S. 128 gegebenen Beziehungen und setzt man der Kürze wegen

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_v} \; , \tag{6}$$

wonach die neue Constante n durch c vollständig bestimmt ist, so ergiebt sich nach Gl. (5) die Arbeit auch in der Form:

$$L' = \frac{1}{n - 1}(p_1 v_1 - pv) \; . \tag{5a}$$

Andererseits ist aber wegen der in Gl. (3) angenommenen Aenderung des äusseren Druckes nach Gl. (7b) S. 145 die äussere Arbeit auch

$$L' = \frac{1}{r - 1}(p_1' v_1 - p'v) \; , \tag{5b}$$

und daher ergiebt sich durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke

$$pv = p_1 v_1 + \frac{n - 1}{r - 1}(p'v - p_1' v_1) \tag{7}$$

als die gesuchte Gleichgewichtsdruckcurve; mittelst derselben bestimmt sich der Gleichgewichtsdruck p und die Gleichgewichtstemperatur T für jeden Werth des Volumens v, da die Anfangswerthe p_1, v_1 und p_1' als bekannt vorausgesetzt werden und p' durch Gl. (3) gegeben ist.

Je nach der Wahl von c und r oder auch n und r liegen unendlich viele Einzelfälle vor; der Process verwandelt sich in den umkehrbaren, wenn beide Curven, die Arbeits- und die Gleichgewichtsdruckcurve zusammenfallen; in diesem Falle ist $p_1' = p_1$ und $p' = p$ und aus Gl. (7) folgt $r = n$; die Constante r ist dann, wenn c gegeben ist, nicht mehr willkürlich, sondern tritt zu c in die durch Gl. (6) gegebene Beziehung. Es liegt dann die polytropische Curve vor, die oben behandelt wurde.

Sind dagegen im vorliegenden Falle die beiden Curven nicht identisch, so liegt der nicht umkehrbare Process vor, für welchen einige Specialfälle besprochen werden sollen.

Fall 1. Es finde der Uebergang ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme statt. Hier ist $c = 0$ und daher nach (6)

$n = \varkappa$, und die Gleichung der Gleichgewichtsdruckcurve, die hier als eine adiabatische Curve allgemeinerer Art anzusehen ist, heisst:

$$pv = p_1 v_1 + \frac{\varkappa - 1}{r - 1}(p'v - p_1' v_1)\,, \tag{7a}$$

in welcher Formel p' noch durch den aus Gl. (3) hervorgehenden Werth ersetzt werden könnte.

Fall 2. Setzt man $r = 0$ voraus, so ergiebt Gl. (3) $p' = p_1'$, die Expansion des Gases erfolgt daher unter Ueberwindung eines constanten äusseren Druckes und die Gleichung der Gleichgewichtsdruckcurve ergiebt sich nach (7)

$$pv = p_1 v_1 - (n - 1) p_1' (v - v_1)\ . \tag{7b}$$

Die Curve ist daher eine Hyperbel. Findet hierbei eine Wärmemittheilung nicht statt, so ist auch noch $n = \varkappa$ zu setzen und daher

$$pv = p_1 v_1 - (\varkappa - 1) p_1' (v - v_1)\ . \tag{7c}$$

Wird endlich auch noch der äussere Druck $p_1' = 0$ angenommen, findet also die Expansion ohne Verrichtung äusserer Arbeit statt, so wird:

$$pv = p_1 v_1\ ,$$

wonach die Gleichgewichtsdruckcurve in die gleichseitige Hyperbel übergeht und wegen der Zustandsgleichung $pv = BT$ und $p_1 v_1 = BT_1$ die Gleichgewichtstemperatur als eine constante Grösse hervortritt.

Der letztere Fall, für welchen die gewonnenen Rechnungsresultate übrigens auf kürzerem Wege direct aus der Grundgleichung (1) sich ergeben haben würden, liegt vor, wenn ein mit Gas erfüllter Raum mit einem luftleeren Raume in Verbindung gebracht wird. Die Ausbreitung des Gases findet hier ohne Verrichtung äusserer Arbeit statt, und Versuche von Joule haben in der That ergeben, dass das Gas nach seiner Ausbreitung und nach dem Uebergange in den Gleichgewichtszustand die gleiche Temperatur, wie beim Beginn des Versuches besass.

Kehren wir noch einmal zu dem durch Gl. (7c) gegebenen Fall zurück, bei welchem die Expansion ohne Mittheilung unter Ueberwindung eines constanten äussern Druckes p_1' stattfinden sollte. Man kann sich als Grenzfall die Ausdehnung so weit

stattfindend denken, dass der schliessliche Gleichgewichtsdruck p mit dem äussern Drucke p_1' zusammenfällt; für diesen Fall giebt die Gleichung (7c)

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{\varkappa p} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa},$$

woraus sich das Expansionsverhältniss berechnet.

Das Verhältniss der Temperaturwerthe T und T_1 findet sich dann

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{p}{p_1}$$

und die äussere Arbeit nach Gl. (5a) wegen $n = \varkappa$

$$L' = \frac{1}{\varkappa - 1}(p_1 v_1 - pv) = \frac{c_v}{A}(T_1 - T) .$$

Beispiel. Expandirt ein Kilogramm atmosphärischer Luft von der Temperatur $t_1 = 15°$ C. unter Ueberwindung eines äussern constanten Druckes von einer Atmosphäre von 2,5 Atmosphären Anfangsdruck auf den Enddruck gleich einer Atmosphäre, so geben die vorstehenden Formeln

$$\frac{v}{v_1} = 2{,}064 \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_1} = 0{,}8255 .$$

Daher $T = 237{,}44$ oder $t = -35{,}56°$ C. und die äussere Arbeit

$$L' = 3612{,}2 \text{ mkg.}$$

(Vergl. die Beispiele S. 133 und 135.)

Zum allgemeinen durch Fig. 25 dargestellten Falle zurückkehrend, dürfte zunächst die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass durch den veränderlichen äussern Druck p' nicht zugleich der Gasdruck selbst während des nicht umkehrbaren Ueberganges gemessen wird; während der stattfindenden stürmischen und ungeregelten Bewegung der Gastheilchen innerhalb des Processes kann weder der augenblickliche Druck noch die zugehörige Temperatur bestimmt werden; die im Vorstehenden benutzten Bezeichnungen p und T beziehen sich ausdrücklich, wie wiederholt werden mag, auf den eingetretenen Gleichgewichts- und Ruhezustand, wenn die Expansion beim Volumen v plötzlich abgebrochen wird; auch der allmählige Uebergang aus der stürmischen Bewegung in den Gleichgewichtszustand bei constantem Volumen v lässt sich nicht näher verfolgen.

Was nun die Abbildung des nicht umkehrbaren Processes, wie er hier besprochen wurde, betrifft, so ist hier einfach auf

die allgemeinen Darlegungen in § 16 des ersten Abschnittes S. 75 zu verweisen, man hat dort einfach nur die Function S durch die absolute Temperatur T zu ersetzen und für die Function

$$P = \int \frac{dQ}{AS} = \varphi(p, v)$$

für Gase die Gln. (55) S. 128 zu verwenden; wohl aber verdienen die in § 17 gegebenen Sätze über das Wärmegewicht beim nicht umkehrbaren Process der vorgelegten Art, auf Gase angewendet, einige nähere Untersuchungen.

Nach Gl. (1a) S. 155 ist die Wärmemenge dQ' für den nicht umkehrbaren Process durch den Ausdruck

$$dQ' = c_v dT + Ap'dv$$

gegeben; hätte dagegen der Uebergang auf der Gleichgewichtsdruckcurve (Fig. 25), also umkehrbar stattgefunden, so wäre eine Wärmemenge dQ erforderlich gewesen, welche sich bestimmt

$$dQ = c_v dT + Ap dv\ .$$

Die Subtraction beider Gleichungen ergiebt

$$dQ' = dQ - A(p - p')dv\ ,$$

und daher folgt, wenn man auf beiden Seiten mit AT dividirt,

$$\frac{dQ'}{AT} = \frac{dQ}{AT} - \frac{(p - p')dv}{T}\ .$$

Das erste Glied der rechten Seite ist unter allen Umständen ein vollständiges Differential, auch dann, wenn man nicht auf der Gleichgewichtscurve $a_1 c_1 b_1$, sondern auf einem beliebigen andern aber umkehrbaren Wege ($a_1 d_1 b_1$, in Fig. 25 punktirt) das Gas aus dem Zustande a_1 in den Zustand b_1 übergeführt haben würde. Das Integral des ersten Gliedes rechts ist die Veränderung des Wärmegewichtes für den umkehrbaren Uebergang und findet sich nach Gl. (55a) S. 128

$$P - P_1 = \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} \frac{pv^\varkappa}{p_1 v_1^\varkappa}\ . \tag{8}$$

Das Integral des Ausdruckes links ist dagegen die Veränderung des Wärmegewichtes für den nicht umkehrbaren Process; wird dieselbe kurz mit P' bezeichnet und setzt man überdies, wie in Gl. (57), S. 78

$$N = \int \frac{(p - p')\,dv}{T}, \tag{9}$$

so folgt:

$$P' = P - P_1 - N. \tag{10}$$

Da nun für einen nicht umkehrbaren Process der angenommenen Art die in Gl. (9) angedeutete Integration sich ausführen lässt, sobald man den Verlauf der Arbeits- und der Gleichgewichtsdruckcurve kennt, so ist damit durch Gl. (10) auch die Veränderung P' des Wärmegewichtes für diesen nicht umkehrbaren Process gegeben.

Zur Erläuterung mag der vorhin behandelte Fall herangezogen werden, der, wie gezeigt wurde, unendlich viele Einzelfälle umschliesst.

Die Wärmemittheilung soll demnach wieder nach dem Gesetze $dQ' = c\,dT$ stattfinden und der Verlauf der Arbeitsdruckcurve durch

$$p'v^r = p_1'v_1^r$$

gegeben sein, wobei c und r zwei von einander unabhängige constante Grössen darstellen.

Unter Mitbenutzung der Gleichung der Gleichgewichtsdruckcurve

$$pv = p_1 v_1 + \frac{n-1}{r-1}(p'v - p_1'v_1),$$

wie sie unter Gl. (7) gefunden wurde, und der Beziehung:

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_v},$$

wie sie nach Gl. (6) angenommen wurde, findet sich nach einigen leicht zu verfolgenden Umformungen aus Gl. (9) für den vorgelegten Fall:

$$A\,N = c_v \frac{\varkappa - 1}{n - 1} \operatorname{logn} \frac{p v^n}{p_1 v_1^n}, \tag{11}$$

wonach sich dann unter Heranziehung von Gl. (8) aus Gl. (10) die Veränderung P' des Wärmegewichtes berechnet.

Findet beispielsweise eine Wärmemittheilung **nicht** statt, so ist $c = 0$ und $n = \varkappa$ und daher

$$A\,N = c_v \operatorname{logn} \frac{p v^\varkappa}{p_1 v_1^\varkappa}$$

und

$$P' = 0 .$$

Wäre dagegen $r = 0$, so folgt $p' = p'_1$ und wäre auch noch $p' = p'_1 = 0$, fände also die Expansion ohne Verrichtung äusserer Arbeit statt, so würde für die Gleichgewichtsdruckcurve $pv = p_1 v_1$ sein und daher nach (11)

$$AN = c_v (\varkappa - 1) \operatorname{logn} \frac{v}{v_1} .$$

Eine weitere Verfolgung des vorliegenden Falles eines nicht umkehrbaren Processes bietet nur rein theoretisches Interesse.

§ 34. Mischungen verschiedener Gasmengen.

Die Wärmegleichungen (53) S. 127 sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass man es mit der Gewichtseinheit Gas zu thun hat. Wird nun aber vorausgesetzt, dass in einem Raume von V Cubikmetern G Kilogramm Gas vom Drucke p, der Temperatur T und dem specifischen Volumen v eingeschlossen sind, so besteht zunächst die Beziehung

$$V = Gv$$

und um die Wärmemenge dQ zu bestimmen, welche das Gasgewicht G für eine unendlich kleine umkehrbare Zustandsänderung braucht, hat man dann die folgenden identischen Gleichungen zu benutzen, welche aus den Gln. (53) S. 127 hervorgehen, wenn man dieselben rechts mit G multiplicirt:

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1} d(Vp) + Ap\,dV \tag{12a}$$

$$= c_v G\,dT + Ap\,dV \tag{12b}$$

$$= \frac{A}{\varkappa - 1} [V dp + \varkappa p\,dV] \tag{12c}$$

$$= c_v G \left[dT + (\varkappa - 1) T \frac{dV}{V} \right] \tag{12d}$$

$$= c_p G \left[dT - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{dp}{p} \right] \tag{12e}$$

Man stelle sich nun vor, dass ein Raum V mit zwei verschiedenen Gasen, und zwar mit G_1 kg des einen (a) und G_2 kg des zweiten (b) erfüllt ist; die specifische Wärme bei constantem Volumen sei beziehungsweise c'_v und c''_v und die bei constantem Drucke c'_p und c''_p, und die entsprechenden Verhältnisse beider specifischen Wärmen seien $\varkappa'$ und $\varkappa''$; ferner wird bei gemeinschaftlicher Temperatur T der Mischung p' der Druck des Gases a und p'' der des Gases b sein, der Art, dass die Summe $p' + p''$ den Gesammtdruck p repräsentirt. Wird nun dieser Mischung die Wärmemenge dQ mitgetheilt, so folgt nach Gl. (12b)

$$dQ = (c_v G_1 dT + Ap' dV) + (c''_v G_2 dT + Ap'' dV) ,$$

oder, wenn man die entsprechenden Glieder zusammenzieht und das Gesammtgewicht $G_1 + G_2$ beider Gasmengen mit G bezeichnet und $p = p' + p''$ beachtet,

$$dQ = G\left(\frac{c'_v G_2 + c''_v G_2}{G_1 + G_2}\right) dT + A p dV .$$

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit Gl. (12b) zeigt, dass die Mischung sich bei der Wärmemittheilung genau wie ein einziges Gas verhält, dessen specifische Wärme c_v bei constantem Volumen durch den Ausdruck:

$$c_v = \frac{c''_v G_1 + c''_v G_2}{G_1 + G_2} \tag{13}$$

bestimmt ist. Auf genau demselben Wege findet sich unter Benutzung von Gl. (12d) für die Mischung die specifische Wärme bei constantem Drucke

$$c_p = \frac{c'_p G_1 + c''_p G_2}{G_1 + G_2} , \tag{14}$$

und für das Verhältniss beider specifischen Wärmen der Mischung

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c'_p G_1 + c''_p G_2}{c'_v G_1 + c''_v G_2} , \tag{15}$$

und für die Differenz derselben

$$c_p - c_v = \frac{(c'_p - c'_v) G_1 + (c''_p - c'_v) G_2}{G_1 + G_2} . \tag{16}$$

Denkt man an die Mischung von mehr als zwei Gasen*), so schreibt sich ganz allgemein für die Mischung:

*) Einzelne Schriftsteller bezeichnen das Product Gc_v und Gc_p aus

$$c_v = \frac{\Sigma(c_v\,G)}{\Sigma(G)}\,, \quad (13\,a) \qquad c_p = \frac{\Sigma(c_p\,G)}{\Sigma(G)}\,, \quad (14\,a)$$

$$\varkappa = \frac{\Sigma(c_p\,G)}{\Sigma(c_v\,G)}\,, \quad (15\,a) \qquad c_p - c_v = \frac{\Sigma((c_p - c_v)\,G)}{\Sigma(G)}\,. \quad (16\,a)$$

Aus der durch Gl. (42) S. 115 gegebenen Beziehung $c_p - c_v = AB$ folgt überdies, wenn B_m die Constante der Zustandsgleichung für die Mischung ist und ebenso B_1, B_2 u. s. f. für die einzelnen Gase gelten, nach Gl. (16 a)

$$B_m = \frac{\Sigma(GB)}{\Sigma(G)}\,,$$

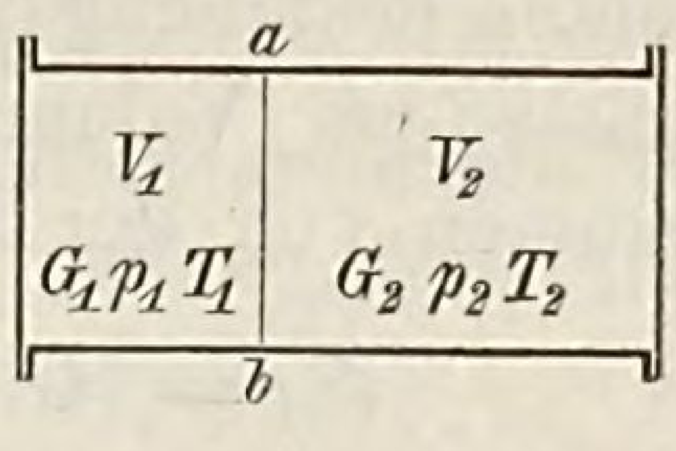
wie bereits durch Gl. (19 a), S. 101, gegeben wurde. Nach den dort gegebenen Gleichungen folgt überdies der Druck der einzelnen Gase in der Mischung:

$$\frac{p'}{p} = \frac{G_1 B_1}{\Sigma(GB)}\,; \quad \frac{p''}{p} = \frac{G_2 B_2}{\Sigma(GB)}\,; \quad \text{u. s. f.} \qquad (17)$$

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich nun der Vorgang beim Mischen zweier getrennter Gasarten, der ein nicht umkehrbarer Vorgang ist, näher verfolgen.

Denkt man sich zwei Räume V_1 und V_2 (Fig. 26) durch eine Scheidewand ab getrennt; in dem einen Raume befinden sich G_1 kg Gas vom Drucke p_1 und der Temperatur T_1 und in dem anderen Raume liegen G_2 kg eines andern Gases vom Drucke p_2 und der Temperatur T_2 vor; wird die Scheidewand ab beseitigt gedacht, so findet eine Mischung beider Gase statt und es fragt sich nun nach der Beschaffenheit der Mischung, nach ihrem Drucke p und ihrer Temperatur T. Vorausgesetzt werde dabei, dass während des Vorganges der Mischung Wärme weder zu- noch abgeleitet wird, dass also vor und nach der Mischung der gesammte Wärmeinhalt in beiden Gasen der gleiche

Fig. 26.



dem Gewichte des Gases in die betreffende specifische Wärme als »Wärmecapacität für constantes Volumen, bez. für constanten Druck«. Die Gleichungen des Textes sprechen sich dann dahin aus, dass die Wärmecapacität der Mischung gleich der Summe der Wärmecapacitäten der einzelnen Theile vor der Mischung ist.

ist; vorausgesetzt muss aber auch werden, was für die folgende Entwickelung entscheidend ist, dass die Zwischenwand ab derartig beseitigt erscheint, dass beide Gasarten sich vollständig frei ausbreiten können, denn es treten ganz andre Verhältnisse auf, wenn man sich in der Zwischenwand eine Oeffnung denken wollte, durch welche das Gas aus dem Raume, in welchem der höhere Druck herrscht, nach dem andern strömen würde, ein Fall, der unten besondre Betrachtung finden wird.

Nach Gl. (52b) S. 126 ergab sich der Wärmeinhalt, oder die Gaswärme in der Gewichtseinheit Gas bei der Temperatur T,

$$J = J_0 + c_v T ,$$

wobei J_0 eine dem besondern Gase entsprechende Constante darstellte. Diese constante Grösse ist allerdings für die verschiedenen Gase weder ihrem absoluten Werthe nach, noch in ihrem Verhältniss zu dem Werthe eines einzelnen Gases z. B. zu dem des Wasserstoffes, bekannt und darin ist es begründet, dass die Thermodynamik zur Zeit noch nicht solche Probleme zu lösen vermag, bei denen mit dem Mischen von Gasen zugleich chemische Veränderungen verbunden sind. Bei mechanischer Mischung, wie sie im vorliegenden Falle vorausgesetzt wird, wird durch genannten Umstand eine Schwierigkeit nicht bereitet. Wird die Constante für die Mischung mit J_0, dagegen für das Gas im Raume V_1 mit J_0', im andern Raume mit J_0'' bezeichnet und bedeuten beziehungsweise c_v, c_v' und c_v'' die specifischen Wärmen bei constantem Volumen, so ist der Wärmeinhalt J_m in beiden Räumen vor der Mischung:

$$J_m = (G_1 J_0' + c_v' G_1 T_1) + (G_2 J_0'' + c_v'' G_2 T_2) ;$$

dagegen in beiden Räumen nach der Mischung, wenn das Gesammtgewicht $G_1 + G_2$ mit G bezeichnet wird,

$$J_m = G J_0 + c_v G T .$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man den Wärmeinhalt J der Gewichtseinheit Mischung

$$J = J_0 + c_v T = \frac{G_1 J_0' + G_2 J_0''}{G_1 + G_2} + \frac{c_v' G_1 T_1 + c_v'' G_2 T_2}{G_1 + G_2} .$$

Es folgt hieraus die Constante J_0 für die Mischung

$$J_0 = \frac{G_1 J_0' + G_2 J_0''}{G_1 + G_2} \tag{18}$$

und die Mischungstemperatur T_1, wenn man noch Gl. (13) benutzt,

$$T = \frac{c_v' G_1 T_1 + c_v'' G_2 T_2}{c_v' G_1 + c_v'' G_2} . \tag{19}$$

Aus der Zustandsgleichung der Gase $pv = BT$ folgt, wegen $Gv = V$ und unter Beachtung der Beziehung (54) S. 128

$$c_v G T = \frac{A V p}{\varkappa - 1}$$

und hiernach aus Gl. (19) auch

$$\frac{Vp}{\varkappa - 1} = \frac{V_1 p_1}{\varkappa' - 1} + \frac{V_2 p_2}{\varkappa'' - 1} , \tag{20}$$

aus welcher Formel sich der Druck p der Mischung unmittelbar berechnen lässt. Bemerkenswerth ist, dass man in Gl. (19) statt der absoluten Temperatur auch die Temperatur nach Celsius substituiren, also schreiben kann

$$t = \frac{c_v' G_1 t_1 + c_v'' G_2 t_2}{c_v' G_1 + c_v'' G_2} . \tag{19a}$$

Man erkennt übrigens, dass sich die vorstehenden Formeln auch leicht für den Fall anschreiben lassen, dass man es mit der Mischung von mehr als zwei Gasen zu thun hat.

Nimmt man an, dass die beiden zur Mischung gelangenden Gase von gleicher Beschaffenheit sind, so ist $c_v' = c_v'' = c_v$ und $\varkappa' = \varkappa'' = \varkappa$ und es folgt dann die Mischungstemperatur

$$T = \frac{G_1 T_1 + G_2 T_2}{G_1 + G_2} \tag{19b}$$

und die Formel zur Berechnung des Mischungsdruckes

$$Vp = V_1 p_1 + V_2 p_2 , \tag{20a}$$

zwei Gleichungen, von denen die erstere in der Physik, und die andere bei technischen Untersuchungen vielfache Anwendungen gefunden haben.

Werden dagegen verschiedene Gase gemischt und ist deren Temperatur vor der Mischung gleich, also $t_1 = t_2$, so ergiebt Gl. (19a) auch $t = t_1$, wonach also nach vollendeter Mischung (nach

Eintritt des Gleichgewichtszustandes) die Temperatur der Mischung gleich derjenigen vor der Mischung ist.

Haben dagegen beide Gase vor der Mischung verschiedene Temperaturen, aber gleichen Druck, ist also $p_1 = p_2$, so ergiebt Gl. (20), dass der Mischungsdruck p nur dann mit dem Anfangsdruck, identisch ist, wenn $\varkappa' = \varkappa''$ ist, ein Fall der bei den einfachen Gasen vorliegt.

Als ein besonderes Beispiel mag die Mischung von Wasserstoff und Sauerstoff in dem Verhältniss betrachtet werden, in welchem sie sich zu Knallgas mischen.

Befinden sich also in dem einen Raume V_1 (Fig. 26) G_1 kg Wasserstoff und in dem andern $G_2 = 8\,G_1$ kg Sauerstoff und setzt man die Temperatur T sowohl, wie den Druck p in beiden Räumen gleich gross voraus, so wird nach den vorstehenden Sätzen auch nach der Mischung zu Knallgas die Temperatur und der Druck der anfängliche sein.

Da für Wasserstoff $c_v' = 2{,}4123$ und für Sauerstoff $c_v = 0{,}1551$ ist (Tabelle S. 116), so ergiebt sich für die Mischung (Knallgas) die specifische Wärme c_v bei constantem Volumen nach Gl. (13)

$$c_v = 0{,}4059 \; .$$

Ist J_0' die Constante in der Gl. (52b) S. 126 für den Wärmeinhalt des Wasserstoffes und J_0'' die des Sauerstoffes, welche beiden Werthe allerdings noch unbekannt sind, so bestimmt sich die betreffende Constante für das Knallgas nach Gl. (18)

$$J_0 = \tfrac{1}{9} J_0' + \tfrac{8}{9} J_0'' \qquad (21)$$

und der Wärmeinhalt des Knallgases bei der Temperatur T und dem Drucke p ist demnach

$$J = J_0 + c_v T \; ,$$

in welche Gleichung die vorstehenden Werthe von J_0 und c_v eingesetzt werden müssen.

Denkt man sich jetzt, um den Fall noch etwas weiter zu verfolgen, das Knallgas explodire (z. B. durch einen elektrischen Funken) bei constantem Volumen, so entsteht Wasserdampf unter Freiwerden von Wärme und starker Temperaturerhöhung. Entzieht man diesem Wasserdampfe bei constantem Volumen die Wärmemenge Q, um ihn auf die anfängliche Tem-

peratur T des Knallgases zu bringen, so ist der Wärmeinhalt des Wasserdampfes bei der Temperatur T auch

$$J_0''' + c_v''' T = J_0 + c_v T - Q \ ,$$

wenn mit c_v''' die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Volumen und mit J_0''' die Constante der Gl. (52b) S. 126 für den Wärmeinhalt bezeichnet wird.

Aus vorstehender Gleichung bestimmt sich die bei der Explosion der Gewichtseinheit Knallgas freiwerdende Wärmemenge:

$$Q = (J_0 - J_0''') + (c_v - c_v''') T \ , \qquad (15g)$$

erscheint also abhängig von der Temperatur T, bei welcher man die chemische Verbindung beider Gase hat eintreten lassen, ein Satz, der für vorliegenden Fall auch von Kirchhoff*) gefunden wurde.

Die Zustandsgleichung für Knallgas ergab sich in § 20 S. 106 $pv = \frac{1}{6} B_0 T$; der aus dem Knallgas hervorgegangene Wasserdampf hat dagegen bei gleicher Temperatur T und dem gleichen Volumen einen Druck p', der aus der Zustandsgleichung $p'v = \frac{1}{9} B_0 T$ (§ 20 S. 106) sich bestimmt; im vorliegenden Falle findet sich daher der schliessliche Druck des Wasserdampfes $p' = \frac{2}{3} p$.

Die vorstehenden Bemerkungen gelten allerdings nur, sofern man für Wasserdampf annehmen darf, dass seine Zustandsgleichung mit der der Gase übereinstimmt.

§ 35. Ueberströmen eines Gases aus einem Gefässe in ein anderes bei constantem Gefässvolumen**).

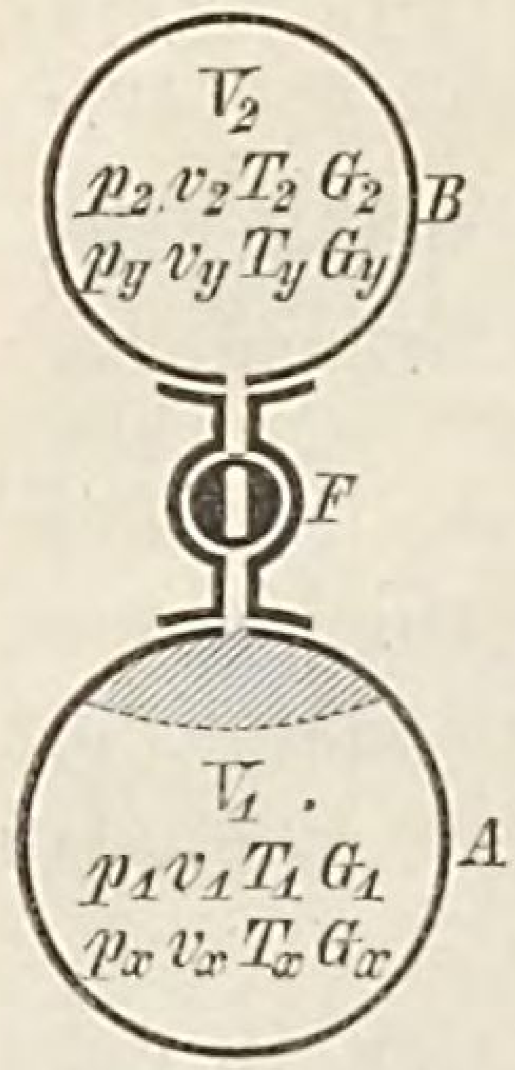
Zwei Gefässe A und B (Fig. 27 a. f. S.) seien durch ein mit einem Ventile F versehenes Rohr verbunden und seien beide mit einem Gase von ein und derselben Art, also z. B. mit atmosphärischer Luft gefüllt. In dem Gefässe A, dessen Volumen V_1 sein mag, befinden sich anfangs (bei geschlossenem Durchlassventil) G_1 kg

*) Poggendorff's Annalen Bd. 103. S. 205; vergl. auch C. Neumann, »Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme«, 1875. S. 175.

**) Das hier bezeichnete Problem hat zuerst Bauschinger in einer vortrefflichen Abhandlung »Theorie des Ausströmens vollkommener Gase aus einem Gefässe und ihres Einströmens in ein solches« in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. VIII. S. 81 gelöst.

Luft von der Spannung p_1, dem specifischen Volumen v_1 und der Temperatur T_1; im andern Gefässe B, dem Zuflussgefässe oder der Vorlage vom Volumen V_2 befinden sich G_2 kg Luft vom Drucke p_2, Volumen V_2 und der Temperatur T_2. Beide Gefässe sollen aber, wie zunächst vorausgesetzt werden soll, für Wärme undurchdringlich sein, die zu betrachtenden Vorgänge sollen also ohne Wärmemittheilung von aussen oder eine Wärmeableitung nach aussen hin erfolgen.

Fig. 27.



Setzt man nun das Ventil F eine Zeit lang geöffnet voraus, so wird nach Schluss desselben, wenn $p_1 > p_2$ war, im Raume A ein Luftgewicht G_x zurückgeblieben, also die Luftmenge $G_1 - G_x$ in die Vorlage übergegangen sein; die Vorlage enthält jetzt das Luftgewicht $G_y = G_1 + G_2 - G_x$; Druck, Volumen und Temperatur des Gases im Ausflussgefäss seien nach dem Abfluss p_x, v_x und T_x, in der Vorlage dagegen p_y, v_y und T_y.

Wird das zurückgebliebene Gasgewicht G_x als gegeben angesehen, so käme es darauf an, die vorgenannten sechs Grössen zu berechnen; da aber je drei derselben zu einander in der Beziehung

$$p_x v_x = B\,T_x \quad \text{und} \quad p_y v_y = B\,T_y$$

stehen, so hat man zur Lösung der Aufgabe nur vier Gleichungen aufzustellen und zwar mögen als die zu bestimmenden Unbekannten die Pressungen p_x und p_y, sowie die Temperaturwerthe T_x und T_y betrachtet werden.

Die Bestimmung dieser Grössen setzt allerdings voraus, dass nach dem Abschluss des Ventiles in beiden Räumen der Gleichgewichtszustand wieder eingetreten sei, denn während des Ueberströmens und im Augenblicke des Abschlusses liegt hier ohne Zweifel eine Gleichgewichtsstörung vor: das Gas wird sich in stürmischer, wirbelnder Bewegung befinden und die Störung wird um so grösser sein, je kleiner der Inhalt beider Gefässe und je grösser die Durchflussöffnung ist. Der Vorgang der Expansion im Ausflussgefäss und ebenso der der Compression in der Vorlage ist daher nicht umkehrbar; setzt man aber eine kleine Durchflussöffnung und grosse Gefässinhalte voraus, so darf man

die Expansion und die Compression als auf umkehrbarem Wege stattfindend voraussetzen; das nach der Mündung strömende Gas wird sich in einem trichterförmigen Raume bewegen und sich in gleicher Weise in der Vorlage ausbreiten; der Inhalt der beiden Trichter und daher das Gewicht der in denselben in Bewegung befindlichen Gasmenge kann dann unter der gemachten Voraussetzung als sehr klein gegen die übrige in beiden Räumen in Ruhe befindliche Gasmasse vernachlässigt werden. In diesem Falle sind die Werthe p_x und p_y Gleichgewichtspressungen und T_x und T_y Gleichgewichtstemperaturen, die im Augenblicke der Abschliessung der Durchlassöffnung bereits vorliegen, und deren Einstellung nicht erst abgewartet zu werden braucht; unter der gemachten Voraussetzung ist es nicht einmal erforderlich, an das Abschliessen des Ventiles zu denken und darf angenommen werden, dass die Pressungen p_x und p_y, die experimentell durch Beobachtung am Manometer bestimmt werden, den Gleichgewichtsdruck in beiden Gefässen während des Ueberströmens angeben.

Wird das Durchlassventil so lange offen erhalten, bis der Druck in beiden Gefässen gleich geworden, also das aus der Druckdifferenz entspringende Ueberströmen vollendet ist, so wird die Temperatur in beiden Räumen doch verschieden sein und erst nach längerem Offenhalten der Durchlassmündung wird durch Diffusion auch die Temperaturausgleichung eintreten; nach Eintritt derselben liegen dann die Verhältnisse der Art, wie sie im vorigen Paragraphen betrachtet worden sind.

Unter den genannten einschränkenden Voraussetzungen, die bei später folgenden Untersuchungen zum Theil noch fallen gelassen werden sollen, lassen sich nun die Vorgänge leicht in folgender Art der Rechnung unterwerfen.

a. Vorgänge im Ausflussgefässe.

Bezeichnet in Fig. 27 das durch eine punktirte Linie umschlossene schraffirte Gebiet den Raum, den die bis zum Abschliessen des Ventiles abgeflossene Gasmenge vor der Eröffnung des Ventiles einnahm, so hatte die zurückgebliebene Gasmenge G_x anfangs das Volumen $V_x = G_x v_1$, welches in Fig. 27 durch den nicht schraffirten Theil des Gefässinhaltes angegeben wird.

Diese Gasmenge expandirte nun umkehrbar, adiabatisch auf das Gefässvolumen

$$V_1 = G_x v_x = G_1 v_1 \ .$$

Hieraus findet sich nun schon das specifische Volumen v_x der zurückgebliebenen Gasmenge beim Schliessen der Mündung:

$$\frac{v_x}{v_1} = \frac{G_1}{G_x} \qquad (23)$$

und daher nach Gl. (60) S. 134 der Druck p_x aus der Gleichung:

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(\frac{G_x}{G_1}\right)^{\varkappa} \qquad (24)$$

und nach Gl. (61) S. 134 die Temperatur T_x durch

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{G_x}{G_1}\right)^{\varkappa - 1} \ . \qquad (25)$$

Versieht man das Ausflussgefäss mit einem Manometer, so lässt sich der Druck p_x im Augenblick des Schliessens der Durchflussöffnung oder bei continuirlichem Ausströmen in beliebigen Zeitintervallen leicht beobachten; nach Gl. (24) berechnet sich dann für jede Beobachtung die zurückgebliebene Luftmenge G_x und hieraus das Luftgewicht, welches in den einzelnen Zeitintervallen zum Ausfluss gelangte. Die Gleichungen (23) und (25) ergeben dann auch noch das specifische Volumen v_x und die Temperatur T_x der im Ausflussgefässe zurückgebliebenen Luftmenge am Ende eines jeden Intervalles. Auf die vorstehende Frage wird weiter unten zurückzukommen sein.

b) Vorgänge im Zuflussgefässe.

Der gesammte Wärmeinhalt des Gases in beiden Räumen zusammengenommen ist, wie aus den Erörterungen im vorigen Paragraphen hervorgeht, beim Beginn des Versuches:

$$(G_1 + G_2) J_0 + c_v (G_1 T_1 + G_2 T_2) \ ,$$

dagegen am Ende des Ueberströmens, nach Schluss der Durchlassöffnung oder im beliebigen Augenblicke während des Ueberströmens

$$(G_x + G_y) J_0 + c_v (G_x T_x + G_y T_y) \ .$$

Beide Ausdrücke sind gleich, da während des Vorganges

Wärme weder zu- noch abgeleitet wird, und daher wird, weil überdies

$$G_y + G_x = G_1 + G_2 \tag{26}$$

die Gleichung gelten:

$$G_y T_y + G_x T_x = G_1 T_1 + G_2 T_2 \,. \tag{27}$$

Aus dieser Formel berechnet sich nun für ein schon gegebenes G_x die Temperatur T_y, weil G_y aus Gl. (26) und T_x aus Gl. (25) bekannt ist. Durch Substitution des Werthes T_x erhält man übrigens direct:

$$G_y T_y = G_2 T_2 + G_1 T_1 \left(1 - \left(\frac{G_x}{G_1}\right)^{\varkappa}\right) . \tag{27a}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit der Constanten B der Zustandsgleichung des Gases, so folgt wegen der Beziehungen

$$V_2 = G_y v_y = G_2 v_2 \quad \text{und} \quad V_1 = G_x v_x = G_1 v_1$$

der Druck p_y in der Vorlage

$$p_y = p_2 + \frac{V_1 p_1}{V_2}\left(1 - \left(\frac{G_2}{G_1}\right)^{\varkappa}\right) \tag{28}$$

oder auch nach Gl. (24), wenn der Druck p_x als bereits berechnet oder als beobachtet angenommen wird

$$V_1 p_x + V_2 p_y = V_1 p_1 + V_2 p_2 \,. \tag{28a}$$

Am Ende des Ueberströmens ist $p_x = p_y = p$ und daher:

$$p = \frac{V_1 p_1 + V_2 p_2}{V_1 + V_2} \tag{28b}$$

und mit Hülfe dieses Werthes liesse sich dann leicht auch die übergegangene Gasmenge, sowie die Temperatur im Ausflussgefässe und in der Vorlage berechnen, Grössen, die allerdings nur für einen Augenblick gültig sein können, weil unmittelbar nach der Druckausgleichung die Diffusion beginnen würde.

Die Gleichungen des vorstehenden Problems geben die Grundlagen zur Behandlung einer Reihe von wichtigen Specialfällen, von denen einige, die wissenschaftliches Interesse bieten und die zu besonderen Versuchen Anlass gegeben haben, behandelt werden mögen.

§ 36. Einströmen der freien atmosphärischen Luft in ein Gefäss.

Es möge zuerst vorausgesetzt werden, dass der Inhalt V_1 des Ausflussgefässes A (Fig. 27) S. 168 unendlich gross, also $G_1 = \infty$ ist. Dieser Fall liegt vor, wenn die freie atmosphärische Luft in ein Gefäss strömt, in welchem sich im Anfange verdünnte Luft befindet; p_1 ist dann die atmosphärische Pressung und T_1 die Temperatur der äusseren Luft; die Anfangstemperatur im Zuflussgefässe, also z. B. im Recipienten einer Luftpumpe, mag irgend welchen Werth T_2 haben.

Zum Zweck der Lösung der Aufgabe ist es angemessen, die entsprechenden Formeln des vorigen Paragraphen einer Umformung zu unterwerfen; bezeichnet G das Gewicht des Gases, welches innerhalb der angenommenen Zeit aus einem Gefässe in das andere gegangen ist, so ist in den dort angegebenen Formeln $G_x = G_1 - G$ und $G_y = G_2 + G$ zu substituiren; für das Ausflussgefäss gilt daher nach Gl. (24) und (25)

$$\frac{p_x}{p_1} = \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa} \quad \text{und} \quad \frac{T_x}{T_1} = \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa - 1} .$$

Beide Formeln geben für den vorliegenden Fall $G_1 = \infty$

$$p_x = p_1 \quad \text{und} \quad T_x = T_1 ,$$

ein Resultat, das selbstverständlich ist.

Für die Aenderungen in der Vorlage ergiebt dagegen Gl. (27a)

$$(G_2 + G)\,T_y = G_2 T_2 + G_1 T_1 \left[1 - \left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa}\right] .$$

Wenn man den Exponentialwerth nach der binomischen Reihe entwickelt, also setzt:

$$\left(1 - \frac{G}{G_1}\right)^{\varkappa} = 1 - \varkappa \frac{G}{G_1} + \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{G}{G_1}\right)^2 - + \cdots ,$$

so folgt

$$(G_2 + G)\,T_y = G_2 T_2 + \varkappa\, G\, T_1 - \frac{\varkappa(\varkappa - 1)}{1 \,.\, 2}\,\frac{G^2\, T_1}{G_1} + \cdots .$$

und hieraus ergiebt sich für $G_1 = \infty$ die Temperatur T_y in dem Gefässe am Ende des Einströmens von G kg äusserer atmosphärischer Luft:

$$T_y = \frac{G_2 T_2 + \varkappa G T_1}{G_2 + G} \quad . \tag{29}$$

Wird die Gleichung auf beiden Seiten mit der Constanten B der Zustandsgleichung multiplicirt, so folgt nach einigen leicht zu übersehenden Umformungen der Druck p_y am Ende des Einströmens

$$p_y = p_2 + \frac{c_p(\varkappa - 1) G T_1}{A V_2} \tag{30}$$

der auch:

$$p_y = p_2 \left[1 + \frac{\varkappa G T_1}{G_2 T_2}\right] . \tag{30a}$$

Aus Gl. (29), die sich übrigens auch in der Form:

$$T_y = T_2 + \frac{(\varkappa T_1 - T_2) G}{G_2 + G} \tag{29a}$$

schreiben lässt, erkennt man, dass mit dem Einströmen in das Gehäuse eine Temperaturerhöhung daselbst verbunden ist.

Ein sehr merkwürdiges Resultat erhält man, worauf schon Bauschinger (a. a. O.) aufmerksam machte, wenn man voraussetzt, dass der Raum, in welchen die äussere atmosphärische Luft einströmt, im Anfange luftleer war. Gl. (30) giebt in diesem Falle, also für $p_2 = 0$ und $G_2 = 0$:

$$p_y = \frac{c_p(\varkappa - 1) G T_1}{A V_2} \tag{30b}$$

und Gl. (29a) liefert

$$T_y = \varkappa T_1 \quad . \tag{29b}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass beim Eintritt der atmosphärischen Luft in einen luftleeren Raum sich die Temperatur daselbst plötzlich vom ersten Moment der Eröffnung der Mündung an auf den Werth $\varkappa T_1$ einstellt und constant bleibt, so lange Einströmen in das (für Wärme undurchdringlich angenommene) Gefäss stattfindet. Ersetzt man in Gl. (29b) die absolute Temperatur durch die Temperatur nach Celsius gemessen, so folgt

$$t_y = 111{,}93 + \varkappa t_1 \quad .$$

Hätte also die äussere atmosphärische Luft die Temperatur $t_1 = 15^\circ$, so fände sich $t_y = 133^\circ{,}08$.

Ist das Gefäss anfangs nicht luftleer, wäre aber vor Beginn des Einströmens die Luft in demselben durch Erwärmung von aussen auf die Temperatur $T_2 = \varkappa T_1$ gebracht worden, so ergiebt Gl. (29a) $T_y = T_2$; die Temperatur der Luft im Gefässe erhält sich daher während des Einströmens auf constanter Höhe T_2. Ist der Druck p_y gleich dem äussern p_1 geworden, so ist das Einströmen vollendet; in diesem Augenblicke beträgt die eingetretene Luftmenge nach Gl. (30a)

$$G = \frac{(p_1 - p_2) G_2 T_2}{\varkappa p_2 T_1} = \frac{V_2 (p_1 - p_2)}{\varkappa B T_1}$$

und die Substitution in Gl. (29) giebt die Temperatur im Gefässe

$$T_y = \frac{\varkappa T_1 T_2 p_1}{p_1 T_2 + p_2 (\varkappa T_1 - T_2)} .$$

Ein entsprechender Versuch lässt sich, wie sogleich näher besprochen werden wird, allerdings nicht realisiren. Die Gleichungen (29) und (30) haben historisches Interesse. Was zunächst die letztere Gleichung betrifft, so berechnet sich aus derselben

$$G = \frac{A V_2 (p_y - p_2)}{c_p (\varkappa - 1) T_1} , \tag{31}$$

oder, wenn man statt des Gewichtes G der eingetretenen Luftmenge das Volumen V derselben, bei dem äussern Drucke p_1 gemessen, einführt, indem man die Beziehung $V p_1 = G B T_1$ beachtet und die Constante B aus Gl. (54) S. 128 bestimmt

$$V = \frac{V_2 (p_y - p_2)}{\varkappa p_1} . \tag{31a}$$

Versieht man daher den Recipienten einer Luftpumpe mit einem Manometer und mit einer Mündung, durch welche die atmosphärische Luft einströmen kann und beobachtet man während des Einströmens in gewissen Zeitintervallen den Manometerstand p_y, so lässt sich nach vorstehenden Formeln das Luftgewicht G oder auch das Luftvolumen V, bei äusserm Drucke p_1 gemessen, berechnen, welches in den einzelnen Intervallen durch die Mündung ging.

Hierdurch wäre ein Verfahren gewonnen, auf experimentellem Wege die Luftmenge zu ermitteln, die bei einer gegebenen Druckdifferenz durch eine bestimmte Mündung in der Zeiteinheit hindurchströmt, und die gefundenen Werthe liessen sich dann ver-

gleichen mit den theoretischen Ergebnissen der Untersuchungen über den Ausfluss der Luft durch Mündungen.

Dieser Weg ist in der That auch von de Saint-Venant und Wantzel*) (1839) eingeschlagen worden; dieselben liessen die atmosphärische Luft durch kreisförmige Mündungen verschiedener Art und von Durchmessern von $^2/_3$, 1 und $1^1/_2$ Millimeter in den Recipienten einer Luftpumpe strömen, dessen Inhalt allerdings nur 0,0174 cbm betrug und in welchem am Anfange der verschiedenen Versuchsreihen gewöhnlich ein Druck von 10 bis 20 mm Quecksilbersäule vorlag. Die Experimentatoren liessen bei der einen Versuchsmethode die Luft ohne Unterbrechung einströmen bis zur Druckausgleichung und beobachteten in gleichen Zeitintervallen (von 5 zu 5 Secunden) die Druckzunahme; nach der zweiten Methode liessen sie die Luft mit Unterbrechungen einströmen, nach Verfluss von je 5 Secunden wurde die Mündung während einiger Secunden mit dem Finger verschlossen und sofort der Druck notirt.

Die Arbeit von de Saint-Venant und Wantzel ist fast 30 Jahre lang unbeachtet geblieben; ohne Zweifel ist dieses hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben, dass gerade Poncelet es war, der in seinem Berichte an die Pariser Akademie die Versuche als nicht entscheidend erklärte, weil dieselben in zu kleinem Maassstabe (mit zu kleinen Mündungen) angestellt worden seien; man muss dem Urtheile beistimmen, aber hinzufügen, dass auch die Resultate der eben angegebenen Versuche nicht zuverlässig sein können.

Bei der Entwickelung der obigen Formeln ist vorausgesetzt worden, dass das Zufluss- wie das Abflussgefäss für Wärme undurchdringlich sei, eine Voraussetzung, die unerfüllbar ist, da beim Einströmen in den Recipienten daselbst eine starke Temperaturerhöhung eintreten und in Folge dessen während der ganzen Dauer des Versuches die im Innern befindliche Luft durch die Gefässwandungen Wärme an die äussere Atmosphäre abgeben wird; bei der ersten Versuchsmethode wird daher die Druckzunahme $p_y - p_2$

*) Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pressions considérables; par Barré de Saint-Venant et Laurent Wantzel. (Présenté à l'Académie des Sciences, le 25 février 1839.) — Journal de l'École polytechnique. t. XVI. 1839.

in geringerm Maasse stattfinden, als es die Gl. (31) und (31 a) voraussetzen. Bei der zweiten Methode kann wegen der kurzen Zeitdauer des Einströmens (5 Secunden) allerdings angenommen werden, dass der Wärmeverlust durch Ausstrahlung vernachlässigt werden kann; die Experimentatoren hätten aber die Mündung nicht nur während einiger Secunden, sondern so lange geschlossen halten sollen, bis ein vollständiger Temperaturausgleich mit der äussern Atmosphäre vorlag.

Den Beginn des Einströmens wird man erst stattfinden lassen dürfen, wenn die Anfangstemperatur T_2 im Gefässe mit der äussern Temperatur T_1 identisch ist, was sich dadurch erkennen lässt, dass bei geschlossenem Gefässe der Manometerstand sich constant erhält.

Nun gilt für den Anfang des Versuches die Beziehung $V_2 p_2 = G_2 B T_1$ und für das Ende, nachdem G kg Luft eingetreten und nachdem die Temperaturausgleichung stattgefunden und der Manometerstand beim Drucke p stationär geworden ist, $V_2 p = (G_2 + G) B T_1$; die Verbindung beider Gleichungen giebt dann für die eingetretene Luftmenge

$$G = G_2 \frac{(p - p_2)}{p_2}, \tag{32}$$

oder, wenn man die Luftmenge G in Cubikmetern bei äusserm Drucke misst,

$$V = V_2 \frac{(p - p_2)}{p_1}. \tag{32a}$$

Es giebt also zwei Wege, die eingetretene Luftmenge zu bestimmen, entweder mit Hülfe der Gln. (31) und (31 a), indem man den Druck p_y im Gefässe im Augenblicke des Schliessens beobachtet oder mit Hülfe vorstehender Gln. (32) und (32 a), indem man den Druck p am Ende nach der Temperaturausgleichung beobachtet; das letztere Verfahren ist offenbar das zuverlässigere.

De Saint-Venant und Wantzel kannten die Gln. (31), die Sätzen der Thermodynamik entsprungen sind, natürlich nicht, sondern berechneten das Luftvolumen V nach der Gl. (32 a), begingen aber dabei den Fehler, dass sie die Temperaturausgleichung nicht abwarteten und in der Formel p_y statt p substituirten.

Trotz dieser Mängel ist aber deren Abhandlung von hohem Werthe, da die Verfasser bezüglich des Ausflusses der Gase Sätze

entwickelt haben, auf die man erst in neuerer Zeit wieder zurückgekommen ist und die weiter unten näher besprochen werden sollen.

Die vorstehenden Rechnungen sind aber auch noch aus andern Gründen von Interesse; die Verbindung der beiden Gln. (31 a) und (32 a) ergiebt nämlich

$$\varkappa = \frac{p_y - p_2}{p - p_2} \,. \tag{33}$$

Lässt man daher in ein Gefäss, in welchem sich verdünnte atmosphärische Luft vom Drucke p_2 und der Temperatur der äussern Atmosphäre befindet, die Luft einströmen und beobachtet man den Druck p_y im Augenblicke des Schliessens der Mündung und dann den Druck p nach der Temperaturausgleichung, so giebt vorstehende Gleichung das Mittel an die Hand, die wichtige physikalische Constante $\varkappa$ zu bestimmen.

Ist das Gefäss im Anfange luftleer, also $p_2 = 0$, so findet sich noch einfacher

$$\varkappa = \frac{p_y}{p} \,. \tag{33a}$$

Auf die angegebene Weise, für welche Gl. (33) gültig ist, haben zuerst Clément und Désormes den Werth $\varkappa$ ermittelt; dabei kommt es aber darauf an, dass die Einströmungsöffnung nur während einer sehr kurzen Zeit geöffnet ist, um voraussetzen zu dürfen, dass nicht schon während des Einströmens eine Wärmeausstrahlung vorliegt; beachtet man diese Voraussetzung nicht, so fällt p_y und daher auch $\varkappa$ zu klein aus, ein Fall, der in der That bei den Versuchen von Clément und Désormes vorlag.

§ 37. Ausströmen der atmosphärischen Luft aus einem Gefässe in die freie Atmosphäre.

Strömt Luft aus einem für Wärme undurchdringlichen Gefässe vom Volumen V_1, in welchem anfänglich der Druck p_1, die Temperatur T_1 herrscht und welches im Anfange G_1 kg Luft enthält, in die freie Atmosphäre, so wird nach einer gewissen Zeit der Druck auf p_x und die Temperatur auf T_x herabgegangen sein. Wird in diesem Augenblicke die Mündung geschlossen, und ist G_x das Gewicht der im Gefässe zurückgebliebenen Luft-

menge, so bestehen zwischen diesen Grössen die durch die Gln. (24) und (25) S. 170 gegebenen Beziehungen. Ist G das Luftgewicht, welches zum Ausfluss gelangte, so wäre $G_x = G_1 - G$ zu setzen, und Gl. (24) giebt dann unter den dort gemachten Voraussetzungen (adiabatische umkehrbare Expansion der Luft im Ausflussgefässe während des Ausströmens)

$$G = G_1 \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right]. \tag{34}$$

Bezeichnen p_2 und T_2 Druck und Temperatur der äussern Atmosphäre, die während des Versuches eine Aenderung nicht erleiden, und wird hier gleich von vorn herein angenommen, dass die Temperatur der Luft im Gefässe anfänglich mit der der äussern Luft identisch, also $T_1 = T_2$ ist, so ergiebt sich nach Gl. (25)

$$\frac{T_x}{T_2} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \tag{35}$$

Würde man demnach mit Hülfe eines Manometers den Anfangsdruck p_1 und den Enddruck p_x im Augenblicke des Schliessens der Mündung beobachten, so liesse sich nach Gl. (34) die Luftmenge berechnen, die zum Ausfluss gelangte und nach Gl. (35) die Temperatur T_x im Momente des Abschlusses.

Will man die ausgeflossene Luftmenge in Cubikmetern bei dem anfänglichen inneren Drucke p_1 und der anfänglichen Temperatur T_2 messen, und bezeichnet man dieses Volumen mit V, so besteht die Beziehung:

$$V p_1 = G B T_2 .$$

Ebenso bestimmt sich aber auch G_1 aus der Beziehung $V_1 p_1 = G_1 B T_2$; die Benutzung beider Formeln in Gl. (34) ergiebt dann auch

$$V = V_1 \left[1 - \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right]. \tag{34 a}$$

Lässt man jetzt die Voraussetzung fallen, dass das Gefäss für Wärme undurchdringbar sei, so wird vom Abschluss der Mündung an, weil $T_x < T_2$ ist, die äussere atmosphärische Luft so lange Wärme an die im Gehäuse zurückgebliebene Luft abgeben, bis daselbst die Temperatur auf den anfänglichen Werth T_2 gestiegen

ist; hierbei steigt aber der Druck p_x auf den Druck p, der schliesslich stationär erscheint und leicht beobachtet werden kann, wenn man beim Experiment lange genug zuwartet. Diese Erwärmung findet bei constantem Volumen statt und daher bestehen nach der angenommenen Bezeichnung die Beziehungen

$$V_1 p_x = (G_1 - G) B T_x \quad \text{und} \quad V_1 p = (G_1 - G) B T_2 ,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{T_x}{T_2} = \frac{p_x}{p} = \frac{p_x}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p} . \tag{36}$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit Gl. (35) giebt

$$\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \frac{p}{p_1} , \tag{37}$$

und wenn dieser Werth in Gl. (34) oder (34a) substituirt wird, erhält man die ausgeflossene Luftmenge dem Gewichte nach

$$G = G_1 \left(\frac{p_1 - p}{p_1}\right) \tag{34b}$$

und dem Volumen nach (beim Drucke p_1 gemessen)

$$V = V_1 \left(\frac{p_1 - p}{p_1}\right) . \tag{34c}$$

Diese letztern Gleichungen geben wieder zu einigen wichtigen Bemerkungen Anlass. Zunächst erkennt man, dass sich mit Hülfe der Gl. (37) der Werth von $\varkappa$ ermitteln lässt, wenn man die drei Pressungen p_1, p_x und p, im Anfange und am Ende des Ausströmens, sowie endlich nach der Temperaturausgleichung bestimmt; man erhält dann die wichtige Grösse $\varkappa$ nach der Gleichung

$$\varkappa = \frac{\log p_1 - \log p_x}{\log p_1 - \log p} . \tag{37a}$$

Auf diesem Wege sind Versuche gemacht worden von Gay-Lussac und Welter, von Masson, Dupré, Cazin, Hirn, Weisbach und Röntgen, die aber unter sich, obgleich das Experiment so einfach erscheint, ziemlich beträchtliche Abweichungen zeigen, und zwar in der Art, dass die Grösse $\varkappa$ sich in den meisten Fällen beträchtlich kleiner als 1,410 herausstellte.

Als die zuverlässigsten Versuche erscheinen die von Cazin*), Weisbach**) und Röntgen***).

Weisbach beobachtete unter besonders günstigen Umständen, denn sein Ausflussgefäss (ein gewöhnlicher cylindrischer Dampfkessel) hatte den sehr bedeutenden Inhalt $V_1 = 4{,}6720$ cbm; die 40 mm weite Ausflussöffnung wurde nur während einiger Secunden geöffnet.

Bei dem einen seiner beiden Versuche betrugen, in Millimeter Quecksilbersäule gemessen, die drei beobachteten Pressungen:

$$p_1 = 1452{,}2 \qquad p_x = 1323{,}2 \qquad p = 1358{,}2\ ,$$

bei dem andern Versuche

$$p_1 = 625{,}0 \qquad p_x = 494{,}0 \qquad p = 530{,}0\ .$$

Die erstern Werthe geben nach Gl. (37a) $\varkappa = 1{,}405$, die andern $\varkappa = 1{,}400$, also beide etwas kleiner als $1{,}410$.

Mit besonderer Sorgfalt sind die Versuche von Röntgen ausgeführt: derselbe findet als Mittelwerth aus 10 Versuchen mit Luft $\varkappa = 1{,}4053$; aus 8 Versuchen mit Wasserstoff $\varkappa = 1{,}3852$ und aus 10 Versuchen mit Kohlensäure $\varkappa = 1{,}3052$. Statt Quecksilbermanometer, wie Weisbach, wandte er ein sehr empfindliches Metallmanometer an; sein Ausflussgefäss hatte jedoch nur einen Inhalt von $V_1 = 0{,}070$ cbm. Man hat nun von jeher das Resultat, dass diese Versuche $\varkappa$ kleiner ergeben, als zu erwarten steht, dem Umstande zugeschrieben, dass die Voraussetzungen nicht erfüllt seien, unter denen die Formel (37) resp. (37a) entwickelt ist, indem schon während des Ausströmens, wenn die Zeit desselben auch noch so kurz ist, die Gefässwandungen Wärme an die Luft im Gefässe, deren Temperatur verhältnissmässig rasch sinkt, abgeben, und dass daher p_x zu gross und hiernach $\varkappa$ zu klein hervortreten müsse. Man müsste hiernach erwarten, dass solche Versuche, bei denen die Mündung nur während eines Bruchtheiles einer Secunde geöffnet war und bei denen eine sehr grosse Ausströmungsöffnung vorlag, um der Sicherheit der Ablesungen wegen grosse Druckdifferenzen $p_1 - p_x$ und $p - p_x$ zu erzielen, die zuverlässigsten Resultate geben

*) Cazin, Annales de Chimie et de Phys. 3. Sér. Bd. 66. S. 206.
**) Weisbach, Civilingenieur. Bd. 5. 1859. S. 46.
***) Röntgen, Poggendorff's Annalen. Bd. 148. (1873.) S. 580.

müssten; gerade diese Bedingungen waren aber bei den Versuchen von Hirn*) erfüllt und doch findet derselbe als Mittel einer sehr grossen Zahl von Versuchen, bei welchen leider die einzelnen Beobachtungswerthe nicht angegeben werden, für atmosphärische Luft $\varkappa = 1{,}3845$; allerdings hat Hirn bei seinen Versuchen die Spannung p_x im Augenblicke des Schliessens der Mündung nicht beobachtet, sondern bei der Berechnung als selbstverständlich vorausgesetzt, dass der Druck p_x im Ausflussgefässe bei jedem seiner Versuche auf den äussern atmosphärischen Druck herabgegangen sei; der Inhalt des Ausflussgefässes, mit welchem Hirn experimentirte, betrug übrigens nur $V_1 = 0{,}010$ cbm.

Wie erwähnt, hat man die angezeigten Abweichungen der Versuchsresultate von den zu erwartenden dem Umstande zugeschrieben, dass schon in der Ausströmungsperiode, selbst wenn sie noch so sehr verkürzt wird, die Gefässwandungen an das sich abkühlende Gas Wärme abgeben. Die Abweichungen dürften aber, und vielleicht in stärkerem Maasse, noch einem andern Umstande entspringen. Bei der Ableitung der Gl. (37) hat man von jeher angenommen, dass das im Gefässe zurückgebliebene Luftquantum vom Anfange bis zum Ende des Ausströmens nicht nur adiabatisch, sondern auch noch auf umkehrbarem Wege, also unter Ueberwindung des vollen Gleichgewichtsdruckes expandire; überdies wird vorausgesetzt, dass das Gewicht der in einem trichterförmigen Raume nach der Mündung strömenden Luft als verschwindend klein gegen die übrige im Gefässe befindliche Luftmenge angesehen werden dürfe, eine Annahme, die offenbar um so unzulässiger ist, je grösser die Mündung und je kleiner das Ausströmungsgefäss ist.

Man wird daher annehmen müssen, dass die Expansion der Luft auf nicht umkehrbarem Wege und unter Eintritt stürmischer Bewegung der gesammten Luftmenge im Ausflussgefässe erfolgt; diese stürmische Bewegung scheint auch einem weit rascheren Wärmeaustausch zwischen Gefässwandung und Luft förderlich zu sein. Der rasche Wärmeaustausch, wie er aus den Versuchen geschlossen werden muss, erscheint mir schwer verständlich, wenn man an ruhige, umkehrbare Expansion denkt, weil bekannt-

*) Hirn, Exposition de la théorie mécanique de la chaleur. Paris 1875. 3. Auflage. Bd. 1. S. 111.

lich in Gasen als schlechten Wärmeleitern während des Ruhezustandes die Wärme sich nur sehr langsam verbreiten kann.

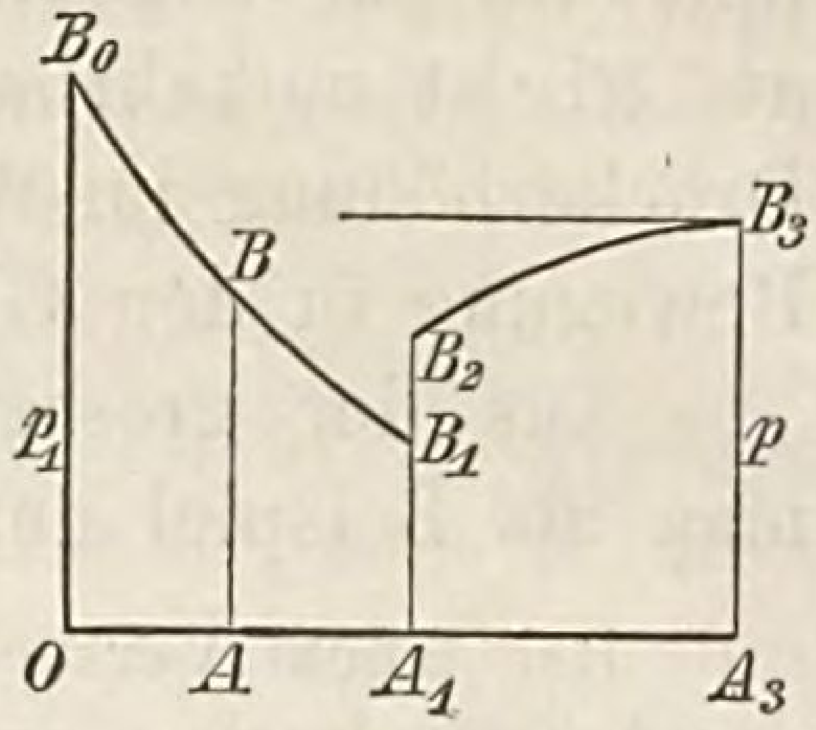
Nach Allem ist zu schliessen, dass die im Vorstehenden besprochene Versuchsmethode zur Bestimmung des Werthes $\varkappa$ überhaupt unzuverlässig ist, weil die Voraussetzungen nicht erfüllt werden, unter denen die Gl. (37) abgeleitet worden ist. Am nächsten entsprechen denselben noch die Weisbach'schen Versuche, weil hier ein sehr grosses Ausflussgefäss vorlag.

Sind die obigen Einwürfe richtig und wäre die Expansion nicht umkehrbar, so müsste nach dem Abschluss der Mündung eine Druckanschwellung selbst dann beobachtet werden, wenn eine Wärmeabgabe seitens der Gefässwandung an die Luft nicht vorliegt. Der Uebergang der stürmischen Bewegung in den Gleichgewichtszustand, der sich eben durch die Druckzunahme zu erkennen giebt, findet aber ohne Zweifel ausserordentlich rasch statt und daher müsste unmittelbar nach dem Schliessen der Mündung ein fast sprungartiges Anwachsen des Druckes hervortreten. Diesen Sprung habe ich in der That auch beobachtet, als ich die Weisbach'schen Versuche, die übrigens, wie die meinigen, zu anderen Zwecken, nämlich zur Untersuchung des Ausflusses der Luft aus Gefässmündungen, angestellt wurden, in veränderter Form wiederholte. Es wird sich unten Gelegenheit geben, auf diese Versuche näher einzugehen, hier mag nur das hervorgehoben werden, was sich auf die vorliegende Frage bezieht. Das Ausflussgefäss (ein eiserner Kessel), mit dem ich die Versuche anstellte, hatte einen Inhalt von $V_1 = 0{,}81088$ cbm. (durch sorgfältige Aichung mit Wasser bestimmt), der Druck der Luft im Innern wurde durch ein offenes Quecksilber-Gefässmanometer beobachtet. Das Verhältniss des Gefässquerschnittes zum Querschnitt des Manometerrohres betrug genau 200.

War nun der Kessel mit comprimirter Luft gefüllt und wurde nach dem Temperaturausgleich die Ausflussmündung geöffnet und nach kurzer Zeit wieder geschlossen, so zeigten sich die Druckänderungen, wie sie durch Fig. 28 schematisch dargestellt sind; als Abscisse OA ist die verflossene Zeit, von Eröffnung der Mündung an gezählt, aufgetragen gedacht, die Ordinaten AB stellen den Druck der Luft im Kessel zu dem angenommenen Zeitpunkte, in Quecksilbersäule gemessen, dar; bei Beginn der Zeitzählung, also im Momente der Eröffnung der

Mündung, ist der Druck p_1 durch OB_0 gemessen; im Augenblicke des Abschlusses der Mündung (zur Zeit OA_1, die bei allen meinen Versuchen im Mittel 10 Secunden betrug) wurde der Druck p_x, der durch die Ordinate A_1B_1 dargestellt ist, beobachtet und zwar liess sich am Manometer dieser Druck mit hinreichender Sicherheit ablesen; hier trat nun die bemerkte Erscheinung auf, dass nämlich der Druck p_x fast plötzlich auf den grössern Werth p_y (von A_1B_1 auf A_1B_2, Fig. 28) sprang, hier einen Augenblick stationär blieb und nun etwa nach dem Verlauf der Curve B_2B_3 allmählich, erst rasch und dann immer langsamer zunahm, bis er endlich nach hinreichend langer Zeit (OA_3) stationär auf den Werth p (A_3B_3) sich einstellte; der Verlauf des Druckes in der letztern Periode entspricht der allmählichen Temperaturausgleichung. Die Beobachtung des Druckes p_y war mit gewisser Unsicherheit behaftet, doch stieg die Sprunghöhe $p_y - p_x$ bei einzelnen Versuchen bis zu 13 mm Quecksilbersäule; der Sprung war um so grösser, je grösser der Anfangsdruck im Kessel war; bei Anfangspressungen, die weniger als zwei Atmosphären betrugen, verschwand die Erscheinung des Sprunges; die Weisbach'schen Versuche haben diese Anfangspressung nicht überschritten; weit geringerer Ueberdruck lag aber bei den Versuchen der andern oben genannten Experimentatoren vor, woraus sich erklären dürfte, weshalb keiner derselben die Erscheinung erwähnt. Nur de Saint-Venant und Wantzel haben bei ihren Versuchen, die oben besprochen worden sind, eine ähnliche Beobachtung gemacht und sagen ausdrücklich, dass der Quecksilberspiegel im Manometer im Augenblicke des Schliessens der Mündung eine retrograde Bewegung gemacht habe, die etwa 1 bis 3 mm betrug.

Fig. 28.



Man kann geneigt sein, die Erscheinung ausschliesslich der trägen Masse des Quecksilbers im Manometerrohre zuzuschreiben; während des Ausströmens sinkt der Quecksilberspiegel beschleunigt und die immer kürzer werdende Quecksilbersäule (es lag, wie schon erwähnt, ein Gefässmanometer vor) nahm eine gewisse Geschwindigkeit an, so dass beim Schliessen der Mündung ein Voreilen des Spiegels und unmittelbar darauf ein Zurückgehen

desselben in eine momentane Gleichgewichtslage erklärlich erscheint.

Eine nähere Ueberlegung zeigt aber, dass dieser Vorgang nicht hinreichend ist, die Erscheinung zu erklären, vielmehr dürfte in derselben der Beweis zu suchen sein, dass in Wirklichkeit die zurückgebliebene Luftmasse während des Ausströmens auf nicht umkehrbarem Wege expandirte, und dass die rasche Druckerhöhung im Wesentlichen dem Uebergange der stürmischen Bewegung in den Gleichgewichtszustand zuzuschreiben ist.

Aus der grossen Anzahl*) meiner einzelnen Beobachtungen mag als Beispiel nur ein Fall herausgegriffen werden.

Bei einem Versuche betrug, in Millimeter Quecksilbersäule gemessen, der Anfangsdruck $p_1 = 2809,5$, der Druck im Momente des Abschlusses der Mündung $p_x = 2584,9$, am Ende des Sprunges $p_y = 2597,4$ und nach der Temperaturausgleichung $p = 2639,9$; die Temperatur der äussern Luft betrug $t_1 = 14,6^\circ$ C; der äussere Barometerstand 722,1 mm; die Luft strömte 9,9 Secunden lang durch eine kreisförmige, gut abgerundete Mündung aus, deren Durchmesser 5,73 mm betrug. Kesselinhalt $V_1 = 0,81088$ cbm. Hier berechnet sich zunächst das Gewicht der Luft, welches der Kessel im Anfang und am Ende des Versuches enthielt, nach den Formeln:

$$V_1 p_1 = G_1 B T_1 \quad \text{und} \quad V_1 p = G_x B T_1 \;,$$

*) Ein kurzer Bericht über diese Versuche mit Beschreibung des Versuchsapparates und der Versuchsmethode findet sich im Civilingenieur 1874. Bd. 20. S. 1: »Resultate experimenteller Untersuchungen über das Ausströmen der Luft bei starkem Ueberdruck«.

Die Versuche sind 1871 von mir in Zürich mit einem Apparate ausgeführt worden, der der Maschinenmodellsammlung des eidgenössischen Polytechnikums gehört und nach meinen Angaben construirt wurde. Da ich wenige Monate nach Vollendung des Apparates Zürich verliess, so musste ich die Versuche einschränken auf die Untersuchung einer Frage, die weiter unten im Texte besprochen werden wird; die oben berührte Frage konnte ich leider experimentell nicht gründlicher verfolgen.

Es wäre von grossem Werthe, wenn die Versuche mit hohem Drucke von Andern wieder aufgenommen werden könnten; der höchste Druck bei den Weisbach'schen Versuchen ging nur bis 2 Atmosphären, bei den meinigen betrug er 4 Atmosphären. Den grössten Schwierigkeiten begegnet man in dem Umstande, dass bei hohen Pressungen die Luft die Metallporen durchdringt; an meinem Apparate ging die Luft durch die zollstarken Wandungen der Messingaufsätze hindurch. Erst nach langen Versuchen und nachdem die innern Kesselwandungen mit Mennigfarbe überstrichen und alle Messingaufsätze in kochendes Leinöl eingetaucht worden waren, gelang es, den Apparat luftdicht zu erhalten und Luftverluste zu vermeiden.

wobei $B = 29,269$ zu setzen ist; für die Pressungen sind die specifischen Werthe zu substituiren, die man erhält, wenn man den in Millimeter Quecksilbersäule gegebenen Druck mit $\frac{10333}{760}$ multiplicirt. Im vorliegenden Falle folgt

$$G_1 = 3,6796 \quad \text{und} \quad G_x = 3,4575 \text{ kg.}$$

Die Differenz $G_1 - G_x$ ist die Luftmenge, welche in 9,9 Secunden zum Ausfluss gelangte; diese Werthe sind übrigens unabhängig von allen Vorgängen, die beim Abschluss der Mündung vorliegen. Nach Gl. (24) S. 170 berechnet sich, wenn man den Exponenten $\varkappa$ durch den Buchstaben r ersetzt, also annimmt, dass die zurückgebliebene Luftmenge G_x während der Ausströmungszeit nach dem Gesetze $pv^r =$ Const. expandirte, unter Benutzung vorstehender Versuchswerthe

$$r = 1,338 \ ,$$

also wesentlich kleiner als $\varkappa = 1,410$.

Die Arbeit L, welche die zurückgebliebene Luftmenge hierbei an die ausströmende Luft abgegeben hat, wenn ihr anfängliches Volumen beim Drucke p_1 mit V' bezeichnet wird, ist nach Gl. (7b) S. 145

$$L = \frac{1}{r-1} (V'p_1 - V_1 p_x) \, .$$

Entspricht nun p_y wirklich dem Gleichgewichtsdruck, so ist die Veränderung der innern Arbeit der zurückgebliebenen Luftmenge nach Gl. (52) S. 125

$$U - U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} (V_1 p_y - V' p_1)$$

und dann würde die Wärmemenge Q sich berechnen lassen, welche die zurückgebliebene Luftmasse von der Gefässwandung in der Periode des Ausströmens aufgenommen hat, nach der Formel

$$Q = A(U - U_1 + L) \ ,$$

wobei in vorstehenden Gleichungen das Volumen V' aus der Beziehung

$$V' = V_1 \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{1}{r}}$$

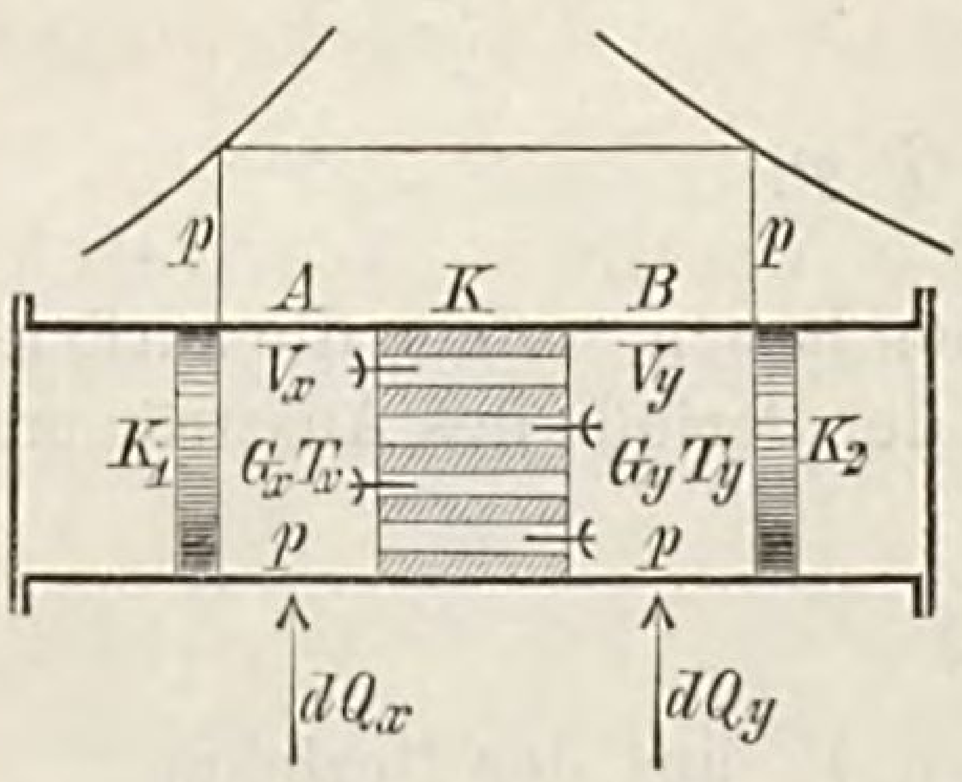
zu bestimmen wäre. Die Rechnung lässt sich, auch in Hinsicht auf vorliegendes Beispiel, numerisch leicht weiter verfolgen. Bemerkt werde nur noch, dass die im Vorstehenden berechnete Wärmemenge und Arbeit sich nur auf die zurückgebliebene Luftmenge bezieht; die zum Ausfluss gelangte Luftmasse hat aber ebenfalls Wärme aufgenommen und Arbeit an die ihr vorausgegangene Luftmasse abgegeben. Eine weitere Behandlung des Problems würde zu weit von der Verfolgung der Ziele vorliegenden Buches abführen.

§ 38. Ueberströmen eines Gases aus einem Gefässe in ein anderes bei veränderlichem Gefässvolumen und unter Wärmemittheilung.

In dem allgemeinen Falle, der den Untersuchungen des letzten Paragraphen zu Grunde gelegt wurde, ist beim Ueberströmen eines Gases aus einem Raume nach einem andern der Inhalt beider Gefässe als constant angesehen (§ 35 S. 168 Fig. 27) und zugleich die einschränkende Annahme gemacht worden, dass weder dem einen noch dem andern Gefässe während des Ueberströmens Wärme mitgetheilt werden sollte. Lässt man die genannten Einschränkungen noch fallen, so stösst man auf eine Aufgabe, die von technischer Bedeutung ist, weil sie bei näherer Untersuchung der Luftmaschinen hervortritt.*)

Zur Klarlegung des Problems denke man sich, in einem Cylinder seien durch drei Kolben K_1, K und K_2 (Fig. 29) die beiden mit Luft gefüllten Räume A und B gebildet. Der mittlere Kolben K (bei Luftmaschinen der Verdränger genannt) sei für Wärme undurchdringlich, enthalte aber Durchbohrungen, die mit Ventilen versehen sind. Bei dem einen Theile der Durchbohrungen öffnen sich die Ventile nach der einen, bei dem andern Theile nach der andern Seite, so dass alle Druckänderungen, die in den beiden Räumen stattfinden, sofortige Ausgleichung dadurch finden, dass eine entsprechende Luftmenge unter Eröffnung der betreffenden Ventile aus dem einen Raume nach dem andern strömt, sodass der Druck p, der zwar veränderlich ist, in beiden Räumen doch immer von gleicher Grösse ist.

Fig. 29.



Der Raum A habe das veränderliche Volumen V_x und in dem betreffenden Momente seien daselbst G_x kg Luft von der Temperatur T_x eingeschlossen, im andern Raume B vom Volumen

*) Die Aufgabe wurde vom Verfasser zuerst behandelt im Civilingenieur 1883. Bd. 29. S. 557: »Ueber die Wirkung des Verdrängers bei Heiss- und Kalt-Luftmaschinen.«

V_y befinden sich zu gleicher Zeit G_y kg Luft von der Temperatur T_y, aber aus den bemerkten Gründen vom gleichen Druck p, wie im Raume A.

Denkt man sich nun den Kolben K feststehend und den beiden Räumen A und B auf irgend welche Weise Wärme zugeführt oder entzogen und gleichzeitig die beiden Kolben K_1 und K_2 Arbeit verrichtend zurückweichen, so entsteht die Frage nach dem Zustande der Luft in dem einen und in dem andern Raume für irgend welche Kolbenstellung, sowie nach den Arbeitsmengen, die gewonnen oder aufgewendet wurden, und endlich nach den Wärmemengen, die hierbei in dem einen und dem andern Raume aufgenommen und abgeleitet worden sind.

Bemerkenswerth ist noch, dass das gleiche Gesetz der Volumenänderung der Räume V_x und V_y auch herbeigeführt werden kann, wenn einer der beiden äussern Kolben K_1 oder K_2 (Fig. 29) feststehend und die beiden andern Kolben beweglich gedacht werden; beide Fälle kommen in der That bei den ausgeführten Luftmaschinen vor: die vorhin zum Abschluss der Durchbohrungen im Verdränger K erwähnten Ventile finden sich in den Ausführungen nicht, sondern sind hier nur zum Zwecke der Erleichterung im Verfolgen der theoretischen Entwickelungen angenommen worden.

Es sei nun zunächst vorausgesetzt, die Ventile in den Durchlassöffnungen seien g e s c h l o s s e n, so ergiebt die Zustandsgleichung der Gase für die Luft im Raume A die Beziehung:

$$V_x p = B G_x T_x \tag{38}$$

und für den Raum B

$$V_y p = B G_y T_y \; . \tag{39}$$

Bezeichnet V das veränderliche Gesammtvolumen und G das Gesammtgewicht der Luft in beiden Räumen, welcher Werth übrigens constant ist, so folgt

$$V = V_x + V_y$$

und

$$G = G_x + G_y \; ,$$

und aus der Addition der Gln. (38) und (39) ergiebt sich

$$V p = B(G_x T_x + G_y T_y) \; . \tag{40}$$

Wäre unter den gleichen Verhältnissen die Temperatur in

beiden Räumen gleich gross und zwar T, so gilt die Beziehung $Vp = BGT$ und die vorstehende Gleichung giebt dann

$$GT = G_x T_x + G_y T_y \,, \tag{41}$$

aus welcher Formel sich die mittlere Temperatur T, d. h. die Ausgleichungstemperatur, berechnen liesse; die Einführung dieser Grösse erleichtert einzelne der folgenden Untersuchungen.

Die Verbindung von (38) mit (39) ergiebt übrigens auch, weil $G = G_x + G_y$ ist,

$$\frac{BG}{p} = \frac{V_x}{T_x} + \frac{V_y}{T_y} \tag{42}$$

oder unter Benutzung der Beziehung $Vp = BGT$

$$\frac{V}{T} = \frac{V_x}{T_x} + \frac{V_y}{T_y} \,. \tag{42 a}$$

Es werde nun dem abgeschlossenen Raume A die Wärmemenge dQ_x und dem Raume B die Wärme dQ_y zugeführt, das Volumen V_x nehme dabei um dV_x und V_y um dV_y zu, die zugehörige Druckänderung sei dp' im Raume A und dp'' im Raume B, endlich sollen dementsprechend die Temperaturänderungen mit dT_x' und dT_y' bezeichnet werden; dann lassen sich hier die Gln. (12c) und (12e) S. 161 benutzen und man erhält:

$$dQ_x = \frac{A}{\varkappa - 1}(V_x dp' + \varkappa p\, dV_x) \tag{43 a}$$

$$= c_p G_x\left(dT_x' - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_x \frac{dp'}{p}\right) \tag{43 b}$$

und

$$dQ_y = \frac{A}{\varkappa - 1}(V_y dp'' + \varkappa p\, dV_y) \tag{44 a}$$

$$= c_p G_y\left(dT_y' - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_y \frac{dp''}{p}\right) \,. \tag{44 b}$$

Nachdem den beiden getrennten Räumen die angegebenen Wärmemengen zugeführt worden sind, denke man sich die Ventile der Durchlasskanäle (Fig. 29) geöffnet, bis die Druckausgleichung stattgefunden hat, dann wird am Ende der Druck in beiden Räumen $p + dp$ sein; ferner soll nach der Ausgleichung des Druckes sein: $T_x + dT_x$ die Temperatur im Raume A und $T_y + dT_y$ im Raume B.

Die eingeführten Differentialwerthe lassen sich nun aber leicht bestimmen; was zunächst die Beziehung zwischen dp', dp'' und dp betrifft, so hat man in Gl. (20a) S. 165, wenn dieselbe auf vorliegenden Fall angewendet wird, einfach zu substituiren $p + dp$ statt p, $p + dp'$ statt p_1 und $p + dp''$ statt p_2, sowie $V_x + dV_x$ statt V_1 und $V_y + dV_y$ statt V_2 und erhält daher

$$p + dp = \frac{(V_x + dV_x)(p + dp') + (V_y + dV_y)(p + dp'')}{V_x + dV_x + V_y + dV_y}$$

und hieraus, wenn man die Multiplication im Zähler ausführt, die Differentiale höherer Ordnung gegen die der niederen weglässt und ebenso im Nenner die Differentiale gegen die endlichen Grössen vernachlässigt:

$$dp = \frac{V_x dp' + V_y dp''}{V_x + V_y}$$

und hieraus, weil der Nenner dieses Bruches einfach das augenblickliche Gesammtvolumen V repräsentirt:

$$V dp = V_x dp' + V_y dp'' \; . \tag{45}$$

Ueberdies ergiebt sich durch Differentiiren der Gleichung $V = V_x + V_y$ auch

$$dV = dV_x + dV_y \; . \tag{45 a}$$

Wenn man nun die beiden Gleichungen (43a) und (44a) addirt, so erhält man in dem Werthe $dQ_x + dQ_y$, der mit dQ bezeichnet werden soll, die ganze Wärmemenge, welche die Luft in beiden Räumen A und B zusammen aufgenommen hat.

Man erhält:

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}\left[V_x dp' + V_y dp'' + \varkappa p (dV_x + dV_y)\right]$$

oder unter Benutzung von Gl. (45) und (45a)

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1}(V dp + \varkappa p \, dV) \; . \tag{46}$$

Diese Gleichung ergiebt für die vorliegenden Untersuchungen ein interessantes und wichtiges Resultat; die Gleichung ist identisch mit Gl. (12c) S. 161 und spricht daher aus, dass die Wärmemenge dQ, welche die ganze Luftmenge in beiden Räumen

aufgenommen und theilweise in Arbeit verwandelt hat, sich genau so bestimmt, wie wenn die Luft nur in einem Raume V unter dem Drucke p vorhanden wäre. Dasselbe Gesetz gilt auch bezüglich der gewonnenen äussern Arbeit; die Arbeit im Raume A ist $p\,dV_x$ und im andern Raume $p\,dV_y$; die ganze äussere Arbeit dL ist daher

$$dL = p\,(dV_x + dV_y) = p\,dV\,,$$

also auch, wie wenn die Luft nur einen Raum V erfüllen würde.

Man erkennt übrigens, dass die vorstehenden Sätze auch für mehr als zwei Räume ihre Richtigkeit behalten; wie also auch ein Luftgewicht G auf verschiedene Räume vertheilt sein mag, welche Temperatur auch in jedem der einzelnen Räume vorliegen möge, die Wärmemenge, welche die gesammte Luftmasse erfordert und die Arbeit, welche sie verrichtet oder aufnimmt, berechnet sich durch Gl. (46) immer so, als wenn die Luft nur einen Raum einnehmen würde, wenn nur die Räume so mit einander verbunden sind, dass in allen der gleiche Druck p herrscht.

Die Gleichung (46) lässt sich leicht auch in die anderen unter (12) S. 161 angegebenen Formen bringen, wenn man nur für T die mittlere oder Ausgleichungstemperatur einführt.

Es mag nur eine dieser Umformungen vorgeführt werden. Aus der bereits benutzten Beziehung

$$Vp = BGT$$

folgt durch Differentiation:

$$V\,dp + p\,dV = BG\,dT$$

und wenn man diesen Ausdruck durch den vorhergehenden dividirt,

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}\,.$$

Gleichung (46) schreibt sich aber auch, wie folgt:

$$dQ = \frac{AVp}{\varkappa - 1}\left[\frac{dp}{p} + \varkappa\,\frac{dV}{V}\right]$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man aus den beiden letzten Gleichungen $\frac{dV}{V}$ eliminirt und die Beziehung (54) S. 128 benutzt,

$$dQ = c_p G \left[dT - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \frac{dp}{p} \right] . \tag{46a}$$

Also gilt auch für diese Formel, was bei Gl. (46) erwähnt wurde, nur hat man bei Benutzung derselben festzuhalten, dass unter T die mittlere Temperatur zu verstehen ist, die sich nach Gl. (41) bestimmt.

Was nun endlich die Hauptsache der Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Wärmemengen Q_x und Q_y betrifft, die jedem der beiden Räume für sich mitzutheilen ist, so muss zunächst bekannt sein, welches der Abfluss- und welches der Zuflussraum während der Druckausgleichung ist; wird im Folgenden vorausgesetzt, es ströme hierbei die Luft von A nach B, so wird während der Druckausgleichung die Luftmenge dG_x den Raum A verlassen haben, die Luftmenge, die Anfangs G_x kg betrug, wird am Ende $G_x - dG_x$ betragen; diese zurückgebliebene Luftmenge expandirte adiabatisch und daher werden für diesen Vorgang hier die Gl. (24) (25) S. 170 gültig; man hat dort zu setzen:

$$\begin{array}{lcl} p + dp \text{ statt } p_x & \text{und} & p + dp' \text{ statt } p_1 \\ T_x + dT_x \text{ statt } T_x & \text{und} & T_x + dT_x' \text{ statt } T_1 \\ G_x - dG_x \text{ statt } G_x & \text{und} & G_x \text{ statt } G_1 \end{array}$$

und erhält daher:

$$\frac{p + dp}{p + dp'} = \left(\frac{G_x - dG_x}{G_x} \right)^{\varkappa}$$

und:

$$\frac{T_x + dT_x}{T_x + dT_x'} = \left(\frac{G_x - dG_x}{G_x} \right)^{\varkappa - 1} .$$

Multiplicirt man die linke Seite der ersten Formel oben und unten links mit $(p - dp')$ und ebenso die andere mit $(T_x - dT')$; entwickelt man die Ausdrücke rechts nach der binomischen Reihe und streicht man die Differentiale höherer Ordnung und höhere Potenzen, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$dp' = dp + \varkappa p \frac{dG_x}{G_x}$$

und

$$dT_x' = dT_x + (\varkappa - 1) T_x \frac{dG_x}{G_x} .$$

Mit Hülfe der Gl. (45) und (42) würden sich dann in ähnlicher Weise auch die Differentiale dp'' und dT_y' ausdrücken lassen.

Substituirt man nun die vorstehenden Werthe von dp' und dT_x' in Gl. (43b), so ergiebt sich:

$$dQ_x = c_p G_x \left[dT_x - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_x \frac{dp}{p} \right] \tag{47}$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. (38) S. 187 und Gl. (43) S. 115

$$dQ_x = A V_x p \left[\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{dT_x}{T_x} - \frac{dp}{p} \right] \tag{47 a}$$

und diese Formel giebt ebenfalls ein interessantes und die Untersuchung specieller Fälle sehr erleichterndes Resultat; sie spricht aus, dass die Wärmemenge dQ_x sich so bestimmt, als wäre der Abflussraum abgesperrt und die daselbst befindliche Luftmenge G_x constant, wobei die Temperaturerhöhung dT_x und die Druckerhöhung dp aber nur so weit zu erfolgen habe, als es dem Zustande nach der Druckausgleichung entspricht.

Die Bestimmung der andern Wärmemenge dQ_y, welche dem Zufluss-Raume zuzuführen ist, erfolgt jetzt leicht aus der Beziehung

$$dQ = dQ_x + dQ_y ;$$

man findet, wenn man die Gln. (46a) und (47) benutzt:

$$dQ_y = c_p \left[G dT - G_x dT_x - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} (GT - G_x T_x) \frac{dp}{p} \right],$$

oder wenn man beachtet, dass wegen $G = G_x + G_y$ sich $dG_x = - dG_y$ ergiebt, und wenn man noch die Beziehung verwendet, die sich durch Differentiation von Gl. (41) herausstellt,

$$dQ_y = c_p G_y \left[dT_y - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_y \frac{dp}{p} \right] + c_p (T_y - T_x) dG_y , \tag{48}$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. (39) S. 187, und Gl. (43) S. 115,

$$dQ_y = A V_y p \left[\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{dT_y}{T_y} - \frac{dp}{p} \right] + c_p (T_y - T_x) dG_y . \tag{48 a}$$

Das erste Glied der rechten Seite giebt wiederum die Wärmemenge an, die dem abgesperrten Zuflussraume zuzuführen

wäre, wenn die Temperatur und der Druck direct auf die Ausgleichswerthe gebracht werden sollten; das zweite Glied aber entspricht einer Wärmemenge, welche der übergegangenen Luftmenge dG_y zugeführt werden müsste, wenn dieselbe bei constantem Drucke p von T_x auf T_y erwärmt werden sollte.

Wäre umgekehrt der Raum B der Abfluss- und A der Zufluss-Raum, so würde in Gl. (48) das zweite Glied wegfallen und in der Form $c_p(T_x - T_y)\,dG_x$ der Gleichung (47) auf der rechten Seite zuzufügen sein. In den meisten Fällen der praktischen Verwerthung vorstehender Sätze erräth man von vornherein, welcher von beiden Räumen A und B der Abflussund welcher der Zufluss-Raum ist. Im Zweifelfalle ergiebt sich ein Anhalt durch folgende Betrachtung. Die Division der beiden Gleichungen (38) und (39) giebt

$$G_y = G_x \frac{V_y}{V_x} \frac{T_x}{T_y};$$

hiernach folgt, weil das Gesammtgewicht der Luft in beiden Räumen $G = G_x + G_y$ constant ist:

$$G_x = \frac{G}{1 + \frac{V_y}{V_x} \frac{T_x}{T_y}}.$$

Soll nun A der Abflussraum sein, so muss der Nenner auf der rechten Seite dieses Ausdruckes wachsen, also die Bedingung

$$d\left(\frac{V_y}{V_x} \frac{T_x}{T_y}\right) > 0$$

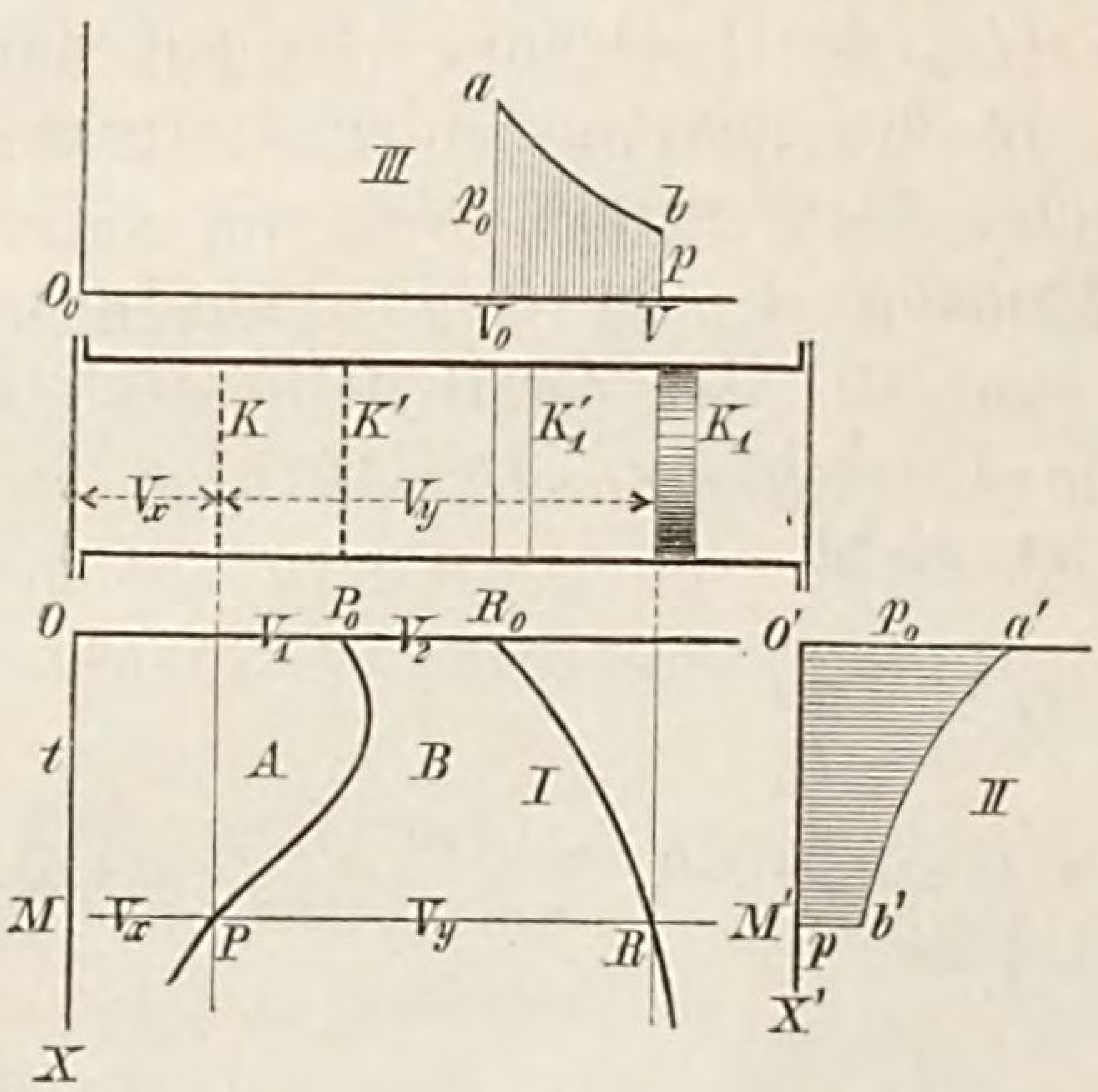
erfüllt werden.

Die Untersuchungen des Vorstehenden geben die Grundlage zur Lösung zahlreicher Probleme, die von technischer Wichtigkeit sind; bevor aber einige der wichtigsten derselben behandelt werden, soll vorerst die graphische Behandlung eines Theiles der Fragen gegeben werden, durch welche der Einblick in die folgenden Aufgaben sowohl, wie in die Vorgänge, welche bei Heiss- und Kaltluftmaschinen vorliegen, ausserordentlich erleichtert wird.

In einem, an einem Ende geschlossenen Cylinder (Fig. 30 a. f. S.) bewegen sich die beiden Kolben K und K_1, von denen der erstere, durch eine durchbrochene gerade Linie dargestellt, den

Verdränger repräsentirt. Beide Kolben seien in Bewegung gedacht, der erstere stehe zu Beginn bei K', der andere bei K_1': der Raum links vom Verdränger sei zur Zeit t mit V_x, im Anfange mit V_1 bezeichnet; der Raum zwischen dem Verdränger und dem äussern Kolben, der der Arbeitskolben genannt werden mag, sei zur Zeit t mit V_y und im Anfange der Zeitzählung mit V_2 bezeichnet. Man erkennt übrigens, dass der Unterschied gegen die in Fig. 29 dargestellte Anordnung darin besteht, dass hier einer der beiden äussern Kolben K_1 und K_2 weggelassen erscheint, dafür aber hier der Verdränger, der dort feststehend gedacht wurde, bewegt wird; in beiden Fällen läuft die Sache auf das Gleiche hinaus, die Anordnung in Fig. 29 eignet sich nur besser als Unterlage für die Entwickelung der Grundgleichungen, während für die Erläuterung bei Specialuntersuchungen Fig. 30 geeigneter ist.

Fig. 30.



Um nun das Gesetz der Veränderlichkeit der beiden Räume V_x und V_y, also das Gesetz der Kolbenbewegung vor Augen zu führen, trage man in Fig. 30 von O aus abwärts auf der Axe OX die verflossene Zeit t in der Strecke OM auf und ziehe durch M eine Horizontale, auf welcher die Strecke MP das Volumen V_x und die Strecke PR das Volumen V_y darstellen soll; die ganze Strecke MR repräsentirt dann das Gesammtvolumen $V = V_x + V_y$ der Luft in beiden Räumen zusammengenommen. Für den Beginn der Zeitzählung stellt ebenso OP_0 das Volumen V_1 und $P_0 R_0$ das Volumen V_2 dar, die Summe beider Räume $V_1 + V_2$, die mit V_0 bezeichnet werden mag, ist durch die Strecke OR_0 gegeben.

Aus Allem ist ersichtlich, dass, wenn man an continuirliche Bewegung beider Kolben denkt, durch die Curven $P_0 P$ und $R_0 R$, das Gesetz vor Augen geführt wird, nach welchem sich V_x, V_y und V mit der Zeit ändern. Ich bezeichne diesen mit

I bezeichneten Theil der Fig. 30 als »Kolbendiagramm«*): jedem Kolbenstande entspricht ein bestimmter Werth des Druckes p der Luft in beiden Räumen; trägt man von O' auf der verticalen Axe $O'X'$ wieder die verflossene Zeit t durch $O'M'$ auf und macht man die horizontale Strecke $M'b'$ gleich p, und für den Beginn der Zeitzählung $O'a'$ gleich p_0, wenn p_0 der Anfangsdruck ist, so ergiebt sich durch die Curve $a'b'$ das Gesetz, nach welchem sich der Druck im gesammten Innern des Cylinders mit der Zeit ändert; ich bezeichne den entsprechenden Theil II der Fig. 30 als »Kolbenkraftdiagramm«. Endlich ist im obern Theile der Figur, mit III bezeichnet, noch das gewöhnliche »Druck- oder Indicatordiagramm« gezeichnet; die Curve ab (Druckcurve) giebt die Druckänderung an, während das Gesammtvolumen von V_0 auf V sich ändert; die von der Curve ab umschlossene Fläche ergiebt die Arbeit, welche während der Expansion verrichtet worden ist.

Trägt man, von einem Fixpunkte ausgehend, auf einer horizontalen Axe ein Mal das veränderliche Volumen $MP = V_x$, das andere Mal das Volumen $PR = V_y$ als Abscisse und beide Male den Druck p als Ordinate auf, so erhält man noch zwei andere Darstellungen der Druckcurve, die bei gewissen Luftmaschinen eine praktische Bedeutung haben, weil diese es sind, die mittelst Anwendung von Indicatoren gewonnen werden können.

Bei Maschinen werden die Kolben in der Regel durch Kurbeln bewegt, welche nahezu gleichförmig rotiren; in diesem Falle ist die Zeitstrecke OM dem Kurbeldrehwinkel proportional und die Curven im Kolbendiagramme sind Sinusoiden, sofern man unendlich lange Kurbelstangen voraussetzt, oder diesen ähnelnde Curven, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt wird. Bei den Maschinen kehren übrigens die beiden Kolben periodisch (nach jeder Umdrehung) in die Anfangslagen zurück und die Curve ab im Diagramm III (Fig. 30) bildet dann eine geschlossene Curve; der ganze Process verwandelt sich in einen Kreisprocess, der für gewisse Maschinen weiter unten näherer Betrachtung unterzogen werden wird.

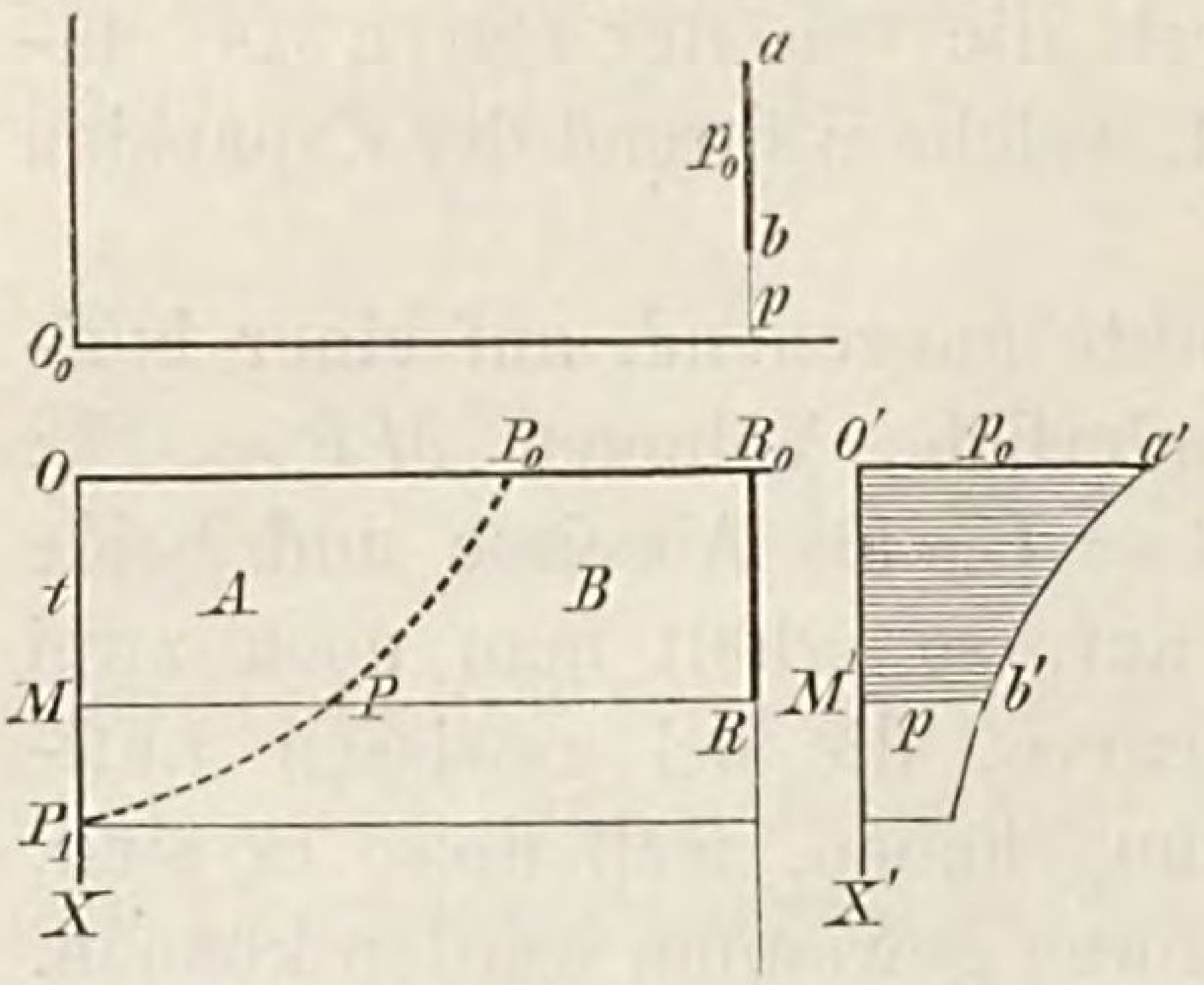
*) Das vorgeführte Diagramm, welches ich schon in der zweiten Auflage der vorliegenden Schrift gegeben habe, ist seitdem vielfach benutzt worden, insbesondere bei Untersuchungen von Dampfmaschinen mit mehreren Cylindern (Compoundmaschinen) und Heissluftmaschinen.

§ 39. Anwendungen und specielle Aufgaben.

Nach der vorstehenden Einschaltung mögen nun einige Beispiele vorgeführt werden, welche Anwendungen der in § 38 gegebenen Sätze enthalten.

Aufgabe 1. Der Arbeitskolben K_1 (Fig. 30) werde festgehalten, dagegen der Verdränger K von rechts nach links verschoben, so dass der Raum A eine Verminderung, der Raum B eine Vergrösserung erfährt. Fig. 31 stellt hier die entsprechenden Diagramme dar; da das Gesammtvolumen $V = V_x + V_y = V_0$ constant sein soll, so ist die Curve $R_0 R$ für den Arbeitskolben eine zur Axe OX parallele Gerade; die Curve $P_0 P$ giebt das Gesetz, nach welchem die Verschiebung des Verdrängers mit der Zeit t erfolgen soll; OP_0 giebt das Anfangsvolumen V_1 des einen und $P_0 R_0$ das Anfangsvolumen V_2 des zweiten Raumes; T_1 sei hierbei die Temperatur links, T_2 diejenige rechts vom Verdränger, p_0 die Anfangspressung in beiden Räumen. Nach der Zeit t ist P die Stellung des Verdrängers, und es wären nun für die Werthe V_x und $V_y = V_0 - V_x$ von den Grössen T_x, T_y, p, Q_x und Q_y einzelne als Unbekannte zu berechnen. Das Problem bietet unendlich viele Einzelfälle, von denen einige behandelt werden sollen. Zweifellos ist zunächst unter den gemachten Voraussetzungen, dass hier der Raum A links vom Verdränger der Abflussraum und B der Zuflussraum sein wird, und dass äussere Arbeit weder gewonnen noch verbraucht wird, weil das Gesammtvolumen V constant gleich V_0 vorausgesetzt ist.

Fig. 31.



Specialfall a. Es werde während der Bewegung des Verdrängers weder dem Raume A noch dem Raume B Wärme mitgetheilt oder entzogen.

Es ist also $dQ_x = 0$ und $dQ_y = 0$, daher auch $dQ = 0$. Da nun auch $dV = 0$ ist, so folgt aus den Gl. (46) und (46a)

ebenso $dp = 0$ und $dT = 0$; man erhält daher das Resultat, dass bei der Verschiebung des Verdrängers in beiden Räumen der Druck p und die mittlere Temperatur T unverändert bez. p_0 und T_0 bleiben, wobei man natürlich, da es sich zunächst um rein theoretische Erörterungen handelt, an ein langsames Fortschreiten des Verdrängers denken und annehmen muss, das Ueberströmen aus einem Raume in den andern (durch den Verdränger hindurch) finde ohne Widerstände statt.

Die Substitution $dp = 0$ und $dQ_x = 0$ in Gl. (47) giebt nun aber auch $dT_x = 0$, woraus zu schliessen ist, dass bei dem ganzen Vorgange auch die Temperatur T_x constant bleibt, also $T_x = T_1$ ist.

Anders aber gestaltet sich die Sache im Zuflussraume B. Hier ergiebt sich die Temperatur T_y veränderlich und zwar berechnet sich dieselbe unter Benutzung vorstehender Bezeichnungen aus Gl. (42a)

$$T_y = \frac{V_0 - V_x}{\frac{V_0}{T_0} - \frac{V_x}{T_1}} . \tag{49}$$

Da sich p constant ergab, so ist für vorliegenden Fall die Druckcurve $a'b'$ (Fig. 31) eine Gerade, parallel der Axe $O'X'$.

Von allen in der Rechnung vorkommenden Grössen ist also allein nur die Temperatur T_y mit V_x veränderlich.

Wollte man jetzt den Verdränger wieder in die ursprüngliche Lage zurückbringen, so wäre für die rückgängige Bewegung umgekehrt B der Abfluss- und A der Zuflussraum, T_y bliebe constant und die Temperatur T_1 würde in einen andern Werth übergehen; man erkennt sogleich auch ohne weitere Rechnung, dass durch fortwährendes Hin- und Herschieben des Verdrängers eine allmähliche Temperaturausgleichung erfolgt, bis schliesslich in beiden Räumen die mittlere Temperatur T_0 herrscht.

Schiebt man den Verdränger sogleich aus der Lage P_0 (Fig. 31) bis an das Ende P_1 links, so ist $V_x = 0$, alle Luft in den Raum V_y getrieben und Gl. (49) giebt $T_y = T_0$; die mittlere Temperatur ist daher sofort hergestellt, und nun würde jede weitere Verschiebung des Verdrängers keinerlei Aenderungen an Druck und Temperatur der Luft in beiden Räumen weiter hervorbringen.

Specialfall b. Die Temperatur der Luft in beiden Räumen soll bei beweglichem Verdränger und feststehendem Arbeitskolben constant erhalten bleiben.

Diese Voraussetzung erfordert auf beiden Seiten des Verdrängers Mittheilung resp. Entziehung von Wärme. Da hier $T_x = T_1$ und $T_y = T_2$ ist, so folgt aus Gl. (42)

$$\frac{BG}{p} = \frac{V_x}{T_1} + \frac{V_y}{T_2}$$

und für die Anfangsstellung des Verdrängers

$$\frac{BG}{p_0} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2},$$

daher durch Division beider Gleichungen

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_1 T_2 + V_2 T_1}{V_x T_2 + V_y T_1}. \tag{50}$$

Bezeichnet man das constante Verhältniss $T_2 : T_1$ mit λ und setzt man $V_2 = V_0 - V_1$, sowie $V_y = V_0 - V_x$, so folgt aus vorstehender Formel:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0 + (\lambda - 1) V_1}{V_0 + (\lambda - 1) V_x}. \tag{50a}$$

Es ändert sich demnach der Druck p in beiden Räumen mit der Verschiebung des Verdrängers und lässt sich für jeden Werth von V_x leicht berechnen. Nimmt das Volumen V_x ab, wie es Fig. 31 voraussetzt, so findet eine Abnahme des Druckes p statt, wenn $\lambda > 1$ oder $T_2 > T_1$ ist, oder wenn, wie man sich bei Behandlung der Heissluftmaschinen ausspricht, die Luft aus dem kalten Raume A nach dem heissen Raume B verdrängt wird. Wäre dagegen umgekehrt bei gleicher Bewegung des Verdrängers A der heisse und B der kalte Raum, also $T_2 < T_1$ und $\lambda < 1$, so würde in beiden Räumen nach Gl. (50) der Druck p zunehmen.

Aus Gl. (46) ermittelt sich nun für vorliegenden Fall die gesammte Wärmemenge Q, welche in beiden Räumen verbraucht worden ist, weil $V = V_0$ und $dV = 0$ ist:

$$Q = \frac{A V_0}{\varkappa - 1}(p - p_0). \tag{51}$$

Dagegen giebt Gl. (47), wegen $T_x = T_1$ und $dT_x = 0$,

wenn man zugleich Gl. (38) und die Beziehung $AB = c_p \frac{(\varkappa - 1)}{\varkappa}$ beachtet, für die Wärmemenge dQ_x, welche dem Abflussraume A zuzuführen ist:

$$dQ_x = - AV_x\, dp \tag{52a}$$

und hieraus durch Integration unter Benutzung von Gl. (50)

$$Q_x = \frac{A}{\lambda - 1}\left[V_0(p - p_0) - [V_0 + (\lambda - 1)V_1]\, p_0 \operatorname{logn} \frac{p}{p_0}\right]. \tag{52}$$

Endlich findet man die Wärmemenge Q_y, welche dem Zuflussraume B von aussen zuzuführen ist, durch die Beziehung $Q = Q_x + Q_y$ unter Benutzung vorstehender Ausdrücke:

$$Q_y = \frac{A}{\lambda - 1}\left[\frac{(\lambda - \varkappa)}{(\varkappa - 1)} \cdot V_0(p - p_0) + [V_0 + (\lambda - 1)V_1]\, p_0 \operatorname{logn} \frac{p}{p_0}\right] \tag{53}$$

wonach dann alle auf vorliegenden Specialfall bezüglichen Fragen beantwortet sind.

Nimmt man als besondern Fall an, der Verdränger habe anfänglich am rechten Ende R_0 des Cylinders gestanden (Fig. 31) und sei an das linke Ende P_1 hinübergeschoben worden, es habe sich also die gesammte Luftmenge Anfangs im Raume A befunden und sei vollständig in den Raum B verdrängt worden, so ist in den vorstehenden Formeln $V_2 = 0$, $V_1 = V_0$ und $V_x = 0$ zu setzen; man erhält daher aus Gl. (50) unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Bedeutung des Werthes λ

$$\frac{p}{p_0} = \lambda = \frac{T_2}{T_1} \tag{50a}$$

und die Gln. (51), (52) und (53) ergeben, wenn noch $p = \lambda p_0$ substituirt wird:

$$Q = \frac{\lambda - 1}{\varkappa - 1} \cdot AV_0\, p_0 \tag{51a}$$

$$Q_x = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{logn} \lambda\right) A V_0 p_0 \tag{52a}$$

$$Q_y = \left(\frac{\lambda - \varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{logn} \lambda\right) A V_0 p_0\,. \tag{53a}$$

Da der Voraussetzung gemäss die gesammte Luftmenge vom Gewichte G sich anfangs mit der Temperatur T_1 im Raume V_0

unter dem Drucke p_0 befand, so bestand die Beziehung $V_0 p_0 = B G T_1$ oder unter Beachtung von Gl. (51) S. 128 $A V_0 p_0 = c_v (\varkappa - 1) G T_1$; daher folgt aus Gl. (51 a) auch:

$$Q = c_v G (T_2 - T_1) .$$

Die Wärmemenge, welche bei dem angenommenen Vorgange die gesammte Gasmenge verbraucht oder abgegeben hat, findet sich daher gerade so gross, als wäre der Verdränger gar nicht vorhanden, sondern die Luft einfach bei constantem Volumen von der Temperatur T_1 auf die Temperatur T_2 gebracht worden.

Fragt man aber nach den Wärmemengen die wirklich zuzuführen und abzuleiten waren, wenn der Vorgang der Temperaturänderung bei constantem Volumen unter Mithülfe des Verdrängers erfolgte, so sind die Gln. (52a) und (52b) in Betracht zu ziehen.

Ist z. B. $\lambda = 2$, also die Temperatur T_2 im Zuflussraume B doppelt so gross, wie die Temperatur T_1 im Abflussraume A (also beispielsweise nach Celsius gemessen $t_1 = 25^\circ$ und $t_2 = 323^\circ$), so giebt Gl. (51 a)

$$Q = 2{,}4390 \,.\, A V_0 p_0$$

und die Gln. (52a) und (52b) ergeben

$$Q_x = -\,0{,}3862 \,.\, A V_0 p_0 \quad \text{und} \quad Q_y = +\,2{,}8252 \,.\, A V_0 p_0 ;$$

dem Abflussraume A ist daher Wärme zu entziehen und dem Zuflussraume B Wärme mitzutheilen und diese letztere Wärmemenge Q_y ist grösser als die Wärmemenge Q, welche der gesammten Luftmenge bei constantem Volumen für dieselbe Temperaturerhöhung zuzuführen wäre, wenn die Luftmenge nur einen Raum erfüllte und kein Verdränger vorhanden wäre. Man erkennt daher schon an diesem einfachen Falle, dass bei den Processen, welche die mit Verdrängern arbeitenden Luftmaschinen ausführen, die Wärmezufuhr und Wärmeabfuhr nach andern Formeln zu berechnen ist, als sie bisher in der Technik benutzt worden sind.

Aufgabe 2. Der Verdränger K (Fig. 30, S. 194) werde festgehalten, es sei daher $V_x = V_1$ constant, der Arbeitskolben K_1 bewege sich, das Volumen V_y, sowie auch $V = V_1 + V_y$ sei demnach veränderlich. Hier liegt ein Gewinn oder Aufwand von äusserer Arbeit vor, je nachdem man an eine

Vergrösserung oder Verminderung des Volumens V_y also auch des Gesammtvolumens V, an Expansion oder Compression denkt.

Die Aufgabe umschliesst wieder eine unendliche Zahl von speciellen Fällen, von denen die technisch wichtigsten behandelt werden sollen.

Specialfall a. Es werde dem Raume A, wie dem Raume B Wärme weder mitgetheilt noch entzogen.

α) Expansion. (Fig. 32.)

Der vorgelegten Aufgabe entsprechend ist V_x constant, daher

Fig. 32.

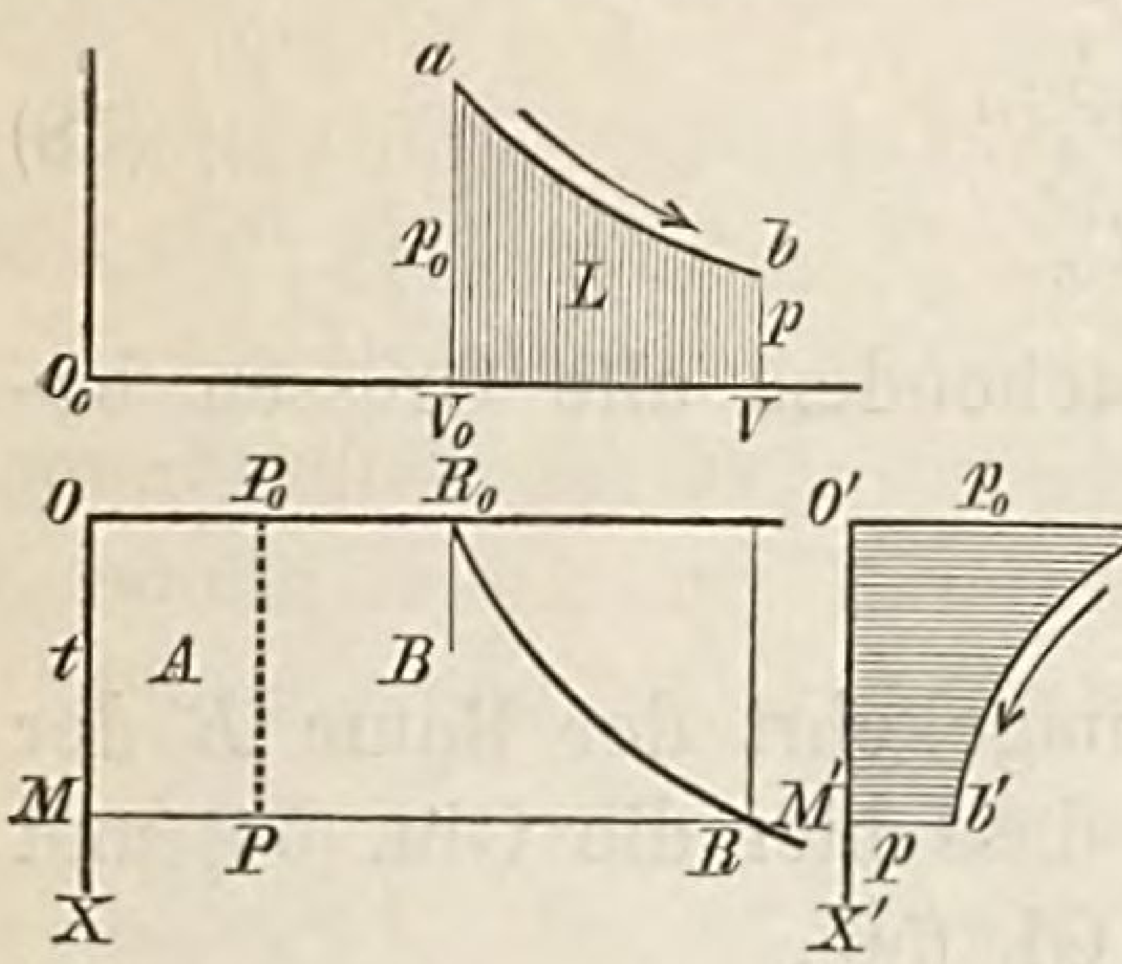
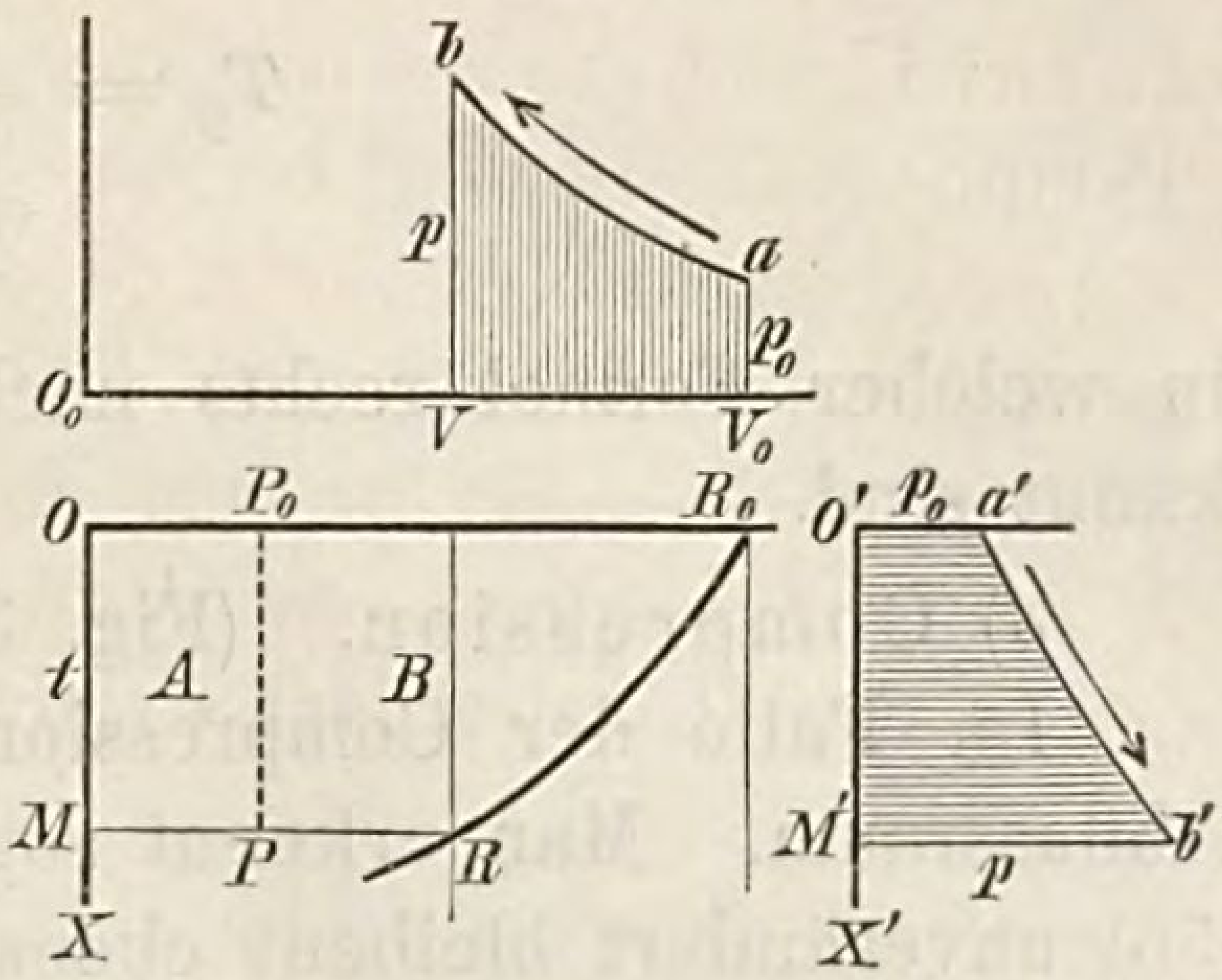


Fig. 33.



$d V_x = 0$; ferner soll sein $d Q_x = 0$ und $d Q_y = 0$, es folgt daher auch $d Q = 0$, und wegen der vorausgesetzten Expansion ist A der Abflussraum.

Hier ergeben sich aus den Gl. (46) und (46a) sogleich die Formeln:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa} \tag{54}$$

und

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa - 1} , \tag{55}$$

wobei T_0 die mittlere Temperatur im Anfange ist; hiernach lässt sich für jeden Werth V des Gesammtvolumens der Druck p und die mittlere Temperatur T in beiden Räumen bestimmen. Man ersieht, dass die Curve ab der Druckänderungen die gewöhnliche Adiabate ist und daher gilt auch für die bei der Expansion gewonnene Arbeit L die früher gegebene Gl. (62b) S. 135

$$L = \frac{1}{\varkappa - 1}(V_0 p_0 - V p) . \tag{56}$$

Es bleiben noch die Temperaturänderungen in beiden Räumen zu bestimmen. Aus Gl. (47) folgt wegen $d Q_x = 0$ sogleich

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. (55)

$$T_x = T_1 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa - 1}, \tag{57}$$

während sich die Temperatur T_y aus Gl. (42a) bestimmt, wenn $V_y = V - V_1$ substituirt wird; man erhält:

$$T_y = \frac{V - V_1}{\frac{V}{T} - \frac{V_1}{T_x}}, \tag{58}$$

in welcher Formel rechts nach Vorstehendem alle Grössen bekannt sind.

β) Compression. (Fig. 33.)

Im Falle der Compression ist umgekehrt der Raum B der Abflussraum. Man erkennt sogleich, dass hier die Gln. (54) und 55) unverändert bleiben, ebenso gilt Gl. (56).

Zur Bestimmung der Temperaturwerthe gilt aber wegen $d Q = 0$ Gl. (48), wobei man dort rechts das zweite Glied wegzulassen hat, weil der entsprechende Raum Abflussraum ist; man erhält unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Gl. (55)

$$\frac{T_y}{T_2} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa - 1} \tag{58a}$$

und T_x aus Gl. (42a), wenn man dort $V_x = V_1$ und $V_y = V - V_1$ substituirt,

$$T_x = \frac{V_1}{\frac{V}{T} - \frac{V - V_1}{T_y}}. \tag{57a}$$

Sollte beispielsweise die gesammte im Raume B befindliche Luftmenge in den Raum A vom Volumen V_1 hineingedrückt werden, so wäre der Druck daselbst am Ende nach Gl. (54), weil $V = V_1$ sein soll,

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa}. \tag{54a}$$

Ferner die Temperatur daselbst nach Gl. (57a) $T_x = T$ oder nach Gl. (65)

$$T_x = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa - 1}, \tag{57b}$$

wobei die anfängliche mittlere Temperatur T_0 nach Gl. (42a) sich aus folgender Formel berechnet:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2}.$$

Die zum Hineindrücken erforderliche Arbeit L findet man nach Gl. (56):

$$L = \frac{V_0 p_0}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} - 1\right]. \tag{56a}$$

Specialfall b. Es werde die Temperatur in beiden Räumen constant erhalten, es sei also $T_x = T_1$ und $T_y = T_2$.

α) Expansion. (Fig. 32.)

Hier gilt ohne Weiteres Gl. (50), nur hat man $V_x = V_1$ zu substituiren; bezeichnet man überdies das Verhältniss der Temperaturen $T_2 : T_1$ mit λ, so folgt zuerst

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\lambda V_1 + V_2}{\lambda V_1 + V_y}, \tag{59}$$

wodurch der Verlauf der Expansionscurve ab bestimmt ist. Die gewonnene äussere Arbeit L findet sich, weil $dV = dV_y$ ist,

$$L = \int_{p_0}^{p} p\, dV = (\lambda V_1 + V_2) p_0 \operatorname{logn} \frac{p_0}{p}. \tag{60}$$

Die gesammte Wärmemenge Q, welche die Luft in beiden Räumen fordert, ergiebt sich, wie leicht verfolgt werden kann nach Gl. (46)

$$Q = \frac{\lambda - 1}{\varkappa - 1} \cdot A V_1 (p_0 - p) + A(\lambda V_1 + V_2) p_0 \operatorname{logn} \frac{p_0}{p}. \tag{61}$$

Die Wärmemenge Q_x, die hierbei dem constanten Abflussraume A zugeführt werden muss, ermittelt sich aus Gl. (47), weil $T_x = T_1$, $dT_x = 0$ und $B G_x T_x = V_1 p$ ist:

$$Q_x = A V_1 (p_0 - p), \tag{62}$$

und wegen der Beziehung $Q = Q_x + Q_y$ ist die Wärmemenge Q_y, welche dem Zuflussraume B mitzutheilen ist,

$$Q_y = \frac{\lambda - \varkappa}{\varkappa - 1} A V_1 (p_0 - p) + A(\lambda V_1 + V_2) p_0 \operatorname{logn} \frac{p_0}{p} \quad (63)$$

Diese Formeln gelten für jeden Werth von λ, es ist demnach gleichgültig, in welchem Raume die Temperatur die höhere ist.

β) Compression. (Fig. 33, S. 201.)

Hier ist der Raum B der Abflussraum und die Formeln (59), (60) und (61) sind, wie sich sofort erkennen lässt, auch für vorliegenden Fall gültig; nicht so ist es aber mit den für Q_x und Q_y gefundenen Ausdrücken (62) und (63).

Für den Fall der Compression ist, wenn die eingeführte mathematische Bezeichnung aufrecht erhalten wird, in Gl. (48) das Glied $c_p (T_y - T_x)\, d G_y$ wegzulassen und in der Form $c_p (T_x - T_y)\, d G_x$ der Gl. (47) beizufügen. Gl. (48) giebt daher

$$d Q_y = c_p G_y \left(d T_y - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_y \frac{dp}{p} \right)$$

und daher folgt, weil $d T_y = 0$ ist, unter Benutzung von Gl. (39)

$$d Q_y = - A V_y dp$$

und hiernach unter Benutzung der Gl. (59) die Wärmemenge Q_y, welche dem Raume B zuzuführen ist,

$$Q_y = \lambda A V_1 (p - p_0) - A(\lambda V_1 + V_2) p_0 \operatorname{logn} \frac{p}{p_0} \quad (63\,a)$$

Die Wärmemenge, welche dagegen dem constanten Zuflussraume A zuzuführen ist, bestimmt sich

$$Q_x = Q - Q_y = \frac{1 - \lambda \varkappa}{\varkappa - 1} A V_1 (p - p_0) \quad (62\,a)$$

Man erkennt, dass bezüglich der zu- und abzuleitenden Wärmemenge der Fall der Compression nicht einfach eine Umkehrung des Falles der Expansion ist, wenngleich die Druckcurve die gleiche ist.

Sollte im Falle der Compression die Luft völlig aus dem Raume B in den Raum A hineingedrückt werden, so ist in Gl. (59) $V_y = 0$ zu setzen, wonach sich dann der Enddruck p

bestimmen würde, welcher Werth in die übrigen Gleichungen zu substituiren wäre.

Specialfall c. Es werde der Verdränger festgehalten und im constanten Raume A die Temperatur constant erhalten, dagegen dem Raume B Wärme weder mitgetheilt noch entzogen.

α) Expansion. (Fig. 32.)

Der Voraussetzung gemäss ist hier $V_x = V_1$, $T_x = T_1$ und $dQ_y = 0$, wegen der letzteren Annahme auch $dQ_x = dQ$.

Hier ergiebt sich zunächst aus Gl. (47)

$$dQ_x = -A V_1 dp\ . \tag{64}$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit Gl. (46) giebt:

$$\frac{A}{\varkappa - 1}(V dp + \varkappa p dV) = -A V_1 dp\ ,$$

und mit Rücksicht auf die Beziehung $V = V_1 + V_y$ folgt sogleich durch Integration die Gleichung der Expansionscurve ab

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varkappa V_1 + V_2}{\varkappa V_1 + V_y}\right)^{\varkappa}\ . \tag{65}$$

Die Arbeit L, welche gewonnen wird, ergiebt sich durch Integration der Gleichung $dL = p dV_y$ unter Benutzung vorstehender Gl. (65)

$$L = \frac{(\varkappa V_1 + V_2) p_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) \tag{66}$$

und die Wärmemenge Q_x, welche hierbei dem Abflussraume A zuzuführen ist, folgt aus Gl. (64) sofort

$$Q_x = A V_1 (p_0 - p)\ . \tag{67}$$

Endlich wäre noch die veränderliche Temperatur T_y im Zuflussraume B zu ermitteln, vorausgesetzt, dass daselbst die Anfangstemperatur T_2 gegeben ist.

Hier giebt Gl. (42) bez. für den Anfang und das Ende der Expansion:

$$\frac{BG}{p_0} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \quad \text{und} \quad \frac{BG}{p} = \frac{V_1}{T_1} + \frac{V_y}{T_y}\ ,$$

woraus durch Division folgt

$$\frac{V_y}{T_y} + \frac{V_1}{T_1} = \left(\frac{V_2}{T_2} + \frac{V_1}{T_1}\right)\frac{p_0}{p} \,. \tag{68}$$

Hiernach kann T_y für jeden Werth von V_y und für den zugehörigen Werth von p berechnet werden.

β) Compression. (Fig. 33.)

Hier gestalten sich die Verhältnisse ganz anders, wie bei der Expansion. Da hierbei der Raum B sich in den Abflussraum verwandelt, so ist in Gl. (48) S. 192 das zweite Glied der rechten Seite wegzulassen, woraus folgt

$$d\,Q_y = c_p\,G_y\left(d\,T_y - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,T_y\,\frac{dp}{p}\right),$$

und hieraus ergiebt sich, wegen $d\,Q_y = 0$,

$$\frac{T_y}{T_2} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}, \tag{69}$$

wonach sich die Temperatur T_y im Raume B für jeden Werth des Druckes p bestimmt.

Die Gl. (47) schreibt sich dagegen, weil jetzt A der Zuflussraum ist:

$$d\,Q_x = c_p\,G_x\left(d\,T_x - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,T_x\,\frac{dp}{p}\right) + c_p(T_x - T_y)\,d\,G_x \,.$$

Nun ist aber $T_x = T_1$ und $d\,T_x = 0$, ferner folgt aus der Zustandsgleichung $B\,G_x\,T_1 = V_1\,p$ und $B\,T_1\,d\,G_x = V_1\,dp$, daher verwandelt sich die Gleichung für $d\,Q_x$ in folgende

$$d\,Q_x = \frac{A\,V_1\,dp}{\varkappa - 1}\left(1 - \varkappa\,\frac{T_y}{T_1}\right),$$

und wenn man hier Gl. (69) benutzt, so ergiebt sich durch Integration die Wärmemenge Q_x, die dem constanten Raume A zuzuführen ist:

$$Q_x = \frac{A\,V_1}{\varkappa - 1}\left\{(p - p_0) - \frac{\varkappa^2}{2\varkappa - 1}\,\frac{T_2}{T_1}\,p_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}} - 1\right]\right\} \cdot \tag{70}$$

Was nun den Verlauf der Compressionscurve ab (Fig. 33) betrifft, so gilt hier auch die Beziehung (68) und wenn man der Einfachheit wegen das Verhältniss $T_2 : T_1$ der Anfangstem-

peraturen mit λ bezeichnet und die Temperatur T_y nach Gl. (69) benutzt, so ergiebt sich die Gleichung der Curve wie folgt:

$$V_y = \left[(\lambda V_1 + V_2)\frac{p_0}{p} - \lambda V_1\right]\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \qquad (71)$$

also von sehr complicirter Form. Ermittelt man hieraus $d V_y$, so ergiebt sich endlich noch die Compressionsarbeit

$$L = \int p\, d V_y$$

und wenn man zwischen den entsprechenden Grenzen integrirt, folgt endlich:

$$L = \frac{(\lambda V_1 + V_2)p_0}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa - 1}\lambda V_1 p_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] \qquad (72)$$

Für den Fall, dass das im Raume B befindliche Luftquantum vollständig in den Raum A hineingedrückt werden sollte, würde $V_y = 0$ sein; Gl. (71) giebt dann die Pressung p am Ende durch

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\lambda V_1 + V_2}{\lambda V_1},$$

worauf sich nach den vorstehenden Gleichungen auch die zugehörigen Werthe von T_y, L und Q_x ermitteln lassen.

Aufgabe 3. In den vorangehenden Untersuchungen wurde einmal vorausgesetzt, dass nur der Verdränger, das andere Mal, dass nur der Arbeitskolben sich bewege.

Es werde nun angenommen, dass beide Kolben in Bewegung begriffen seien, was wieder auf den allgemeinen durch Fig. 30 S. 194 dargestellten Fall führt. Zum Zwecke der folgenden Untersuchungen erscheint es aber vortheilhaft, die dort gegebenen Gleichungen in andere Formen zu bringen. Unter Zugrundelegung von Fig. 30 und der angegebenen Bezeichnung findet sich durch Gl. (42), wenn der Anfangsdruck in beiden Räumen mit p_0, die Anfangstemperaturen mit T_1 und T_2 und der anfängliche Inhalt beider Räume mit V_1 und V_2 bezeichnet werden, für Berechnung des Druckes p die Formel

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_1 T_2 + V_2 T_1}{V_x T_y + V_y T_x}\right)\frac{T_x T_y}{T_1 T_2} \qquad (73)$$

und die äussere Arbeit L ermittelt sich durch Integration der Gleichung

$$dL = p\,d(V_x + V_y)\,. \tag{74}$$

Ist nun A der Abfluss- und B der Zuflussraum, so bestimmt sich die Wärme Q_x nach Gl. (47), wenn man Gl. (38) benutzt, aus:

$$dQ_x = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} A V_x p \left[\frac{dT_x}{T_x} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{dp}{p}\right], \tag{75}$$

und nach Gl. (48) wird unter Benutzung von Gl. (39) und gehöriger Reduction:

$$dQ_y = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{A V_y p}{T_y}\left[\frac{T_x dT_y}{T_y} - \left(\frac{\varkappa T_x - T_y}{\varkappa}\right)\frac{dp}{p} + (T_y - T_x)\frac{dV_y}{V_y}\right] \tag{76}$$

Diese Formeln setzen voraus, dass A der Abflussraum ist, was der Fall, wenn

$$d\left(\frac{V_y}{V_x}\frac{T_x}{T_y}\right) > 0\,, \tag{77}$$

wie auf S. 193 bewiesen wurde.

Sollte die Ungleichung (77) nicht erfüllt sein, so verwandelt sich der Raum B in den Abflussraum; man hat dann in den beiden vorhergehenden Formeln an allen Stellen den Index x mit dem Index y zu vertauschen.

Es möge nun als besonderer Fall derjenige behandelt werden, bei welchem die Temperatur in beiden Räumen constant, also $T_x = T_1$ und $T_y = T_2$ sein soll, eine Annahme, die man bei der Untersuchung von Heissluftmaschinen schon mehrfach zu Grunde gelegt hat. Bezeichnet man wieder das constante Verhältniss $T_2 : T_1$ mit λ, so ergeben die vorstehenden Gleichungen folgende Ausdrücke:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\lambda V_1 + V_2}{\lambda V_x + V_y}, \tag{73a}$$

$$dQ_x = -A V_x dp\,, \tag{75a}$$

$$dQ_y = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} A V_y p \left(\frac{\lambda - \varkappa}{\varkappa - 1}\frac{dp}{p} - \frac{\lambda - 1}{\lambda}\frac{dV_y}{V_y}\right), \tag{76a}$$

was voraussetzt, dass A der Zuflussraum, also:

$$d\left(\frac{V_y}{V_x}\right) < 0\,. \tag{77a}$$

Specialfall a. Während der Bewegung beider Kolben soll der Druck in beiden Räumen constant bleiben.

Hier folgt aus Gl. (73a) wegen $p = p_0$

$$V_y = V_2 + \lambda V_1 - \lambda V_x \tag{78}$$

und

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{V_2 + \lambda V_1}{V_x} - \lambda,$$

woraus

$$d\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = -(V_2 + \lambda V_1)\frac{dV_x}{V_x^2}.$$

Soll daher A der Abflussraum sein, so muss nach Gl. (77a) dV_x negativ erscheinen, es wird daher der Raum V_x abnehmen und daher nach Gl. (78) der Raum V_y zunehmen; wegen $V = V_x + V_y$ giebt die letztere Gleichung übrigens auch das Gesammtvolumen:

$$V = V_2 + \lambda V_1 - (\lambda - 1) V_x.$$

Daher erleidet dasselbe eine Abnahme (der Arbeitskolben bewegt sich, wie der Verdränger (Fig. 30), von rechts nach links), wenn $\lambda < 1$ oder $T_2 < T_1$, d. h. links vom Verdränger die höhere Temperatur herrscht; dagegen ist der Arbeitskolben von links nach rechts in Bewegung zu setzen, sofern $T_2 > T_1$ vorausgesetzt wird. Die äussere Arbeit findet sich nach Gl. (74)

$$L = (V - V_0)p_0 = (\lambda - 1)(V_1 - V_x)p_0.$$

Endlich findet sich die Wärmemenge, welche dem Abflussraume A mitzutheilen ist, nach Gl. (75a) wegen $dp = 0$:

$$Q_x = 0,$$

und nach Gl. (76a) für den Zuflussraum:

$$Q_y = \frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\lambda(\varkappa - 1)} A(V_y - V_2)p_0 = \frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\varkappa - 1} A(V_1 - V_x)p_0$$

oder auch

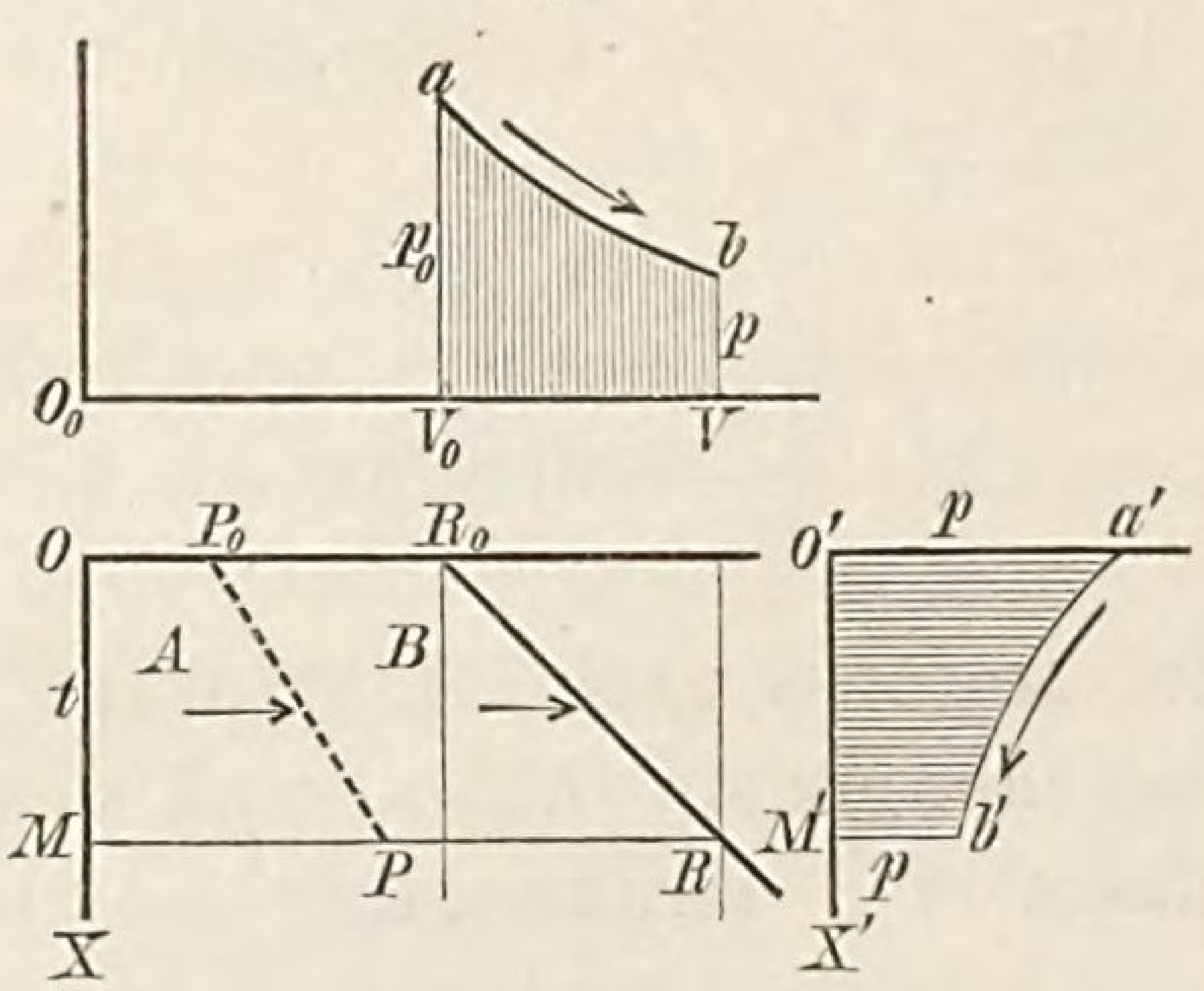
$$Q_y = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} AL,$$

welche Gleichung sich leicht in Worte kleiden lässt.

Specialfall b. Die Temperaturen in beiden Räumen seien wieder constant, beide Kolben bewegen sich aber *gleichförmig* von links nach rechts.

Es sei c_1 die Geschwindigkeit des Verdrängers und c die des Arbeitskolbens, so ist, wenn F den Querschnitt beider Kolben bedeutet, zur Zeit t:

Fig. 34.



$$V_x = V_1 + F c_1 t$$

und

$$V = V_0 + F c t\ ,$$

und hiernach durch Subtraction

$$V_y = V_2 + F(c - c_1)t\ .$$

Die Verbindung dieser Gleichungen liefert

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{V_0 - \frac{c}{c_1} V_1}{V_x} + \frac{c - c_1}{c_1}$$

und hiernach

$$d\left(\frac{V_y}{V_x}\right) = -\left(V_0 - \frac{c}{c_1} V_1\right)\frac{d V_x}{V_x^2}\ .$$

Soll nun, was vorausgesetzt werden mag, A der Abflussraum sein, so muss der Ausdruck rechts nach Gl. (77a) positiv sein; dies fordert, da eine Zunahme von V_x angenommen wurde, die Erfüllung der Bedingung:

$$\frac{c_1}{c} < \frac{V_1}{V_0}\ . \qquad (77\,\mathrm{b})$$

Wird das Verhältniss $c_1 : c$ mit m bezeichnet und eliminirt man aus den drei für V_x, V und V_y vorgelegten Gleichungen die Zeit, so ergiebt sich:

$$V_x = V_1 + m(V - V_0)$$
$$V_y = V_2 + (1 - m)(V - V_0)\ ,$$

sodass also beide Grössen durch das Gesammtvolumen V ausgedrückt erscheinen; die Substitution dieser Werthe in Gl. (73a) ergiebt dann den Werth p durch V dargestellt, also den Verlauf der

Druckcurve ab, worauf sich durch Integration der Gl. (74) auch leicht die gewonnene äussere Arbeit ermittelt.

Ebenso lassen sich dann mit Hülfe der Gln. (75a) und (76a) auch leicht die Wärmemengen Q_x und Q_y ermitteln. Die ganze Rechnung unterliegt keinerlei Schwierigkeit, doch unterbleibt hier die Aufführung der Rechnungsresultate, weil sehr complicirte Ausdrücke hervortreten und das Problem von untergeordneter technischer Bedeutung ist.

Zusatz. Die vorstehende Aufgabe ist vorzugsweise behandelt worden, um an der Hand derselben zum Schluss noch anzudeuten, wie unter der gleichen Voraussetzung, dass in beiden Räumen die Temperatur constant erhalten wird, die Aufgabe zu behandeln ist, wenn beide Kolben sich ungleichförmig bewegen, also das in Fig. 30 S. 122 angegebene Kolbendiagramm vorliegt. Sind die beiden Räume V_x und V_y als Function der Zeit gegeben, ist also

$$V_x = f'(t) \quad \text{und} \quad V_y = f''(t),$$

so folgt das Gesammtvolumen:

$$V = f'(t) + f''(t).$$

Eliminirt man in diesen Gleichungen die Zeit t, so lässt sich V_x sowohl wie V_y durch das Gesammtvolumen V ausdrücken. Die Substitution der Grössen in Gl. (73a) giebt dann die Gleichung der Druckcurve ab und aus den Formeln (75a) und (76a) berechnen sich dann durch Integration zwischen den entsprechenden Grenzen die Wärmemengen Q_x und Q_y.

Die Geschwindigkeiten c_1 und c sind dann variabel und lassen sich durch

$$c_1 = \frac{dV_x}{dt} \quad \text{und} \quad c = \frac{dV}{dt}$$

ausdrücken, und die Bedingung, dass A der Abflussraum ist, verlangt dann nach Gl. (77b), dass während des Verlaufes der Druckcurve, für welchen die Integration der Gl. (75a) und (76a) auszuführen ist, die Beziehung

$$\frac{c_1}{c} < \frac{V_x}{V}$$

erfüllt wird; die beiden letzten Gleichungen sind zu vertauschen von dem Punkte an, in welchem

$$\frac{c_1}{c} > \frac{V_x}{V}$$

wird.

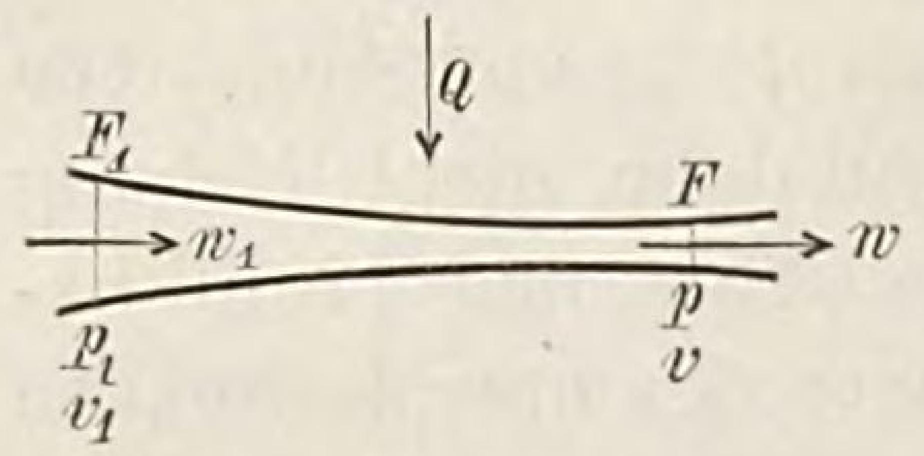
Mit dem zuletzt angedeuteten Fall hat man bei gewissen ausgeführten Luftmaschinen zu thun — eine Frage, auf welche zurückzukommen sein wird.

III. Ueber die strömende Bewegung und über den Ausfluss der Gase.

§ 40. Grundformeln für die strömende Bewegung einer Flüssigkeit.

Bei der Behandlung des allgemeinen Problems der Hydrodynamik stösst man bekanntlich auf Schwierigkeiten, die bis jetzt nur theilweise überwunden werden konnten; dieselben werden zwar nicht beseitigt, wenn man bei der Behandlung der Frage noch die Sätze der Thermodynamik heranzieht, es ergeben sich hierbei aber doch Erweiterungen, die gerade für gewisse technische, hierher gehörige Probleme von Bedeutung geworden sind

Fig. 35.



Es werde zunächst vorausgesetzt, dass eine Flüssigkeit, tropfbar- oder elastischflüssig, ohne Einwirkung äusserer Kräfte durch ein Rohr (Fig. 35) mit horizontaler Axe aber veränderlichem Querschnitte hindurchströme; es liege hierbei der Beharrungszustand vor, es fliesse also in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt die gleiche Gewichtsmenge G. Im vordern Querschnitt F gehe, was eine weitere Einschränkung umschliesst, durch jedes Querschnittelement die Flüssigkeit mit der gleichen Geschwindigkeit w hindurch und die Geschwindigkeitsrichtungen sollen in allen Punkten des Querschnittes als parallel angesehen werden, so dass das Flüssigkeitsvolumen, welches in der Secunde durch den Querschnitt F geht, durch Fw dar-

gestellt ist; in gleicher Weise ist dieses Volumen für den hintern Querschnitt F_1 durch $F_1 w_1$ gegeben. Ist v das specifische Volumen und p der Druck im vordern Querschnitte und werden dieselben Grössen für den Querschnitt F_1 mit v_1 und p_1 bezeichnet, so gelten für den Beharrungszustand zunächst die beiden Beziehungen:

$$G v_1 = F_1 w_1 \quad \text{und} \quad G v = F w \,. \tag{1}$$

Es möge nun die Gewichtseinheit Flüssigkeit auf ihrem Wege von F_1 nach F verfolgt werden. Denkt man sich, zuerst einmal von vorstehender Aufgabe abgesehen, die Gewichtseinheit Flüssigkeit vom Volumen v und dem Drucke p in einem ruhenden gewichtslosen Gefässe eingeschlossen, so ist U der ganze Betrag der innern Arbeit, und wird dieses Gefäss nun geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit w im Raume fortschreitend gedacht, so wird jetzt zu dem Arbeitsinhalte noch der Werth $\frac{w^2}{2g}$ hinzutreten; bezeichnet man diesen Werth mit H, setzt man also

$$H = \frac{w^2}{2g} \,, \tag{2}$$

so bedeutet H denjenigen Theil der Gesammtenergie, welcher der offenen fortschreitenden Bewegung entspricht und die ganze in der Gewichtseinheit enthaltene Arbeit wird daher sein: $U + H$. Zurückgehend zur vorliegenden Aufgabe wird daher beim Uebergange vom Querschnitte F_1 zum Querschnitte F eine Arbeitsaufnahme im Betrage von

$$(U + H) - (U_1 + H_1)$$

vorliegen, wobei die Differenz $H - H_1$ als Zunahme der Strömungsenergie bezeichnet werden kann. Nun werden aber auf dem Wege von F_1 nach F auch Widerstände zu überwinden sein, die im Wesentlichen in der Ueberwindung der Reibung der Flüssigkeit an den Gefässwandungen bestehen; bezeichnet man diesen Arbeitsverlust auf die Gewichtseinheit Flüssigkeit bezogen mit W, so ist nun die ganze auf dem Wege $F_1 F$ verbrauchte Arbeit, die vorübergehend mit L bezeichnet werden mag:

$$L = (U + H) - (U_1 + H_1) + W \,. \tag{3}$$

Für diese Arbeitsmenge lässt sich aber noch ein anderer Ausdruck hinstellen.

Während der Fortbewegung des Flüssigkeitskörpers $F_1 F$ legt die Hinterfläche F_1 in der Zeit dt den Weg $w_1 dt$ und die Vorderfläche den Weg $w dt$ zurück. Da nun $F_1 p_1$ der Druck ist, den die hinter dem Querschnitte F_1 folgende Flüssigkeit auf den Flüssigkeitskörper ausübt, so wird auf diesen an der Hinterfläche eine Arbeit $F_1 w_1 p_1 dt$ übertragen, während derselbe an der Vorderfläche F die Arbeit $F w p dt$ an die vorausgehende Flüssigkeit abgiebt. Hieraus folgt, dass der Flüssigkeitskörper $F_1 F$ in der Zeit dt mit Rücksicht auf Gl. (1) die Arbeit

$$F_1 w_1 p_1 dt - F w p dt = (p_1 v_1 - p v) G dt$$

aufgenommen hat. Nun ist aber das Flüssigkeitsgewicht $G dt$ in der Zeit dt in den Raum $F_1 F$ eingetreten und das gleiche Gewicht durch die Fläche F ausgetreten; der ganze zwischen F_1 und F liegende Flüssigkeitskörper hat, da der Beharrungszustand vorliegt, eine Aenderung seines Bewegungszustandes nicht erfahren, daher kann der vorstehende Ausdruck als die Arbeit betrachtet werden, welche das Flüssigkeitsgewicht $G dt$ während seiner Bewegung von F_1 nach F aufgenommen hat. Für die endliche Zeit t*) beträgt diese Arbeitsquantität

$$(p_1 v_1 - p v) G t$$

und wenn man die Gewichtseinheit Flüssigkeit wie oben in Betracht zieht, also $G t = 1$ setzt, so beträgt die Arbeitsaufnahme der Gewichtseinheit

$$(p_1 v_1 - p v) \, .$$

Nun soll weiterhin angenommen werden, dass der Gewichtseinheit Flüssigkeit während der Bewegung von F_1 nach F von aussen her die Wärmemenge Q mitgetheilt werde; da sich aber auf diesem Wege überdies noch die oben eingeführte Widerstandsarbeit W in Wärme verwandelt, so ist es, wie wenn im Ganzen die Wärmemenge $Q + AW$ zugeführt worden wäre. Diese Wärmemenge in Arbeit ausgedrückt (also durch A dividirt) und

*) In den folgenden Untersuchungen ist, wie gebräuchlich, zur Bezeichnung der verflossenen Zeit der Buchstabe t genommen, obgleich derselbe im übrigen Theile der vorliegenden Schrift auch zur Bezeichnung der Temperatur nach Celsius verwendet wird. Verwechselungen werden aber dadurch umgangen, dass in den Untersuchungen des vorliegenden Capitels die Temperatur immer in absolutem Maasse, mit T bezeichnet, auftreten wird.

mit dem vorher berechneten Arbeitswerthe zusammengefasst, giebt nun die ganze Arbeitsquantität L, welche der Gewichtseinheit Flüssigkeit auf dem Wege $F_1 F$ mitgetheilt wurde:

$$L = p_1 v_1 - p v + \frac{Q}{A} + W\ . \tag{4}$$

Durch Gleichsetzen mit dem Ausdrucke (3) erhält man daher als erste Hauptgleichung für das vorgelegte Problem

$$Q = A[pv - p_1 v_1 + (U + H) - (U_1 + H_1)]\,, \tag{5}$$

oder wenn man zum Differential übergeht:

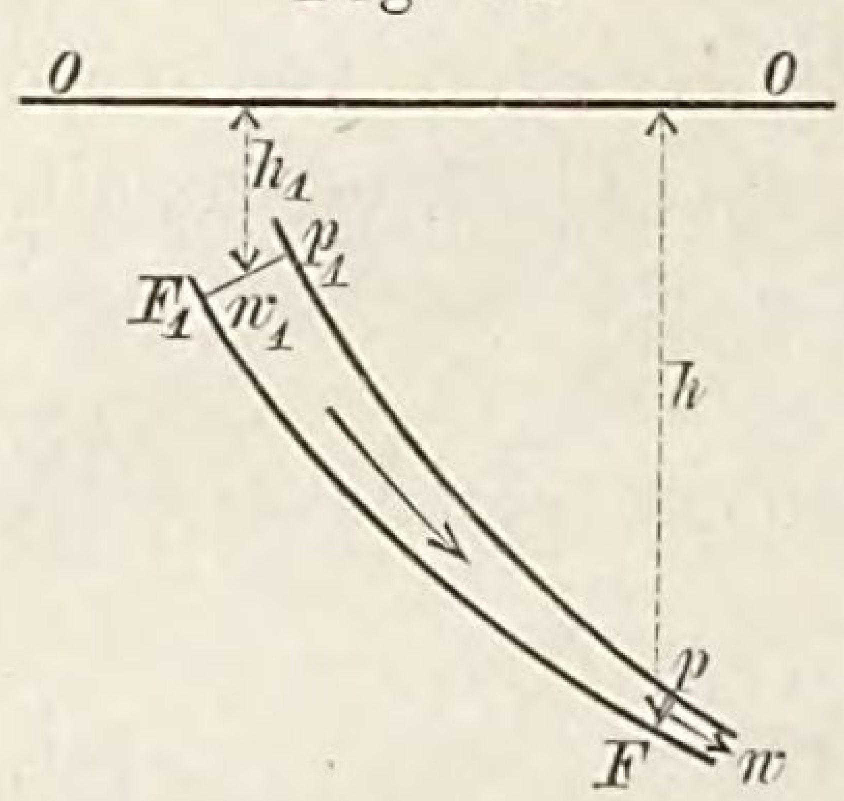
$$dQ = A(d(pv) + dU + dH)\ . \tag{5a}$$

Bemerkenswerth ist zuerst, dass in dieser Gleichung die Widerstandsarbeit nicht mehr auftritt; die Gleichung besteht also, welche Widerstände zwischen F_1 und F auch vorliegen und von welcher Art dieselben auch sein mögen. Gewöhnlich hat man es mit der Reibung der Flüssigkeit an den Gefässwandungen zu thun, doch kann diese Widerstandsarbeit auch in dem Arbeitsverluste bestehen, der durch Wirbelbildung erzeugt wird, wie sie z. B. hervortreten würde, wenn zwischen den beiden Querschnitten F_1 und F plötzliche Querschnittserweiterungen vorliegen würden. Gl. (5) bleibt durch solche Annahmen unberührt, wenn nur die Voraussetzung erfüllt bleibt, dass in den beiden Grenzquerschnitten F_1 und F Parallelismus der Geschwindigkeitsrichtungen vorliegt, also im vordern Querschnitte F die offene, wirbelnde Bewegung der Flüssigkeitstheilchen, die etwa zwischen F_1 und F auftrat, wieder verschwunden ist. Weiterhin ist zu bemerken, dass die Form der Gleichung (5) unberührt bleibt, auf welche Weise und nach welchem Gesetze der Gewichtseinheit Flüssigkeit auf ihrem Wege von F_1 nach F die gesammte Wärmemenge Q auch mitgetheilt, beziehentlich entzogen worden sein mag.

Nur in einer Richtung erfordert die Gleichung unter Umständen eine Erweiterung; sie wurde abgeleitet unter der Voraussetzung, dass auf die Flüssigkeitselemente keine äussern Kräfte wirken; nun wirkt aber unter allen Umständen wenigstens die Schwerkraft ein, daher gilt, wie gleich anfangs vorausgesetzt wurde, die Gl. (5) nur für einen Kanal mit horizontal liegender Axe. Ist die letztere Voraussetzung nicht erfüllt, so ist im Allgemeinen die Wirkung der Schwerkraft noch in Betracht zu

ziehen. Sei zu diesem Zwecke angenommen, der hintere Querschnitt F_1 (Fig. 36) liege um h_1 und der Querschnitt F um h unter der Horizontalebene OO, so wird die Gewichtseinheit Flüssigkeit in Folge der Wirkung der Schwerkraft noch weiterhin die Arbeit

Fig. 36.



$$h - h_1$$

in sich aufnehmen und dieser Werth wäre noch der rechten Seite der Gl. (4) hinzuzufügen; die Verbindung mit Gl. (3) giebt dann an Stelle von Gl. (5) die Formel:

$$Q = A[pv - p_1 v_1 + (U + H) - (U_1 + H_1) - (h - h_1)]\,; \quad \text{(I)}$$

oder zum Differential übergegangen:

$$dQ = A(d(pv) + dU + dH - dh)\,. \quad \text{(Ia)}$$

Hervorzuheben endlich ist noch, dass, wie aus der ganzen Entwickelung hervorgeht, die vorstehenden Sätze streng genommen nur für die Bewegung der Flüssigkeit in einem Kanale mit zwar veränderlichem aber unendlich kleinem Querschnitte giltig sind; bei der Anwendung der gewonnenen Gleichung auf den Fall, in welchem man es mit endlichen Querschnitten zu thun hat, tritt man daher schon in das Gebiet der Näherungsrechnungen*).

*) Die Gleichung (I) in den verschiedenen Formen, in welchen sie im Texte gegeben ist, lässt sich leicht in die Form bringen, in der sie zu verwenden ist, wenn auf die Flüssigkeitselemente beliebige äussere Kräfte einwirken, falls nur diese Kräfte als aus einer Kräftefunction V hervorgegangen angesehen werden können. Sind x, y und z die Coordinaten eines Flüssigkeitselementes zur Zeit t, auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogen, und bedeuten X, Y und Z die drei auf die Gewichtseinheit Flüssigkeit wirkenden Kraftcomponenten, so ist bekanntlich

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz$$

das Differential der Arbeit dieser Kräfte. Es ist dann einfach dV statt dh in Gl. (Ia) zu substituiren, so dass sich ergiebt:

$$dQ = A\,[d(pv) + dU + dH - dV]$$

oder integrirt

$$Q = A\,[pv - p_1 v_1 + U - U_1 + H - H_1 - (V - V_1)]\,,$$

wo $V - V_1$ nun den Theil der Arbeit darstellt, welchen die Gewichtseinheit

Neben den im Vorstehenden entwickelten Gleichungen, von denen bei den weitern Untersuchungen der Einfachheit wegen immer die in Differentialform geschriebene Gleichung (Ia) in Rechnung gezogen werden soll, besteht nun aber noch eine zweite Beziehung zwischen den eingeführten Grössen und zwar einfach noch die Grundgleichung (8) S. 25 der Thermodynamik, in welcher Gleichung nur noch neben der von aussen zugeführten Wärme Q die aus der Widerstandsarbeit W hervorgegangene Wärmemenge AW mit in Betracht zu ziehen ist; es ist daher

$$Q + AW = A(U - U_1) + A\int_{v_1}^{v} p\,dv \qquad \text{(II)}$$

oder

$$dQ + A\,dW = [A\,dU + p\,dv] \ . \qquad \text{(IIa)}$$

Die beiden Gleichungen (I) und (II) geben jetzt die Grundlagen zur näheren Untersuchung der strömenden Bewegung der Flüssigkeiten unter den gemachten Einschränkungen.*) Die Verbindung der Gl. (I) und (II) oder (Ia) und (IIa) führt übrigens noch auf die folgenden Ausdrücke,**) deren Anwendung in einzelnen Fällen die Rechnungen erleichtert:

$$H - H_1 = h - h_1 - W - \int_{p_1}^{p} v\,dp \qquad \text{(III)}$$

$$dH = dh - dW - v\,dp \ . \qquad \text{(IIIa)}$$

Flüssigkeit auf dem Wege F_1F (Fig. 36) von den äusseren Kräften empfangen hat.

*) Auf den Zusammenhang der hydrodynamischen Gleichungen mit denen der Thermodynamik habe ich zuerst in meiner Schrift »Das Locomotivenblasrohr. Experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Zugerzeugung durch Dampfstrahlen und die saugende Wirkung der Flüssigkeitsstrahlen überhaupt«, Zürich 1863, hingewiesen, neue Formeln für den Ausfluss der Dämpfe abgeleitet und den Zusammenhang nachgewiesen, welcher zwischen den verschiedenen Formeln besteht, die bis dahin für den Ausfluss der Gase gegeben worden waren. Vergl. auch des Verfassers Abhandlungen: »Ausfluss von Dämpfen und hocherhitzten Flüssigkeiten aus Gefässmündungen«. Civilingenieur Bd. 10. 1864. S. 87 und »Neue Darstellung der Vorgänge beim Ausströmen der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen«. Civilingenieur Bd. 17. S. 1. 1871.

**) Wenn auf die Flüssigkeitselemente beliebige äussere Kräfte wirken, die allerdings aus einer Kräftefunction hervorgegangen sein müssen, so tritt in Gl. (III) und (IIIa) an Stelle von h resp. h_1 die Kräftefunction V resp. V_1, wie bereits in der Anmerkung auf voriger Seite betont worden ist.

In den praktischen Anwendungen handelt es sich fast ausschliesslich um die Ermittelung der Strömungsenergie H, aus welcher sich dann nach Gl. (2) die Geschwindigkeit w im Querschnitte F durch die Formel

$$w = \sqrt{2gH}$$

und das Gewicht G der Flüssigkeit, welche in der Secunde durch den Querschnitt hindurchgeht, nach Gl. (1) durch

$$G = \frac{Fw}{v} \tag{IV}$$

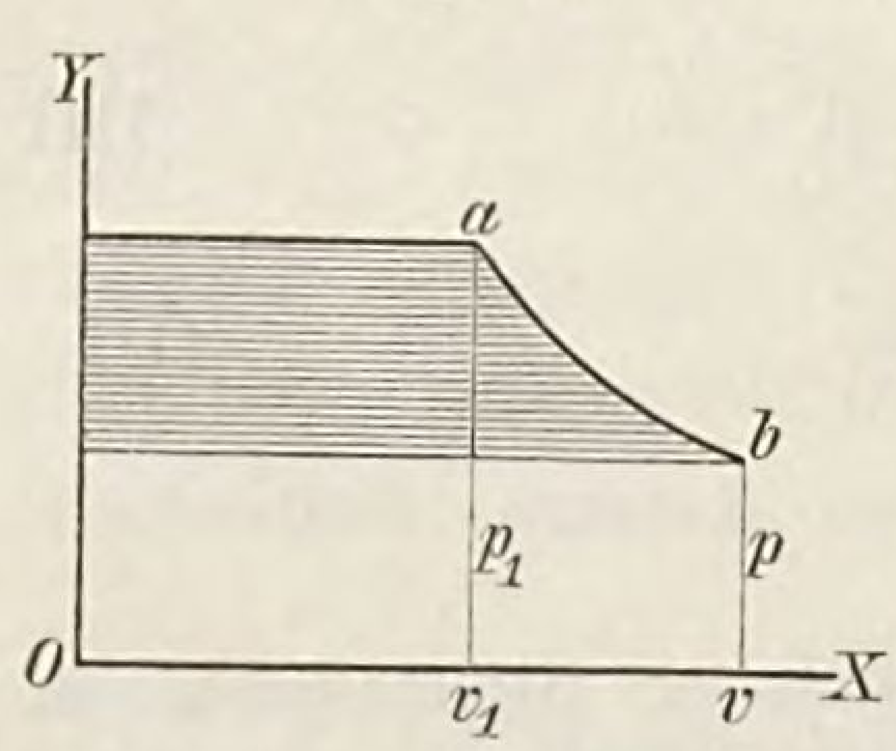
ermittelt.

Bemerkenswerth ist, dass das in Gl. (III) vorkommende Integral

$$-\int_{p_1}^{p} v\,dp = p_1 v_1 - p v + \int_{v_1}^{v} p\,dv \tag{6}$$

sich leicht graphisch darstellen lässt. Trägt man den Druck p_1 und das specifische Volumen v_1 der Flüssigkeit im hintern Querschnitte F_1 als rechtwinklige Coordinaten auf (Fig. 37) und ebenso die dem vordern Querschnitte F entsprechenden Werthe von p und v und nimmt man an, es sei das Gesetz bekannt, nach welchem sich der Druck p auf dem Wege $F_1 F$ (Fig. 36) mit dem Volumen ändert, es sei also der Verlauf der Curve ab bekannt, so repräsentirt die schraffirte Fläche in Fig. 37 den Werth des vorgelegten Integrales, ergiebt also nach Gl. (III) zugleich den Werth:

Fig. 37.



$$-\int_{v_1}^{v} v\,dp = H - H_1 - (h - h_1) + W\,. \tag{6a}$$

Die entwickelten Formeln gelten noch für jede Flüssigkeit; für die tropfbaren Flüssigkeiten, bei welchen für weit aus einander liegende Druckgrenzen das specifische Volumen als constant angesehen werden kann, also $v = v_1$ und $dv = 0$ zu setzen ist, ergiebt Gl. (III) unter Benutzung von Gl. (2)

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2g} = h - h_1 - W + v_1(p_1 - p)$$

als längst bekannten Ausdruck der Hydraulik; Gl. (I) bez. (II) ist jedoch bei derartigen Untersuchungen bisher nicht in Betracht gezogen worden.

§ 41. Ueber die strömende Bewegung der Gase.

Bei der Anwendung der im Vorstehenden angegebenen Hauptgleichungen auf die Bewegung der Gase bleibt Gl. (III) in der Form ungeändert, dagegen erfahren die beiden Gleichungen (I) und (II), aus denen Gl. (III) hervorging, eine bemerkenswerthe Vereinfachung. Die Veränderung dU der innern Arbeit ist für Gase durch die Beziehung Gl. (51) S. 125

$$dU = \frac{d(pv)}{\varkappa - 1}$$

gegeben, die Substitution in Gl. (Ia) giebt daher:

$$AdH = dQ - \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1} d(pv) + Adh\ , \tag{Ib}$$

und aus Gl. (IIa) folgt

$$dQ + AdW = \frac{A}{\varkappa - 1}(vdp + \varkappa p\,dv)\ . \tag{IIb}$$

Führt man in Gl. (Ib) die Temperatur T ein, indem man die Zustandsgleichung $pv = BT$ benutzt und zugleich die Beziehung

$$c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = AB$$

verwerthet, welche auf S. 128 gegeben worden ist, so folgt auch

$$AdH = dQ + Adh - c_p dT \tag{Ic}$$

und ebenso lässt sich Gl. (IIb) in andere Formen bringen, wenn man die verschiedenen Gleichungen Nr. 53 S. 127 in Betracht zieht.

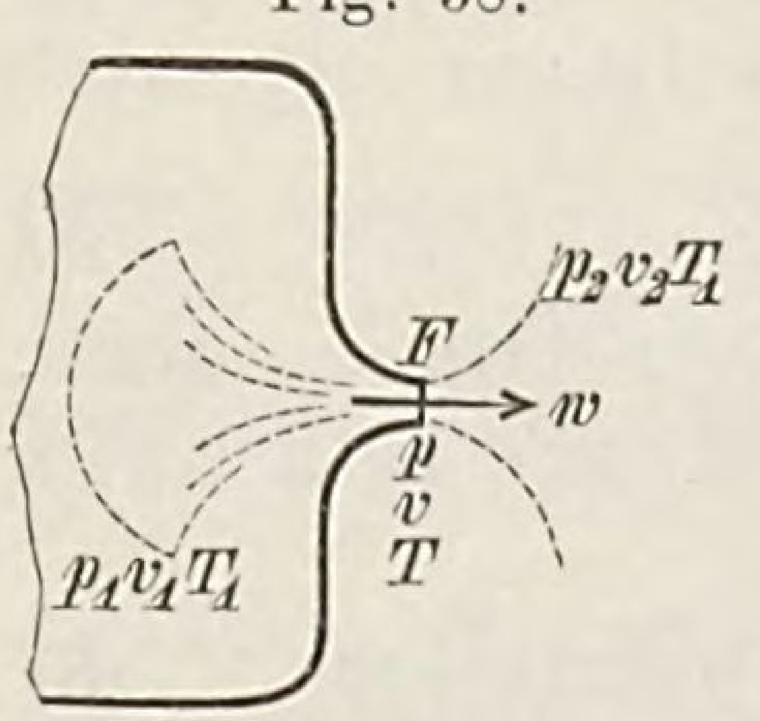
Man bemerkt, dass die Einführung der Temperatur T die Gleichung (Ic) sehr einfach gestaltet, doch verdient hervorgehoben zu werden, dass eine experimentelle Bestimmung der Temperatur strömender Gase, strömender Flüssigkeiten überhaupt, nicht möglich ist, wenigstens nicht mit Hülfe von Thermometern, weil Reibung und Stoss der Flüssigkeit an der Thermometerkugel Einfluss auf den Thermometerstand ausüben.

In den meisten Schriften der Physik und Mechanik hat man, wie bemerkt werden mag, noch bis in die neueste Zeit obige Gl. (IIIa) bei der Lösung hydrodynamischer Aufgaben ausschliesslich benutzt und bei der Integration des letzten Gliedes $v\,dp$ der rechten Seite der Gleichung bezüglich des Zusammenhanges der Grössen p und v verschiedene Hypothesen zu Grunde gelegt; jeder derselben entspricht nun aber, da die Gleichung als entsprungen den Gleichungen (I) und (II) angesehen werden kann, immer eine ganz bestimmte Voraussetzung bezüglich der Wärmemenge dQ, die der Flüssigkeit zuzuführen wäre, wie auch ein ganz bestimmtes Gesetz, welchem die Widerstände unterworfen sind; erst durch gleichzeitige Berücksichtigung dieser Fragen gewinnt man daher vollständigen Einblick in die Vorgänge. Zweckmässig ist es, bei Untersuchung bestimmter Fälle von vornherein die beiden Grundformeln (Ia) und (IIa), speciell bei Gasen die Gl. (Ib) und (IIb) als Ausgangspunkt zu wählen.

§ 42. Ausfluss der Gase durch einfache Mündungen bei constantem Druck.

Man denke sich ein sehr weites Gefäss mit atmosphärischer Luft vom Drucke p_1, der Temperatur T_1 und dem specifischen Volumen v_1 gefüllt und mit einer Ausflussöffnung versehen, durch welche die Luft nach einem zweiten Raume strömt, in welchem der Druck p_2 herrscht und gleichfalls auf constanter Höhe erhalten wird; die Bedingung, dass zugleich der Druck p_1 im Ausflussgefässe constant sei, wird erfüllt, wenn man sich Gefäss und Vorlage von sehr grossem Inhalt und die Durchflussöffnung von sehr geringem Querschnitte denkt, beziehentlich eine geringe Ausflussdauer voraussetzt. Den gewöhnlichen Fall, der auch im Folgenden vorausgesetzt werden soll, bildet der Ausfluss der Luft in die freie Atmosphäre; in der Mündungsebene (Fig. 38), deren Querschnitt F Quadratmeter betrage, herrsche der Druck p, der vorerst als vom äussern Drucke p_2 verschieden angesehen werden mag; Temperatur und specifisches Volumen in der Mündungsebene seien T und v und ausserhalb derselben T_1 und v_2, die

Fig. 38.



Temperatur daselbst sei also mit derjenigen im Ausflussgefässe identisch. Endlich sei, um vom Einflusse der Contraction des Luftstrahles zunächst absehen zu können, die Mündung nach innen hin abgerundet vorausgesetzt. Die Aufgabe die hier vorliegt, besteht nun in der Bestimmung der Strömungsenergie H in der Mündungsebene und in der Ermittelung der Ausflussgeschwindigkeit w und der Ausflussmenge G pro Secunde in Kilogrammen gemessen, zu welch letzteren Bestimmungen die Gln. (2) und Gl. (IV) zu benutzen sind.

Im weiten Ausflussgefässe ist die Luft im Ruhezustande anzunehmen, daher $H_1 = 0$, weil $w_1 = 0$; wenn der Strahl in horizontaler Richtung ausströmt, demnach h constant ist, wird auch $dh = 0$ zu setzen sein; da endlich der Luft im Allgemeinen während des Hinströmens nach der Mündung auch Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird, so ist auch noch $dQ = 0$ und man erhält daher für den vorgelegten Fall statt Gl. (Ib) und (II)

$$dH = -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} d(pv) \tag{Ic}$$

$$dW = \frac{1}{\varkappa - 1} (v\,dp + \varkappa p\,dv) \tag{IIc}$$

und hieraus durch Addition, was auch aus Gl. (IIIa) direct folgt,

$$dH + dW = -v\,dp\ . \tag{IIIb}$$

Aus Gl. (Ic) ergiebt sich nun nach den gemachten Voraussetzungen durch Integration

$$H = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} (p_1 v_1 - p\,v) \tag{7}$$

und hiernach aus Gl. (2) die Ausflussgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} (p_1 v_1 - pv)} \tag{8}$$

und nach Gl. (IV) die Luftmenge, welche, in Kilogrammen gemessen, in der Secunde ausströmt

$$G = F \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{(p_1 v_1 - pv)}{v^2}}\ . \tag{9}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind aber noch unbestimmt, die Grössen p_1 und v_1 im Ausflussgefässe sind zwar gegeben und auch der Druck p in der Mündungsebene könnte als bekannt, etwa gleich dem äussern Drucke p_2 angenommen werden, nicht bekannt ist aber das specifische Volumen v daselbst.

Man erkennt jedoch, dass die Beziehung zwischen den vier genannten Grössen sogleich gegeben ist, wenn der Verlauf der Curve *ab* (Fig. 37) bekannt ist, man also weiss, wie der Druck der Luft mit dem Volumen sich ändert, während dieselbe im Ausflussgefässe von der Ruhe aus nach der Mündung strömt, eine Bewegung, die ohne Zweifel in einem trichterförmigen Raume, wie er in Fig. 38 angedeutet ist, erfolgt, wie auch die Luft ausserhalb der Mündung sich trichterförmig ausbreitend aus der Geschwindigkeit w zur Ruhe übergehen wird. Für den letzten Theil gilt die Gl. (I) gleichfalls und daher giebt deren Integration

$$H = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_2 v_2 - p v)$$

und aus der Verbindung mit Gl. (7) folgt daher die Beziehung

$$p_2 v_2 = p_1 v_1$$

oder $T_2 = T_1$, d. h. die ausgeflossene Luftmenge hat nach ihrer Ausbreitung ausserhalb wieder dieselbe Temperatur, wie im Ausflussgefässe, welche Widerstände beim Ausflusse auch vorgelegen haben mögen und welcher Druck p auch in der Mündungsebene herrschen mag, — wenn nur die gemachte Voraussetzung gilt, dass der Luft während ihres Hinströmens nach der Mündung Wärme weder mitgetheilt noch entzogen worden ist. Da die Luft, der Voraussetzung gemäss, ausserhalb schon die Temperatur T_1 besitzt, so ändert also die hinzutretende Luft nichts an dieser Temperatur.

Um nun auf die Frage der Druckänderung von p_1 auf p zurückzukommen, so ist zu deren Entscheidung noch die zweite Gleichung (IIc) heranzuziehen, welche zur Berechnung der Widerstandsarbeit W dient. Nimmt man zuerst an, dass die Widerstände, welche die ausströmende Luft in der Mündung zu überwinden hat, als verschwindend klein vernachlässigt werden dürfen, so ist $dW = 0$ und man erhält daher aus Gl. (IIc)

$$v\,dp + \varkappa p\,dv = 0$$

und hieraus durch Integration

$$p v^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa}\,, \tag{10}$$

als Expansionscurve demnach die adiabatische Linie. Bestimmt man aus dieser Beziehung die Grösse v und substituirt man dieselbe in Gl. (8) und (9), so hat man für den vorgelegten Fall

$$w = \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa-1}p_1 v_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} \tag{11}$$

und

$$G = F\sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_1}{v_1}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}\,. \tag{12}$$

Diese beiden Formeln sind zuerst von de Saint-Venant und Wantzel*) (1839) gegeben worden und sind dann später auch von Weisbach**) (1855), dem ohne allen Zweifel die ältern Untersuchungen unbekannt geblieben waren, unter dessen Namen aber in neuerer Zeit die Gleichungen gewöhnlich aufgeführt werden, abgeleitet worden. De Saint-Venant und Wantzel sowohl, wie Weisbach haben dann durch Luftausflussversuche die Gleichungen der Prüfung unterworfen und die Correctionen zu bestimmen gesucht, die an den Formeln anzubringen wären, um die Uebereinstimmung der Versuche mit den Rechnungen herbeizuführen. Die Versuchsresultate von de Saint-Venant und Wantzel sind aber aus Gründen, die zum Theil schon Poncelet aufgeführt hat und die schon oben in § 36 S. 175 besprochen wurden, höchst unzuverlässig; im Uebrigen verlassen die Genannten schliesslich auch die Formeln und geben statt derselben Näherungsausdrücke, welche die Resultate ihrer Versuche wiedergeben, im Uebrigen aber später von Anderen eine weitere Beachtung nicht gefunden haben.

Die beiden französischen Ingenieure haben aber das Verdienst, die beiden Gleichungen (11) und (12) einer nähern Discussion unterworfen und zuerst die Frage behandelt zu haben, ob und unter welchen Verhältnissen der Druck p in der Mündung mit dem äussern Drucke p_2 identisch angenommen werden dürfe, eine Frage, auf die im Folgenden zurückzukommen sein wird, und die, wie die ganze Abhandlung von de Saint-Venant und

*) Vergl. Citat auf S. 175.

**) Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 3. Aufl. 1855. Bd. 1. S. 820.

Wantzel lange Zeit unbeachtet geblieben ist; erst 1860 hat Max Herrmann*) die Frage in derselben Weise, wie die genannten französischen Schriftsteller, jedenfalls wohl ohne deren Arbeiten zu kennen, behandelt, worauf dann Kolster**) 1867 zum ersten Male unter Hinweis auf diese Arbeiten ausführlicher auf die Sache einging. Die ersten und vollkommenen Versuche über Luftausfluss sind Weisbach zu verdanken; Weisbach***) bezeichnet, weil die beiden Formeln (11) und (12) unter Vernachlässigung der Widerstände entwickelt worden sind, die Geschwindigkeit w und die Ausflussmenge G als »theoretische Werthe« und bestimmt die wirkliche oder effective Ausflussgeschwindigkeit, die mit w_e bezeichnet werden mag und welche kleiner als w ist, durch die Beziehung

$$w_e = \varphi w ,$$

wobei φ als Geschwindigkeitscoefficient, wie es in der praktischen Hydraulik Gebrauch ist, eingeführt wird.

Die effective Strömungsenergie H_e in der Mündungsebene wäre daher

$$H_e = \varphi^2 H$$

und die Widerstandsarbeit W:

$$W = H - H_e = (1 - \varphi^2) H = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) H_e = \zeta H_e , \quad (13)$$

wenn man die Bezeichnung

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \quad (14)$$

einführt. Den Werth ζ bezeichnet man nach Weisbach, dem wir die Einführung dieser Grösse in die Formeln der praktischen Hydraulik und zugleich die experimentelle Bestimmung derselben für verschiedene Arten der Widerstände verdanken, als »Wider-

*) Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins. 1860. Jahrg. 12. S. 34.

**) Kolster, »Ueber das Ausströmen von Dampf und Luft«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XI. 1867. S. 435.

***) Weisbach, Vorläufige Mittheilungen über die Ergebnisse vergleichender Versuche über den Ausfluss der Luft und des Wassers unter hohem Druck. Civilingenieur Bd. 5. 1859. S. 1; sowie: Versuche über Ausströmung der Luft unter hohem Drucke durch Mundstücke und Röhren. Civilingenieur Bd. 12. 1866. S. 1 und S. 77.

standscoefficient«. Aus Gleichung (14) folgt umgekehrt der Geschwindigkeitscoefficient

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \qquad (15)$$

und wenn derselbe bekannt ist, ergiebt Gl. (11) die effective Ausflussgeschwindigkeit w_e, wenn man den Wurzelausdruck der rechten Seite mit φ multiplicirt.

Bei innen gut abgerundeten Mündungen und bei kurzen cylindrischen Ansatzröhren, bei denen der Strahl die Mündung mit vollem Mündungsquerschnitt verlässt, findet sich die wahre Ausflussmenge G_e

$$G_e = \varphi G ,$$

wobei G nach Gl. (12) bestimmt ist; liegt dagegen Contraction vor, wie bei Mündungen in dünner Wand, so ist an die Stelle des Mündungsquerschnittes F der Querschnitt αF an dem Orte der grössten Contraction einzuführen, in welchem Falle der Factor α, der »Contractionscoefficient«, durch Versuche ermittelt sein müsste. In diesem Falle wäre, wenn man das Product $\alpha\varphi$ mit μ als »Ausflusscoefficient« bezeichnet,

$$G_e = \mu G .$$

Die schönen und in grossem Maassstabe ausgeführten Versuche von Weisbach, welche durch Grashof*) eine theilweise Umrechnung erfahren haben, waren nur darauf gerichtet, für eine Reihe verschiedener Mündungsformen die Coefficienten φ und μ zu ermitteln. Im Allgemeinen stellte sich dabei heraus, dass diese Coefficienten, wenigstens innerhalb der von Weisbach benutzten Druckgrenzen, wenig von denen abweichen, die beim Ausfluss von Wasser, grösstentheils ebenfalls von Weisbach, beobachtet wurden und überdies erschien für ein und dieselbe Mündung der Geschwindigkeitscoefficient φ und demnach auch der Widerstandscoefficient ζ bei verschiedenen Pressungsdifferenzen als nahezu unveränderlich, Resultate, auf die man allerdings schon auf Grund der ältern Versuche von Schmidt (1820), Lagerhjelm (1822), Koch (1824) und d'Aubuisson (1826) geschlossen hat; die letztern Versuche sind freilich durchgängig

*) Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Bd. I. Leipzig 1875.

nur bei sehr geringem Ueberdruck (Bruchtheile eines Meter Wassersäule) ausgeführt worden; erst Weisbach ging bis zu einer Atmosphäre Ueberdruck. Es wird sich in der Folge Gelegenheit geben, auf die Weisbach'schen Versuchsresultate (die Versuchsmethode ist schon oben auf S. 180 besprochen worden) zurückzukommen, bemerkt werden mag hier nur noch, dass Weisbach eine Discussion der Gln. (11) und (12), wie sie bereits von de Saint-Venant und Wantzel unternommen worden war, unterlassen hat und von vornherein annahm, dass bei seinen Versuchen der Druck p in der Ebene der Mündung mit dem Drucke p_2 der äussern Atmosphäre identisch gewesen sei. Die Annahme ist für die von Weisbach benutzten Pressungen richtig, sie würde, wie sich noch zeigen wird, bei der Berechnung der Versuche unzulässig gewesen sein, wenn bei denselben der Druck im Ausflussgefässe nur wenig grösser gewesen wäre, als er in der That war.

§ 43. Einführung des »Ausflussexponenten« in die Ausflussformeln.

Gegen die im Vorstehenden angegebene Art der Einführung der Widerstände in die Rechnungen ist nichts einzuwenden, wenn es sich einzig nur um die numerische Bestimmung der wirklichen Ausflussgeschwindigkeit der Luft und der effectiven Ausflussmenge handelt. Die Methode giebt aber keine Aufklärung über den wahren Zustand der Luft d. h. über die Temperatur und das specifische Volumen derselben in der Mündungsebene. Die Widerstandsarbeit W, nach Gl. (13) berechnet, lässt noch im Unklaren darüber, nach welchem Gesetze die Luft während des Hinströmens nach der Mündung expandirt, sobald überhaupt Widerstände vorliegen, und daher kommt es noch darauf an, dieses Gesetz zu ermitteln und wenn möglich Formeln aufzustellen, die unmittelbar die wahren Werthe der Ausflussgeschwindigkeit und der Ausflussmenge ergeben. Zu diesem Zwecke gehe ich von der Annahme aus, dass der in Gl. (13) eingeführte Werth des Widerstandscoefficienten ζ in der That, wie alle bis jetzt bekannten Versuche zu bestätigen scheinen, für eine bestimmte Mündungsform als constant angesehen werden dürfe. Aus Gl. (13) folgt dann, wenn, wie in Gl. (Ic) angenommen worden ist, die effective Strömungsenergie mit H statt mit H_e bezeichnet wird:

$$W = \zeta H ,$$

oder wenn man diesen Ausdruck differentiirt und Gl. (Ic) benutzt

$$dW = -\frac{\varkappa\zeta}{\varkappa - 1} d(pv) . \tag{16}$$

Andererseits giebt aber Gl. (IIc) S. 221 auch dW direct:

$$dW = \frac{1}{\varkappa - 1} (v dp + \varkappa p dv) .$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man daher die Differentialgleichung der Expansionscurve:

$$(1 + \varkappa\zeta) v dp + \varkappa(1 + \zeta) p dv = 0 .$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$n = \frac{\varkappa(1 + \zeta)}{1 + \varkappa\zeta} , \tag{17}$$

so giebt die Integration

$$p v^n = p_1 v_1^n , \tag{18}$$

und unter Benutzung der Zustandsgleichung der Gase folgt auch

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} , \tag{19}$$

wonach sich das Volumen v und die Temperatur T durch den Druck p in der Mündung ihrer wirklichen Grösse nach berechnen lassen. Da die Voraussetzung eines constanten Werthes für ζ auch n constant erscheinen lässt, so folgt aus Gl. (18), dass die Expansionscurve die polytropische Curve (S. 142) ist; für $\zeta = 0$, also unter Vernachlässigung der Widerstände, folgt $n = \varkappa$ d. h. die Curve geht, wie bereits gefunden wurde, in die adiabatische Linie über. Die Grösse n habe ich den »Ausflussexponenten« genannt*); derselbe lässt sich nach Gl. (17) leicht bestimmen, wenn ζ durch Versuche bekannt ist; ist n gegeben, so findet sich umgekehrt

$$\zeta = \frac{\varkappa - n}{\varkappa(n - 1)} , \tag{20}$$

wonach n jederzeit kleiner als $\varkappa$ erscheint.

*) Neue Darstellung der Vorgänge beim Ausströmen der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen. Civilingenieur Bd. 17. 1871. S. 71.

Bestimmt man nun v aus Gl. (18) und setzt man den Werth in die Gleichungen (8) und (9) ein, so folgt:

$$w = \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \tag{21}$$

$$G = F \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1}{v_1} \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \tag{22}$$

und aus Gl. (16) folgt durch Integration, wenn man noch Gl. (20) benutzt, die Widerstandsarbeit:

$$W = \frac{\varkappa - n}{(n-1)(\varkappa - 1)} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]. \tag{23}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht in andere Formen bringen, wenn man unter Benutzung von Gl. (19) statt des Druckes p in der Ebene der Mündung die Temperatur T oder das specifische Volumen v daselbst substituirt und zugleich die Zustandsgleichung in der mehrfach benutzten Form

$$A p_1 v_1 = c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T_1$$

verwendet.

Die Einführung der Temperatur T ergiebt z. B. aus Gl. (21) die effective Strömungsenergie H in der Mündung, in Wärmeeinheiten gemessen, sehr einfach

$$AH = A\frac{w^2}{2g} = c_p(T_1 - T) \tag{21a}$$

und die Widerstandsarbeit in gleicher Art gemessen

$$AW = \frac{\varkappa - n}{\varkappa(n-1)} c_p(T_1 - T) \,. \tag{23a}$$

Die Addition beider Formeln giebt

$$A(H + W) = \frac{n(\varkappa - 1)}{\varkappa(n-1)} c_p(T_1 - T)$$

wobei die Bemerkung beigefügt werden mag, dass nach Gl. (IIIb) S. 221 der Werth $(H + W)$ in Fig. 37 S. 218 durch die schraffirte Fläche repräsentirt wird, wenn die Curve ab die betreffende polytropische Curve darstellt.

Gl. (22) giebt die Luftmenge, welche in der Secunde wirklich ausströmt, in Gewichtseinheiten (Kilogramm) gemessen an. Sollte diese Luftmenge in Cubikeinheiten (Cubikmeter) gegeben werden, so muss hinzugefügt werden, an welcher Stelle die Messung erfolgen soll; im Innern des Gefässes ist das Volumen Gv_1 in der Mündungsebene Gv und ausserhalb der Mündung nach der Ausbreitung Gv_2, wobei, weil daselbst die Temperatur wieder diejenige im Ausflussgefässe ist, die Beziehung $p_2 v_2 = p_1 v_1$ besteht, während v nach Gl. (18) zu beurtheilen ist. Um die besondere Angabe, wo das Volumen gemessen werden soll, zu umgehen, ist es zweckmässiger, die Ausflussmenge in Gewichtseinheiten auszudrücken. Sollte eine Mündung vorliegen, bei welcher eine Contraction des Strahles stattfindet, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (22) noch mit dem Contractionscoefficienten α zu multipliciren, über dessen Grösse im einzelnen Falle weiter unten nähere Angaben folgen werden. Gl. (22) giebt in diesem Falle, wenn man zugleich auf beiden Seiten mit v_1 multiplicirt,

$$G v_1 = \alpha F \sqrt{2g \frac{c_p T_1}{A} \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}, \qquad (22a)$$

wobei Gv_1 wie erwähnt, das Luftvolumen pro Secunde, bei innerem Drucke p_1 gemessen, repräsentirt.

Beispiel. Es sei für eine Mündung gewisser Art der Ausflussexponent $n = 1{,}250$ gegeben, also der Widerstandscoefficient derselben nach Gl. (20) $\zeta = 0{,}454$.

Durch diese Mündung ströme nun die Luft unter constantem Druck von 1,5 Atmosphären aus einem sehr weiten Gefässe direct in die freie Atmosphäre; der äussere Druck von einer Atmosphäre liege dabei auch in der Mündungsebene vor, es sei also

$$\frac{p}{p_1} = \frac{2}{3}.$$

Ist weiter, nach Celsius gemessen, die Temperatur im Ausflussgefässe, wie ausserhalb desselben 15°, also die absolute Temperatur $T_1 = 288°$, so findet sich aus der Zustandsgleichung $p_1 v_1 = B T_1$ für $B = 29{,}269$ das specifische Volumen der Luft im Ausflussgefäss $v_1 = 0{,}5438$.

Das Beispiel soll in doppelter Art berechnet werden, einmal ohne Berücksichtigung der Widerstände und dann mit Berücksichtigung derselben. Es findet sich nun für

$$n = \varkappa = 1{,}410 \quad \text{und} \quad n = 1{,}250,$$

das specifische Volumen v in der Mündung Gl. (18)

$$v = 0{,}7251 \quad \text{beziehentlich} \quad v = 0{,}7523,$$

die absolute Temperatur T in der Mündung:

$$T = 256{,}0\ , \qquad \text{bez.} \qquad T = 265{,}6\ ,$$

oder nach Celsius gemessen:

$$-17^\circ{,}0 \qquad \text{bez.} \qquad -7^\circ{,}4\ .$$

Die Widerstände erhöhen daher die Temperatur in der Mündung.

Die Strömungsenergie in der Mündung ist nach Gl. (21a):

$$H = 3222{,}4 \qquad \text{bez.} \qquad H = 2255{,}6 \text{ mkg.}$$

Die Widerstandsarbeit (Gl. 23a)

$$W = 0\ , \qquad \text{bez.} \qquad W = \zeta H = 1024{,}1\ .$$

Die Ausflussgeschwindigkeit w:

$$w = 251{,}4 \text{ Meter} \quad \text{bez.} \quad w = 210{,}4 \text{ Meter}\ .$$

Das Verhältniss des zweiten Werthes zum ersten ist 0,8366 und könnte an Stelle von φ als Geschwindigkeitscoefficient betrachtet werden; der Werth ist aber bei gleicher Grösse von ζ nicht mit dem identisch, welcher aus Gl. (15) folgen und der im vorliegenden Falle 0,829 betragen würde. Der Grund, weswegen bei Gasen die Gl. (15) ihre Bedeutung verliert, ist leicht zu erkennen; eine weitere Verfolgung dieser Frage ist aber völlig überflüssig, da durch Einführung des Ausflussexponenten die Aufgabe direct mit allen Nebenfragen (Beschaffenheit der Luft in der Mündung) gelöst wird und das Interesse an den Ergebnissen der Rechnung für den Fall, dass keine Widerstände vorliegen, hinfällig wird.

Die Luftmenge G in Kilogr. gemessen, welche in der Secunde durch die Mündung von F Quadratmetern ausströmt, findet sich nach Gl. (22) oder Gl. (IV) S. 218:

$$G = 346{,}8 \,.\, F \qquad \text{bez.} \qquad G = 279{,}6 \,.\, F$$

oder in Cubikmetern bei innerem Drucke gemessen:

$$G v_1 = 188{,}6 \,.\, F \qquad \text{bez.} \qquad G v_1 = 152{,}1 \,.\, F$$

oder in der Ebene der Mündung gemessen:

$$G v = 251{,}4 \,.\, F\ , \qquad \text{bez.} \qquad G v = 210{,}4 \,.\, F\ ,$$

immer unter der Annahme, dass keine Contraction des Strahles vorliegt. Das Verhältniss der beiden Werthe von G, nämlich: 0,8064 könnte als Ausflusscoefficient angesehen werden, doch gilt hier dasselbe, was soeben bezüglich des Verhältnisses der beiden Geschwindigkeiten gesagt wurde.

Endlich findet sich noch für beide vorliegende Fälle das Volumen v_2 der Luft nach der Ausbreitung ausserhalb der Mündung aus der Gleichung $p_2 v_2 = p_1 v_1$ zu

$$v_2 = 0{,}8157\ .$$

§ 44. Discussion der Ausflussformel:

$$G v_1 = \alpha F \sqrt{2 g \frac{c_p T_1}{A} \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]}\ . \qquad (22\text{a})$$

Bei Besprechung vorstehender Gleichung ist bis jetzt der Druck p in der Mündungsebene stillschweigend als gegeben und

im vorstehenden Beispiele ausdrücklich als identisch mit dem äussern Drucke p_2 betrachtet worden; man erkennt aber aus vorstehender Formel sogleich, dass die vorausgesetzte Gleichheit $p = p_2$ entweder niemals vorliegt oder nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist. Nimmt man an, der äussere Druck p_2 sei gleich dem innern Drucke p_1, so ergiebt sich die Ausflussmenge $G = 0$, wie begreiflich, und der Mündungsdruck wird ebenfalls p_2 sein.

Denkt man sich dagegen, der Ausfluss finde nach einem luftleeren Raume statt, es sei demnach $p_2 = 0$ und der Mündungsdruck von gleicher Grösse, so giebt die Formel wiederum $G = 0$, was unmöglich ist; man hat für diesen Fall gerade das Maximum der Ausflussmenge zu erwarten.

Setzt man bei unveränderlichem innern Drucke p_1 und der inneren Temperatur T_1 verschiedenen äussern Druck p_2 voraus, so wird in jedem einzelnen Falle auch der Mündungsdruck p ein anderer sein; man erkennt aber sofort aus der vorstehenden Formel, dass ein gewisser Druck p oder ein gewisses Druckverhältniss $x = \frac{p}{p_1}$ existirt, bei welchem die Ausflussmenge G ein Maximum ist. Differentiirt man den Klammerausdruck unter der Wurzel, so erhält man den betreffenden Werth von x, der mit x_m bezeichnet werden mag, aus der Gleichung:

$$x_m = \frac{p}{p_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{24}$$

und dann für die polytropische Curve $p v^n = p_1 v_1{}^n$ das zugehörige Volumen v und die entsprechende Temperatur T in der Mündungsebene nach den beiden Formeln

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (25) \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{2}{n+1} \,. \tag{26}$$

Die Benutzung von Gl. (24) in Gl. (22a) ergiebt dann das Maximum G_m der Ausflussmenge

$$G_m v_1 = \alpha F \sqrt{2g \frac{c_p}{A} T_1 \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}} \tag{27}$$

oder

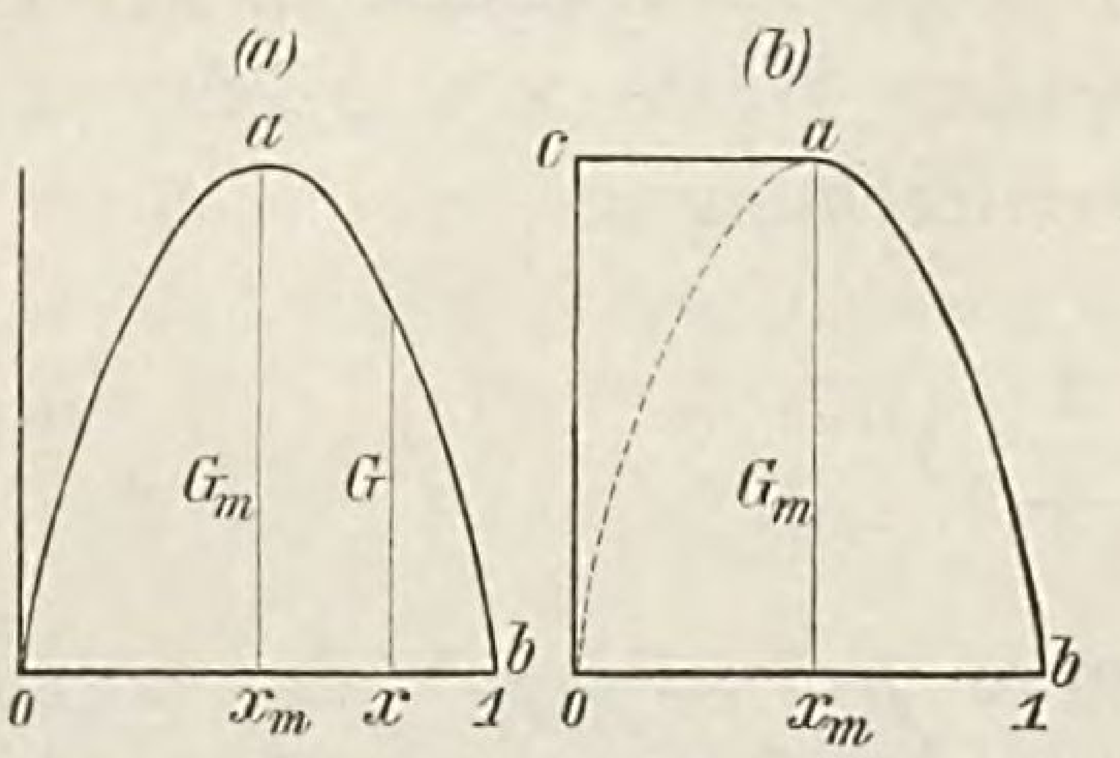
$$G_m = \alpha F \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{v_1} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}}, \qquad (27a)$$

und die Strömungsenergie in der Mündung

$$H = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{c_p}{A} T_1 = \frac{\varkappa}{(\varkappa - 1)} \frac{(n-1)}{(n+1)} \cdot p_1 v_1 . \qquad (28)$$

Um die Veränderlichkeit der Ausflussmenge G mit dem Mündungsdrucke p zu übersehen, trage man in Fig. 39a den Werth $x = \frac{p}{p_1}$ als Abscisse und die nach Gl. (22a) berechnete Ausflussmenge G als Ordinate auf, man erhält dann die Curve oab; wäre nun der Mündungsdruck p wirklich mit dem äussern Drucke p_2 identisch, so würde für die Abnahme des Druckverhältnisses $p_2 : p_1$ vom Werthe 1 bis x_m hin eine Zunahme der Ausflussmenge nach der Curvenstrecke ba ganz den Erwartungen entsprechend sich ergeben; sobald aber das Druckverhältniss kleiner als x_m angenommen wird, würde eine Abnahme von G nach dem Curvenzweige ao eintreten. Es haben nun, weil eine solche Abnahme in Wirklichkeit nicht vorliegen kann, zuerst de Saint-Venant und Wantzel (a. a. O.) die Hypothese aufgestellt, dass für das betreffende Intervall der Curvenzweig ao durch eine horizontale Linie (ac) Fig. 39b zu ersetzen sei; so lange demnach das Druckverhältniss $p_2 : p_1$ zwischen 0 und dem durch Gl. (24) gegebenen Werthe x_m liege, ströme immer dieselbe und zwar durch Gl. (27) gegebene Luftmenge aus, in diesem Falle wäre dann der Mündungsdruck p verschieden vom äussern Drucke p_2 und zwar grösser und durch Gl. (24) zu bestimmen; die ausströmende Luftmenge erscheint dann innerhalb der angegebenen Grenzen unabhängig vom äussern Drucke.

Fig. 39.



Die Rechnungsregel wäre daher folgende: Gegeben ist der innere Druck p_1, der äussere Druck p_2 und der Ausflussexponent n.

Ist nun

$$\frac{p_2}{p_1} > \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{29}$$

so ergiebt sich die Ausflussmenge (Gl. 22a)

$$G v_1 = \alpha F \sqrt{2 g \frac{c_p T_1}{A}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_4}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]},$$

weil nach der angegebenen Hypothese hier der Mündungsdruck p mit dem äussern Drucke identisch ist.

Findet sich dagegen:

$$\frac{p_2}{p_1} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{30}$$

so ist der Mündungsdruck

$$p = p_1 \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

und die Ausflussmenge nach Gl. (27) zu berechnen. Findet der Ausfluss ohne Contraction, also durch ein Ansatzrohr oder durch eine gut abgerundete Mündung statt, so ist in der Formel für G noch $\alpha = 1$ zu substituiren.

De Saint-Venant und Wantzel setzen statt des Ausflussexponenten n den Werth $\varkappa$ ein, vernachlässigen also bei der vorliegenden Frage die Widerstände in der Mündung; für die Annahme $n = \varkappa = 1{,}410$ giebt Gl. (24) den Druck in der Mündung $p = 0{,}5266\, p_1$ und dieser Druck müsste vorliegen, sobald der äussere Druck p_2 kleiner als der eben berechnete Druck p ist; unter dieser Voraussetzung bestimmt sich aus Gl. (27) die Ausflussmenge für $\alpha = 1$:

$$\frac{G v_1}{F} = 11{,}6318 \sqrt{T_1},$$

oder, wenn man die Temperatur im Ausflussgefässe zu 0° C. annimmt, so ergiebt sich das Luftvolumen in der Secunde auf ein Quadratmeter Mündungsfläche, was die linke Seite vorstehender Gleichung darstellt, zu 192,18 cbm.

In den Fällen, wo der Mündungsdruck grösser als der äussere Druck ist, wird, da sich der Strahl ausserhalb der Mün-

dung ausbreitet, eine Stelle vorliegen, wo der Druck auf den äussern Druck p_2 herabgegangen ist; bezeichnet man diesen Strahlquerschnitt als »Ausflussquerschnitt« gegenüber dem »Mündungsquerschnitt F«, so könnte man nach den Darlegungen von Rankine*) auch sagen, dass beide Querschnitte identisch sind, sobald die Relation (29) vorliegt; von eigentlicher Contraction abgesehen ($\alpha = 1$ gesetzt), wäre daher die Ausflussmenge

$$G v_1 = F \sqrt{2 g \frac{c_p T_1}{A} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]} . \qquad (31)$$

Würde dagegen die Relation (30) vorliegen, so wäre in vorstehender Formel als Ausflussquerschnitt F_a an Stelle von F der Werth

$$F_a = F \sqrt{\frac{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}}} \qquad (32)$$

zu substituiren.

Beispiel. Aus einem weiten Gefässe, in welchem die Luft auf 4 Atmosphären comprimirt worden ist und die Temperatur von 15° C. hat, ströme dieselbe unter constantem Drucke in die freie Atmosphäre durch eine Mündung aus, für welche der Ausflussexponent $n = 1{,}380$ angenommen werden soll.

Nach der Zustandsgleichung ist das specifische Volumen der Luft im Innern $v_1 = 0{,}2039$.

Nun findet sich zunächst nach Gl. (24) der Druck in der Mündungsebene

$$p = 0{,}5317 . p_1 = 2{,}1267 \text{ Atmosphären },$$

also bedeutend grösser, als der äussere Druck $p_2 = 1$ Atmosphäre.

Nach Gln. (25) und (26) findet sich für die Mündungsebene

$$\frac{v}{v_1} = 1{,}5805 , \quad \frac{T}{T_1} = 0{,}8403 , \quad \text{woraus } T = 242° .$$

In der Mündung ist demnach die Temperatur — 31° Celsius.

Die Ausflussgeschwindigkeit folgt nach Gl. (21a)

$$w = 313{,}90 \text{ Meter}$$

und die Ausflussmenge in der Secunde nach Gl. (27)

$$G v_1 = 198{,}68 . F \text{ cbm}$$

oder

$$G = 974{,}40 . F \text{ kg.}$$

*) Macquorn Rankine, Engineer 1869; deutsch im Civilingenieur, Bd. 16. 1870. S. 35 »Ueber den Ausfluss des Dampfes«.

Der Ausflussquerschnitt ist nach Gl. (32)

$$F_a = 3{,}875 \,.\, F \,.$$

Erst nach der Ausbreitung des Strahles auf diesen Querschnitt liegt die atmosphärische Pressung vor.

Wie weit nun die Hypothese von de Saint-Venant und Wantzel, auf welche die vorstehenden Rechnungen sich stützen, durch Versuche ihre Bestätigung findet, ist eine Frage, auf die noch zurückzukommen sein wird.

§ 45. Ausfluss unter constantem Druck bei kleinen Druckdifferenzen.

Ist der Druck p_1 im Ausflussgefässe nur wenig grösser, als der äussere Druck p_2, der sich dann mit dem Drucke p in der Mündungsebene identisch annehmen lässt, so ergiebt sich nach Gl. (21) die Strömungsenergie in der Mündung

$$H = \frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] .$$

Nun ist aber für geringe Druckdifferenzen $p_1 - p_2$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right) .$$

Die Substitution in die vorhergehende Gleichung ergiebt daher die Ausströmungsgeschwindigkeit

$$w = \sqrt{2g \frac{\varkappa (n-1)}{n(\varkappa - 1)} v_1 (p_1 - p_2)} \,. \tag{33}$$

Führt man hier noch den Widerstandscoefficienten ζ nach Gl. (20) ein, aus welcher sich

$$1 + \zeta = \frac{n(\varkappa - 1)}{\varkappa (n-1)}$$

ergiebt, so folgt auch

$$w = \sqrt{2g \cdot \frac{v_1 (p_1 - p_2)}{1 + \zeta}} \,, \tag{33a}$$

und diese Formel stimmt vollständig mit derjenigen überein, welche in der praktischen Hydraulik für den Ausfluss tropfbar-

flüssiger Körper (Wasser) abgeleitet und benutzt wird. Dieselbe Formel findet sich direct auch aus Gl. (IIIb), wenn man dort die Widerstandsarbeit $W = \zeta H$ substituirt und die Gleichung unter der Voraussetzung integrirt, dass das specifische Volumen der Luft während des Hinströmens nach der Mündung constant, also $v = v_1$ gesetzt werden dürfe. Unter dieser Voraussetzung und unter Vernachlässigung der Widerstandsarbeit ist die Gl. (33a) aus Gl. (IIIb) schon von Daniel und Johann Bernoulli, Euler, d'Alembert gegeben und dann bei Untersuchungen der technischen Mechanik von Poncelet verwerthet worden. In ausgedehntem Maasse hat aber Weisbach in seiner Ingenieur- und Maschinenmechanik von Gl. (33a) genau in der hier gegebenen Form zuerst Gebrauch gemacht. Die Gleichung ist auch in der That von hoher technischer Bedeutung, da bei Gebläsen, Ventilatoren, bei der Bewegung der atmosphärischen Luft und des Leuchtgases in Röhrenleitungen u. s. w. jederzeit nur geringe Druckdifferenzen vorliegen. Bei allen hierher gehörigen Untersuchungen kann man dann auch, wie es von Weisbach vorgeschlagen worden ist, bei Berücksichtigung der verschiedenen Arten von Widerständen, wie z. B. bei Krümmungen, Knieen, plötzlichen Erweiterungen in Röhrenleitungen dieselben Widerstandscoefficienten verwenden, die bei der Bewegung des Wassers unter den gleichen Verhältnissen zu benutzen sind. Was nun die Luftmenge G betrifft, so findet sich dieselbe aus der Beziehung $Gv = Fw$ unter Benutzung von Gl. (33a)

$$G = F\sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\frac{v_1}{v}\frac{(p_1-p_2)}{v}}. \tag{34}$$

Da nun v nahezu mit v_1 identisch ist und ebenso die Temperatur in der Mündungsebene mit der im Ausflussgefässe fast übereinstimmen wird, also die Beziehung $p_2 v = BT_1$ angenommen werden kann, so bestimmt sich die Ausflussmenge näherungsweise:

$$G = F\sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\frac{p_2(p_1-p_2)}{BT_1}}, \tag{34a}$$

eine Gleichung, welche der Form nach mit derjenigen übereinstimmt, welche Napier, auf dessen Untersuchungen zurückzukommen sein wird, für den Ausfluss von Dampf bei geringem Ueberdruck angegeben hat. Die Annahme, dass das specifische

Volumen constant sei, setzt im Grunde eine Wärmeentziehung voraus. Aus Gl. (Ib) S. 219 folgt nämlich ohne Weiteres durch Integration für $v = v_1$

$$Q = AH - \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1} v_1 (p_1 - p),$$

und wenn man die Strömungsenergie

$$H = \frac{w^2}{2g}$$

aus Gl. (33) ermittelt und substituirt, so ergiebt sich die Wärmemenge Q, welche der Gewichtseinheit Luft beim Hinströmen nach der Mündung entzogen werden müsste,

$$Q = -\frac{A\varkappa}{n(\varkappa - 1)} v_1 (p_1 - p).$$

Neben der für geringe Druckdifferenzen gültigen Gleichung (33a) findet sich in mechanischen und physikalischen Schriften noch eine andere Ausflussformel angegeben, die zuerst von Navier entwickelt wurde und die gewöhnlich als für höhere Druckdifferenzen gültig bezeichnet wird.

Setzt man voraus, dass die Temperatur T des Gases in der Mündung mit der im Ausflussgefässe (T_1) identisch genommen werden könne, so folgt $pv = p_1 v_1$ und hiernach aus Gl. (IIIb), wenn man die Widerstandsarbeit W wieder durch ζH ersetzt,

$$w = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} p_1 v_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p}} \tag{35}$$

und die Ausflussmenge, ohne Rücksicht auf Contraction,

$$G = \frac{Fw}{v} = F \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} \cdot \frac{p_1}{v_1} \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p}}, \tag{36}$$

welche Gleichungen sich mit Rücksicht auf die Beziehung $pv = p_1 v_1 = BT_1$ in verschiedene andre Formen bringen lassen. Gl. (35) findet sich, wie erwähnt, in allen Handbüchern der Physik und doch ist sie Annahmen entsprungen, die aus mehrfachen Gründen als durchaus unzulässig betrachtet werden müssen.

Nimmt man zunächst an, der äussere Druck p_2 erstrecke sich bis in die Ebene der Mündung und bezeichnet man das Ver-

hältniss $p : p_1$ mit x, so zeigt sich nach Gl. (36), dass bei einem bestimmten innern Drucke p_1 ein Werth von x existirt, bei welchem die Ausflussmenge G ein Maximum wird; derselbe tritt bei dem Maximalwerthe des Ausdruckes

$$x^2 \operatorname{logn} \frac{1}{x}$$

ein und findet sich für

$$\operatorname{logn} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

oder für

$$\frac{p_2}{p_1} = 0{,}6065 \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = 1{,}6487 \; .$$

Wenn demnach der innere Druck mehr als ohngefähr 1,65 vom äussern beträgt, so wird die Formel (36) schon unbrauchbar und man müsste zu der gleichen oder einer ähnlichen Hypothese greifen, wie sie oben besprochen worden ist. Obgleich der vorstehende Hinweis schon von Coriolis*) (1838) gemacht worden ist, so hat man die Formel von Navier doch gerade für höhere Pressungsdifferenzen als geeignet hingestellt. Weiter ist hervorzuheben, dass unter der gemachten Voraussetzung $pv = p_1 v_1$ die Gleichung (Ib)

$$Q = AH$$

ergiebt; damit also die Voraussetzung erfüllt werde, müsste der Gewichtseinheit Gas beim Hinströmen nach der Mündung eine Wärmemenge zugeführt werden, welche der vollen Strömungsenergie in der Mündungsebene entspricht, ein Fall, der beim gewöhnlichen Ausfluss niemals vorliegt.

§ 46. Ausfluss bei abnehmendem Druck und starkem Ueberdruck.

In einem Gefässe vom Volumen V befinde sich comprimirte atmosphärische Luft vom Drucke p_1 und der Temperatur T_1; sie ströme durch eine Mündung vom Querschnitte F nach einem Raume, in welchem der Druck p_2 und constant sei; während des

*) Comptes rendus 1838, VI, p. 239, sowie 1839, VIII, p. 295.

Ausströmens sinkt der Druck im Innern allmählich und sei zur Zeit t mit p_x bezeichnet; wird nun vorausgesetzt, dass selbst am Ende des Ausströmens immer noch die Beziehung (30), also

$$\frac{p_2}{p_x} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

herrscht, wobei n der Ausflussexponent der betreffenden Mündung ist, so ergiebt sich, wenn

$$\psi = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}} \tag{37}$$

gesetzt wird, welche Grösse ψ als constant anzusehen ist, die Ausflussmenge in der unendlich kleinen Zeit dt nach Gl. (27 a) S. 232.

$$dG = \alpha\psi F dt \sqrt{\frac{p_x}{v_x}}.$$

Andrerseits ist aber, wenn zur Zeit t im Gefäss noch die Luftmenge G_x zurückgeblieben ist, nach Gl. (23) S. 170

$$\frac{G_x}{G_1} = \frac{v_1}{v_x},$$

daher die in der Zeit t ausgeströmte Luftmenge:

$$G = G_1 - G_x = G_1\left(1 - \frac{v_1}{v_x}\right),$$

und wenn man diese Gleichung differentiirt und beachtet, dass $G_1 v_1$ nichts anderes als das gegebene Gefässvolumen V repräsentirt:

$$dG = V\frac{dv_x}{v_x^2}.$$

Durch Gleichsetzen mit dem vorher gewonnenen Ausdruck für dG folgt daher:

$$\alpha\psi F dt\sqrt{\frac{p_x}{v_x}} = V\frac{dv_x}{v_x^2}.$$

Setzt man nun voraus, was insbesondere für kurze Ausflusszeiten unzweifelhaft gestattet ist, die im Ausflussgefässe zurückgebliebene Luftmenge habe sich während des Ausströmens polytropisch d. h. nach dem Gesetze $p_x v_x^r = p_1 v_1^r$ ausgedehnt, wobei r eine con-

stante Grösse ist, und bestimmt man hieraus v_x und $d v_x$ und substituirt man die Werthe in vorstehende Differentialgleichung, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{\alpha \psi F r \sqrt{B T_1}}{V} d t = -\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{-\left(\frac{3 r-1}{2 r}\right)} d\left(\frac{p_x}{p_1}\right), \tag{38a}$$

und hieraus durch Integration, wenn p_1 der Anfangsdruck und p_x der Druck im Ausflussgefässe am Ende der Zeit t, also im Augenblicke des Schliessens der Mündung ist:

$$\frac{2 V}{r-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_x}\right)^{\frac{r-1}{2 r}}-1\right]=\alpha \psi F \sqrt{B T_1} \,.\, t, \tag{38}$$

Diese Gleichung giebt das Gesetz an, nach welchem der Druck p_x im Ausflussgefässe mit der Zeit t sich ändert.

Denkt man an Ausfluss in die freie Atmosphäre und ist T_1 die Anfangstemperatur im Innern, sowohl wie ausserhalb, so findet sich die Temperatur T_x im Innern im Augenblicke des Schliessens der Mündung bei polytropischer Expansion aus der Gleichung:

$$\frac{T_x}{T_1}=\left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Wartet man nun nach dem Schliessen der Mündung die Temperaturausgleichung ab und stellt sich am Ende der stationäre Manometerstand p_3 ein, so folgt, weil die Erwärmung der Luft im Gefässe bei constantem Volumen stattfindet, auch

$$\frac{T_x}{T_1}=\frac{p_x}{p_3}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{p_1}{p_x}\right)^{\frac{r-1}{2 r}}=\sqrt{\dfrac{p_3}{p_x}} \\ \text{und} \\ \dfrac{r-1}{2}=\dfrac{\operatorname{logn} \sqrt{\dfrac{p_3}{p_x}}}{\operatorname{logn} \dfrac{p_1}{p_3}}. \end{array}\right\} \tag{39}$$

Beide Werthe könnten in Gl. (38) substituirt werden, dieselben lassen sich aber vorher noch vereinfachen. Nimmt man kurze Ausflusszeit an, so ist p_3 nur wenig grösser als p_x und daher näherungsweise

$$\sqrt{\frac{p_3}{p_x}} = \left(1 + \frac{p_3 - p_x}{p_x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{p_3 - p_x}{2\,p_x}$$

und

$$\operatorname{logn} \sqrt{\frac{p_3}{p_x}} = \frac{1}{2} \operatorname{logn}\left(1 + \frac{p_3 - p_x}{p_x}\right) = \frac{p_3 - p_x}{2\,p_x} .$$

Die beiden Gln. (39) geben daher

$$\left(\frac{p_1}{p_x}\right)^{\frac{r-1}{2r}} - 1 = \frac{p_3 - p_x}{2\,p_x} ,$$

sowie

$$\frac{2}{r-1} = \frac{2\,p_x}{p_3 - p_x} \cdot \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} ,$$

und nun folgt endlich aus Gl. (38) die einfache Beziehung:

$$\alpha \psi F \sqrt{B\,T_1} \,.\, t = V (\operatorname{logn} p_1 - \operatorname{logn} p_3) \,. \qquad (40)$$

Diese Gleichung giebt das Mittel an die Hand, auf experimentellem Wege den Werth $\alpha \psi$ zu bestimmen, denn alle übrigen in der Formel vorkommenden Grössen lassen sich mit grosser Genauigkeit ermitteln. Interessant ist es, dass die Gleichung gerade diejenigen Grössen p_x und r nicht mehr enthält, deren experimentelle Bestimmung mit Schwierigkeiten und gewissen Unsicherheiten verbunden ist. Man hat also nur die Luft eine kurze Zeit t lang ausströmen zu lassen und den Anfangsdruck p_1 sowie den Druck p_3 nach dem Schliessen der Mündung, nachdem die Temperaturausgleichung stattgefunden hat, zu beobachten.

Liegt eine Mündung vor, bei welcher Contraction nicht stattfindet, so ist $\alpha = 1$; Gl. (40) ergiebt dann die Grösse ψ, aus der sich weiter nach Gl. (37) der Ausflussexponent n der betreffenden Mündung ermitteln lässt. Die Gleichung (40) ist unter der Voraussetzung entwickelt worden, dass in der Mündungsebene der Minimaldruck

$$p_m = p_1 \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \qquad (41)$$

vorliege, der äussere Druck p_2 also kleiner, als der vorstehende Werth von p ist, und dass fernerhin die Hypothese von de Saint-Venant und Wantzel gültig sei. Ist die letztere Bedingung erfüllt, dann müsste die Grösse ψ für ein und dasselbe Ausflussgefäss V und eine und dieselbe Mündung F experimentell immer denselben Werth haben, welcher Anfangsdruck p_1 und welcher Ausgleichungsdruck p_3 bei kleiner Ausflusszeit t auch vorgelegen haben mag. Meine Versuche, deren Ergebnisse unten vorgeführt werden sollen, bestätigen den Satz mit hinreichender Genauigkeit. Zum Zwecke der angedeuteten Rechnungen ist für verschiedene Werthe des Ausflussexponenten n die folgende Hülfstabelle berechnet worden.

n	$\frac{p_m}{p_1}$ Gl. (41)	ψ Gl. (37)	n	$\frac{p_m}{p_1}$	ψ
1.25	0.5549	1.7094	1.33	0.5404	1.9461
1.26	0.5531	1.7412	1.34	0.5386	1.9731
1.27	0.5512	1.7723	1.35	0.5367	1.9997
1.28	0.5494	1.8028	1.36	0.5351	2.0258
1.29	0.5475	1.8326	1.37	0.5334	2.0514
1.30	0.5457	1.8618	1.38	0.5317	2.0766
1.31	0.5439	1.8904	1.39	0.5300	2.1015
1.32	0.5421	1.9185	1.40	0.5283	2.1259
			$\varkappa = 1{,}41$	0.5266	2.1499

Aus der Tabelle erkennt man, dass für die verschiedenen Werthe von n der Minimaldruck p_m in der Mündungsebene im Allgemeinen etwas grösser als die Hälfte des innern Druckes p_1 ist; da nun der äussere Druck p_2 kleiner als der Minimaldruck p_m angenommen worden ist, so liegt der behandelte Fall jederzeit sicher vor, so lange der innere Druck mehr als das Doppelte des äusseren beträgt. Lässt man daher atmosphärische Luft in die freie Atmosphäre strömen, so muss der Druck im Ausflussgefässe selbst am Ende des Ausströmens noch mehr als zwei Atmosphären betragen; ist der Druck im Innern schon vom Anfang an geringer, so gelten die entwickelten Sätze nicht mehr, in diesem Falle sind zur Berechnung der Ausflussmenge andere Formeln in Anwendung zu bringen.

§ 47. Ausfluss bei abnehmendem Druck und geringem Ueberdruck.

Ist der nach Gl. (41) berechnete Ueberdruck p_m kleiner als der äussere Druck p_2, so stellt sich nach der Hypothese von de Saint-Venant und Wantzel in der Mündungsebene der äussere Druck p_2 ein und würde hierbei, wenn der Gefässdruck p_1 constant erhalten würde, die Ausflussmenge G nach Gl. (31) zu berechnen sein. Ist nun wieder V das Gefässvolumen, F der Mündungsquerschnitt und während des Ausströmens in der Zeit t der Druck im Gefässe von p_1 auf p_x gesunken, so ist die Ausflussmenge in der Zeit dt

$$dG = \alpha F dt \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_x}{v_x} \left[\left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]} .$$

Andererseits ist die Luftmenge, welche in der Zeit t das Gefäss verlassen hat, nach Gl. (23) S. 170

$$G = G_1 \left(1 - \frac{v_1}{v_x}\right),$$

wobei G_1 das Luftgewicht im Gefässe im Anfange der Beobachtung ist; hieraus folgt

$$dG = - G_1 d\left(\frac{v_1}{v_x}\right)$$

und daher durch Gleichsetzen:

$$\alpha F dt \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_x}{v_x} \left[\left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right]} = - G_1 d\left(\frac{v_1}{v_x}\right). \quad (42)$$

Geht man nun wieder von der durchaus zulässigen Annahme aus, dass die am Ende der Zeit t im Gefässe zurückgebliebene Luftmenge während des Ausströmens polytropisch, also nach dem Gesetze $p_x v_x^r = p_1 v_1^r$ expandirte, wobei der Exponent r constant und als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich in vorstehender Gleichung

$$\frac{v_1}{v_x} = \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{und} \quad \frac{p_x}{v_x} = \frac{p_1}{v_1} \left(\frac{p_x}{p_1}\right)^{\frac{r+1}{r}} \quad (43)$$

substituiren und es ergiebt sich eine Formel, durch deren Integration die Beziehung zwischen dem veränderlichem Drucke p_x und der Zeit t bestimmt ist und aus der man den Druck p_x am Ende der Zeit t berechnen könnte. Würde man diesen Druck experimentell ermitteln, so liesse sich dann umgekehrt aus der betreffenden Integralformel eine andere Grösse z. B. der Ausflussexponent n ermitteln. Die Integration der betreffenden Gleichung kann aber nur auf dem Näherungswege ausgeführt werden und führt selbst in diesem Falle auf sehr verwickelte Rechnungen*).

Zum Zweck der Beurtheilung der Resultate von Versuchen mit kurzer Ausflusszeit kann man von den angedeuteten umständlichen Entwickelungen absehen; setzt man nämlich in Gl. (42)

$$\sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left[\left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{p_2}{p_x}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]}=\psi, \qquad (44)$$

so findet sich für die gewöhnlichen Werthe des Ausflussexponenten n bei abnehmendem Werthe von p_x ein so langsames Abnehmen von ψ, dass man für kurze Ausflusszeiten ganz wohl für den variabeln Druck p_x das arithmetische Mittel aus dem Anfangsdrucke p_1 und dem Enddrucke p_x (im Augenblicke des

*) Gl. (42) des Textes ist zuerst, wenn auch unter etwas anderer Darstellung von Weisbach a. a. O. (vergl. Citat S. 224) gegeben und integrirt worden. Derselbe setzt aber statt des Ausflussexponenten n den Werth $\varkappa$ ein und corrigirt dann die linke Seite der Gleichung durch Einführung eines Factors φ; die Bestimmung des Werthes $\alpha\varphi = \mu$ bildete dann an der Hand seiner Versuchsresultate das Ziel seiner Untersuchungen. Weiterhin machte dann aber Weisbach bei Benutzung der Gln. (43) auch noch die Annahme $r = \varkappa$, setzte also voraus, dass die im Ausflussgefässe zurückgebliebene Luft adiabatisch expandirte, während doch aus den betreffenden Versuchen selbst schon leicht der Nachweis geführt werden kann, dass auch beim Weisbach'schen Versuchsapparate der Werth r sich beträchtlich kleiner als $\varkappa$ herausstellt. Die genannte fehlerhafte Annahme wird in den Weisbach'schen Rechnungen allerdings durch gewisse Nebensubstitutionen gemildert. Die Weisbach'schen Versuche sind von Grashof a. a. O. (vergl. Citat S. 225) zum Theil einer Neuberechnung unterworfen worden, bei welcher für r der richtige Werth substituirt wird; im Uebrigen glaubt aber Grashof an der ältern Annahme der Einführung des Geschwindigkeitscoefficienten φ an Stelle des Ausflussexponenten n festhalten zu müssen.

Schliessens der Mündung) in den vorstehenden Ausdruck substituiren kann und demnach für den einzelnen Versuch die Grösse

$$\psi = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left[\left(\frac{2p_2}{p_1+p_x}\right)^{\frac{2}{n}}-\left(\frac{2p_2}{p_1+p_x}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \qquad (44\,a)$$

als eine constante Grösse ansehen darf. In diesem Falle müsste dann die Beziehung (40) durch Versuche ebenfalls Bestätigung finden und auf solchem Wege indirect der Nachweis erbracht werden können, dass die allgemeine Ausflussformel Gl. (22a) und der Satz von de Saint-Venant und Wantzel über den Mündungsdruck auch bei geringem Ueberdrucke, bei welchem der äussere Druck mit dem Mündungsdrucke identisch wird, gültig ist.

§ 48. Versuche über den Ausfluss der Luft durch einfache Mündungen.

Die ältern Versuche von Schmidt, Lagerhjelm, Koch und d'Aubuisson (aus den Jahren 1820 bis 1826), die bereits auf S. 225 Erwähnung fanden, sind sämmtlich bei sehr geringem Ueberdrucke und zwar in der Art ausgeführt worden, dass das mit Luft gefüllte Ausflussgefäss mit einem Wassergefässe in Verbindung stand, aus welch' letzterem das Wasser mit gewissem Ueberdrucke in das erstere eingeführt wurde. Das Volumen des eingetretenen Wassers giebt hierbei das (bei innerm Drucke gemessene) Volumen Luft, welches in der gleichen Zeit verdrängt wurde und durch die Mündung zum Ausfluss gelangte. Alle diese Versuche, die, wie erwähnt, bei sehr geringem Ueberdrucke, meist auch mit sehr kleinen Mündungsdurchmessern, überhaupt in kleinem Maassstabe ausgeführt wurden*), liefern, wie später auch Buff**) unter gleichzeitiger Benutzung eigener Versuche zeigte, den Nachweis, dass für Luftausfluss dieselben Formeln unter Be-

*) Ueber die ältern Luftausflussversuche berichtet, zugleich unter ausführlichen Literaturangaben Weisbach in Hülsse's »Allgemeine Maschinen-Encyclopädie« Artikel »Ausfluss« S. 603.

**) Buff, Versuche über den Widerstand ausströmender Luft. Poggendorff's Annalen, Bd. 40. 1837. S. 14.

nutzung derselben Ausflusscoefficienten wie für Wasserausfluss in Anwendung gebracht werden können. Auf grössern Ueberdruck können die betreffenden Sätze aber nicht ohne Weiteres übertragen werden, insbesondere geben diese Versuche keinerlei Aufschluss über die oben behandelte Frage nach dem Mündungsdruck.

Die ersten Versuche in grösserm Maassstabe und bei grösserm Ueberdruck rühren, wie schon oben mehrfach erwähnt wurde, (S. 224) von Weisbach her; so überaus werthvoll die betreffenden Versuchsresultate im Allgemeinen nun auch sind, so sind die Versuche doch nicht geeignet, die Frage über den Mündungsdruck zu entscheiden, weil Weisbach zu geringe Pressungen im Ausflussgefässe anwandte; nur bei wenigen seiner Versuche betrug der Anfangsdruck der Luft im Kessel etwas über 2 Atmosphären, war also höchstens das Doppelte des äussern Druckes. Weit grösser als zwei war allerdings das Verhältniss des Druckes im Ausflussgefässe gegenüber dem in der Vorlage bei den Versuchen von de Saint-Venant und Wantzel; dieselben liessen durch Mündungen von nur $^2/_3$, 1 und $1^1/_2$ mm Durchmesser Luft in den Recipienten einer Luftpumpe einströmen, dessen Cubikinhalt 0,0174 cbm war und in welchem der Druck im Anfange der verschiedenen Versuchsreihen gewöhnlich 10 bis 20 mm Quecksilbersäule betrug. Sie wandten zwei Methoden an, das eine Mal liessen sie die äussere Luft so lange ohne Unterbrechung einströmen, bis der Druck im Recipienten gleich dem äussern war und beobachteten in gleichen Zeitintervallen (von 5 zu 5 Secunden) die Druckzunahme, bei der zweiten Methode, die allein zum Ziele hätte führen können, liessen sie die Luft mit Unterbrechungen einströmen; nach Verfluss von je 5 Secunden wurde während einiger Secunden die Mündung mit dem Finger geschlossen und rasch der Druck notirt. Das Fehlerhafte dieser Methode liegt aber darin, dass die Experimentatoren nicht lange genug die Mündung geschlossen gehalten haben und nach dem Schluss der Mündung nicht abwarteten, bis der (abnehmende) Manometerstand am Recipienten stationär geworden war. Rechnet man hierzu den Umstand, den schon Poncelet rügte, dass die Durchmesser der angewandten Mündungen und der Inhalt des Recipienten viel zu klein waren, so musste es gerechtfertigt erscheinen, neue Ver-

suche in grösserm Maassstabe, bei hohem Kesseldruck und unter zuverlässigeren Versuchsmethoden anzustellen.*)

Derartige Versuche habe ich 1871 (vergl. Citat S. 184) in Zürich ausgeführt. Der Versuchapparat bestand aus einem cylindrischen Kessel aus Eisenblech von 4,2 m Länge und 0,5 m Durchmesser, dessen Cubikinhalt durch mit grösster Sorgfalt ausgeführte Aichungen mit Wasser sich zu 0,81088 cbm ergab. Der Kessel, auf 10 Atmosphären geprüft, war mit einer Pumpe versehen, mittelst welcher äussere atmosphärische Luft comprimirt und in den Kessel gedrückt wurde; die Bewegung des Pumpenkolbens geschah mittelst Kurbel mit Handbetrieb, so dass allerdings die Füllung des Kessels mit Luft von in der Regel 4 Atmosphären Druck längere Zeit in Anpruch nahm.

Der Kessel trug einen Aufsatz**) (Dom) mit weiten Hälsen, die bis auf einen, der bei den Ausflussversuchen benutzt wurde, geschlossen waren; dieser eine Hals war mit einem dicht abschliessenden Hahne versehen, dessen Durchbohrung mit der innern Weite des Halses übereinstimmte; in die Ebene des offenen Endes des letzteren wurden die verschiedenen Mündungen eingesetzt. Mit dem Innern des Kessels stand ein gut getheiltes offenes Quecksilber-Manometer (Gefässmanometer) in Verbindung, an welchem Pressungen bis zu 4 Atmosphären (3 Atmosphären Ueberdruck) abgelesen werden konnten. Die Versuche wurden mit drei Arten von Mündungen angestellt und zwar

1) mit kurzen, nach Innen gut abgerundeten Mündungen (Fig. 40a) a. f. S., deren Durchmesser bez. 4,10 und 6,98 mm betrugen;

2) mit kurzen, cylindrischen Ansatzröhren, ohne Abrundung

*) Auf die Einwendungen Poncelet's (Comptes rendus 1845. t. 21. p. 195) erwidern de Saint-Venant und Wantzel in dem gleichen Bande p. 366, worauf dann Poncelet ebendaselbst p. 387 ziemlich heftig entgegnet, die Versuche, als »so zu sagen mikroskopisch« bezeichnet und das Gesetz von der Constanz der Ausflussmenge bei einem äussern Drucke, der kleiner als ohngefähr die Hälfte des innern ist, (wenn man seinen Ausdruck im ironischen Sinne nimmt) als seltsam und wunderlich hinstellt. In letzterer Beziehung hat, wie meine im Text folgenden Versuche zeigen, Poncelet den genannten Experimentatoren entschieden Unrecht gethan.

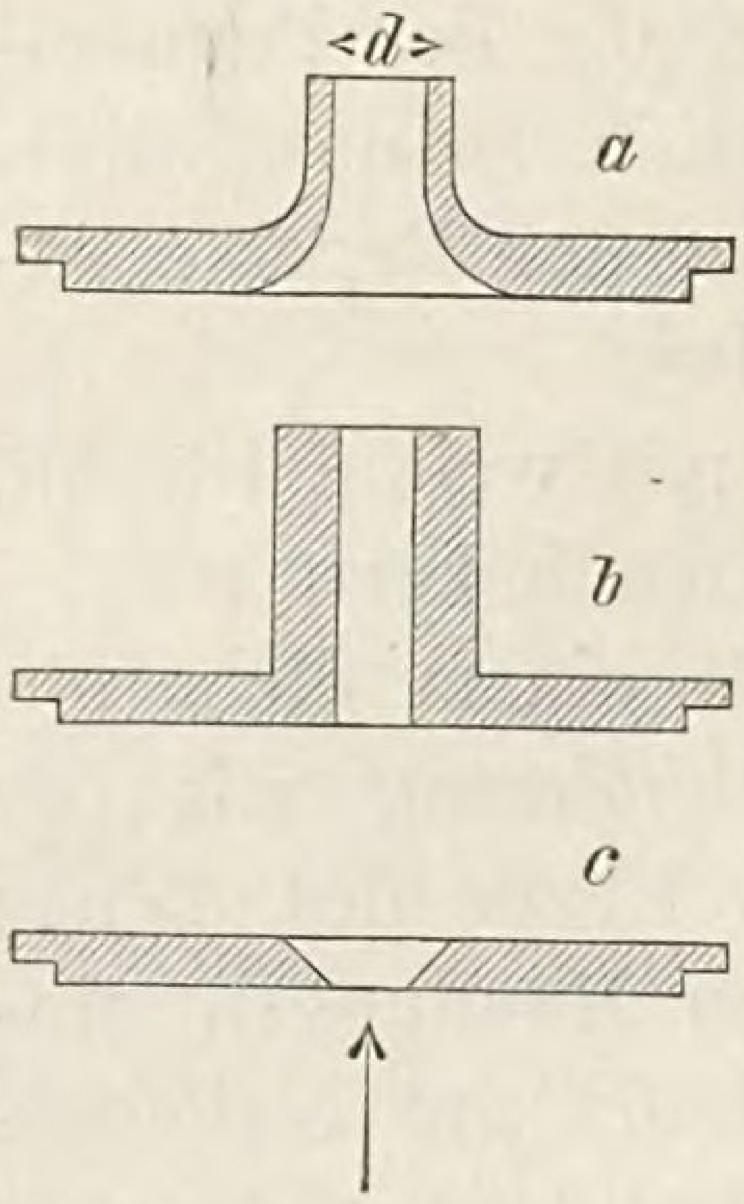
**) Der im Text erwähnte Kesselaufsatz findet sich abgebildet im Civilingenieur (1874) Bd. 20. Taf. 1.

im Innern (Fig. 40 b), mit Durchmessern von bez. 5,74 und 6,98 mm, und

3) mit Mündungen in dünner Wand (Fig. 40 c) deren Durchmesser bez. 4,07; 5,74; 6,98 und 9,99 mm betrugen.

Nachdem der Kessel mit Luft von ohngefähr 4 Atmosphären Druck gefüllt und die Temperaturausgleichung mit der äussern Atmosphäre erfolgt war, das Manometer sich also stationär zeigte, wurde der Hahn (mit ein Viertel Drehung) rasch geöffnet, nach ohngefähr 10 Secunden rasch wieder geschlossen und der Manometerstand notirt und zwar der Druck p_1 vor der Eröffnung, p_x unmittelbar nach dem Abschlusse, p_y sofort darauf (nach dem Sprunge, vergl. die Bemerkungen auf S. 183) und endlich p_3, sobald nach dem Schliessen der Mündung der Manometerstand (in Folge der eingetretenen Temperaturausgleichung) wieder stationär sich zeigte, was gewöhnlich nach Verlauf von 10 bis 15 Minuten der Fall war. Nun wurde der Versuch mit dem Drucke p_3 als neuer Anfangsdruck p_1 wiederholt und zwar so oft, bis der Kesseldruck nahezu auf den äussern Atmosphärendruck herabgegangen war. So ergab sich mit einer Kesselfüllung und für ein und dieselbe Mündung eine ganze Reihe von einzelnen Versuchen, deren Anzahl natürlich um so grösser war, je kleiner der Durchmesser der angewandten Mündung war.

Fig. 40.



Von Wichtigkeit bei dieser Versuchsmethode, Ausfluss in Intervallen mit kurzer Ausflusszeit, ist eine möglichst genaue Bestimmung dieser Ausflussdauer. Es wurde hierzu eine Secundenuhr benutzt, welche Fünftel-Secunden schlug und bei welcher der fortlaufende Zeiger auf dem Zifferblatte unmittelbar unter der Secundentheilung einen farbigen Punkt notirte, sobald ein Knopf am Gehäuse der Uhr niedergedrückt wurde. Das Niederdrücken dieses Knopfes geschah durch einen Elektromagneten; am Hahn des Ausflussrohres befand sich nämlich ein Metallzeiger befestigt, der bei mittlerer Stellung des Hahnes ein wenig in Quecksilber eintauchte, das sich seitwärts des Hahnes in einem Gefässe befand; das Eintauchen beim Drehen des Hahnes bewirkte den

Schluss eines elektrischen Stromes und das Wirksamwerden des Magneten; auf solche Weise entstand sowohl im Moment des Eröffnens, wie des Schliessens des Hahnes ein Punkt auf dem Zifferblatte der Uhr, aus dessen Stellung gegenüber der Secundentheilung mit grosser Bequemlichkeit die Zeitdauer des Ausströmens erkannt werden konnte. Die Versuchsresultate ergaben auch, dass diese Art der Bestimmung der Ausflussdauer bis auf 0,2 Secunden vollständige Sicherheit und Genauigkeit bot; etwaige Unsicherheiten werden gedeckt durch die grosse Zahl der einzelnen Versuche, aus denen sich sichere Mittelwerthe der zu bestimmenden Grössen schliesslich ermitteln lassen.

Die Versuche selbst zerstreuten auch mein anfängliches Bedenken, dass bei der angewendeten kurzen Ausflussdauer die Zeitdauer bis zum Eintritt des Beharrungszustandes des Ausströmens verhältnissmässig zu gross sein könnte; ich überzeugte mich, dass diese letztere Zeitdauer bei der Grösse des Kessels und den angewendeten Mündungsquerschnitten, fast verschwindend klein sein müsse und schloss dies aus dem eigenthümlichen Tone des heftigen Geräusches, welches mit dem Ausströmen der hochgespannten Luft verbunden war; dieser Ton trat im Augenblicke der Eröffnung des Hahns knallartig auf und erhielt sich bei der kurzen Ausflussdauer auf gleicher Höhe; bei langer Ausflussdauer änderte sich dieser Ton langsam und continuirlich; man kann hier gewissermaassen mit dem Gehör die allmähliche Druckabnahme im Kessel verfolgen.

Es ist hier nicht der Ort für eine vollständige Aufführung sämmtlicher Versuchsergebnisse, es mögen daher nur einige Versuchsreihen und auch diese nur in solcher Ausdehnung vorgeführt worden, als sie zur Entscheidung der Hauptfragen, nämlich der über den Mündungsdruck und über die Grösse des Ausflussexponenten, beitragen.

§ 49. Ausfluss durch abgerundete Mündungen.

Versuche mit einer gut abgerundeten Mündung (Fig. 40 a).
Durchmesser $d = 6{,}98$ mm.

Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Druck beim Abschluss p_x	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	ψ
Erste Reihe: Barometerstand: $p_2 = 722.4$ mm Thermometerst.: $T_1 = 273 + 15.1^{\circ}$				Zweite Reihe: Barometerstand: $p_2 = 722.3$ mm Thermometerst.: $T_1 = 273 + 15.1^{\circ}$					
		mm				mm	mm		
1	10.0	2977.1	0.004058	9	9.9	1423.3	1255.0	0.003968	2.109
2	10.0	2711.5	4053	10	10.0	1300.2	1145.9	3934	2.090
3	10.0	2469.9	4017	11	10.0	1187.6	1051.9	3820	2.030
4	10.0	2251.7	3974	12	10.0	1087.6	968.5	3703	1.968
5	10.0	2054.8	3970	13	10.2	998.7	896.7	3388	1.800
6	9.9	1875.3	4063	14	10.0	922.3	837.4	3063	1.627
7	10.0	1709.4	3969			859.5			
8	9.9	1560.1	4026						
		1423.4							

Mittel $\lambda = 0.004016$
$\psi = 2.1340$

Die ganze Zahl von 14 Versuchen (Intervallen) ist in zwei Reihen getheilt, die erste Reihe enthält diejenigen Versuche, bei denen der innere Druck mehr als das Doppelte des äussern Druckes betrug, bei der zweiten Reihe ist das Verhältniss des innern zum äussern Drucke kleiner als zwei. In der dritten Columne sind die Werthe des Gleichgewichtsdruckes in Millimeter Quecksilbersäule angegeben und zwar ist der bei jeder Versuchsnummer angegebene Druckwerth der Druck p_1 beim Beginn des Ausströmens; der zugehörige Druck p_3, welcher den Druck nach dem Schliessen der Mündung und nach erfolgter Temperaturausgleichung angiebt, bildet den Anfangswerth p_1 des nächst folgenden Versuches. In der zweiten Reihe ist in der 4. Columne auch noch der beobachtete Druck p_x im Augenblicke des Schliessens der Mündung angegeben, was bei den Versuchen der ersten Reihe unterlassen wurde, um hier nicht auch noch den Druck p_y unmittelbar nach dem Sprunge angeben und dadurch das Referat über die Versuche weiter ausdehnen zu müssen, als es den Zwecken dieses Buches entspricht.

Um nun die Versuchsresultate nach den in den Paragraphen 46 und 47 entwickelten Sätzen zu beurtheilen, müsste, da hier Contraction nicht vorliegt, also $\alpha = 1$ zu setzen ist, die Gl. (40) S. 241, nämlich

$$\psi F \sqrt{B T_1} \cdot t = V \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}$$

herangezogen werden. Ersetzt man hier den natürlichen Logarithmus durch den Brigg'schen und setzt man

$$\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3} , \qquad (45)$$

so ergiebt sich durch Substitution des Kesselvolumens $V = 0{,}81088$, der Constanten für die Zustandsgleichung $B = 29{,}269$, und wenn überdies der Durchmesser d der Mündung in Millimetern substituirt wird,

$$\psi = 439419 \frac{\lambda}{d^2 \sqrt{T_1}} \qquad (46)$$

oder für die vorstehenden beiden Versuchsreihen

$$\psi = 531{,}37 \,.\, \lambda \;. \qquad (46\text{a})$$

Nach den Darlegungen in § 46 und § 47 müsste nun der Werth ψ und daher auch die Grösse λ bei den Versuchen der ersten Reihe constant erscheinen, dagegen bei denen der zweiten Reihe mit abnehmenden Anfangsdrucke kleiner werden, was zunächst durch die Versuchswerthe Bestätigung findet. Bei der ersten Reihe schwankt der Werth λ so wenig um den angegebenen Mittelwerth 0,004016, dass man den betreffenden Satz als vollständig bestätigt ansehen darf. Die vorstehende Zusammenstellung (wie auch die folgenden) enthält die wirklichen Beobachtungsresultate ohne jede Correction oder Abrundung; die geringfügigen Abweichungen vom Mittelwerthe müssen daher ohne Zweifel nur Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden, die insbesondere den Zeitbeobachtungen, die Fehler bis zu 0,1 Secunde enthalten können, zur Last zu legen wären.

Der Mittelwerth λ der ersten Reihe führt für die betreffende Mündung nach Gl. (46 a) auf den Werth

$$\psi = 2{,}1340 \;,$$

und hieraus ergiebt sich für dieselbe nach Gl. (37) unter Zuhülfe-

nahme der Tabelle auf S. 242 durch Interpolation der Ausflussexponent n zu:

$$n = 1{,}403 .$$

Benutzt man diesen Werth zur Berechnung der Grösse ψ in Gl. (44a), so erhält man Werthe, die mit den in der zweiten Reihe der vorstehenden Zusammenstellung nach Gl. (46a) berechneten Werthen soweit übereinstimmen, dass man auch hier die geringfügig abweichenden Resultate den Beobachtungsfehlern zuschreiben darf.

Eine zweite grössere Versuchsreihe habe ich mit einer gut abgerundeten Mündung mit dem Durchmesser $d = 4{,}10$ mm bei einer äussern Temperatur von $17{,}3°$ C. angestellt. Die erste Reihe dieser Versuche, bei der der innere Druck mehr als das Doppelte des äussern betrug, umfasste 23 Intervalle und ergab als Mittelwerth $\lambda = 0{,}001392$, woraus sich nach Gl. (46) für diese Mündung*) $\psi = 2{,}1356$, also fast derselbe Werth wie bei der erstern ergiebt.

*) Ueber diese Versuche, wie auch über die mit der ersten Mündung, giebt Prof. Fliegner im Civilingenieur Bd. 20 (1874) (Ergebnisse einiger Versuche über das Ausströmen der atmosphärischen Luft) meine Beobachtungsresultate wieder und fügt noch die Ergebnisse eigner Versuche (an demselben Apparate) mit zwei Mündungen von 7,314 mm und 4,085 mm Durchmesser bei. Die Versuche mit der oben erwähnten Mündung von 4,10 mm Durchmesser benutzt auch Emil Herrmann (»Compendium der mechanischen Wärmetheorie« Berlin 1879) nach den Veröffentlichungen von Fliegner. Beide Schriftsteller weichen in der theoretischen Behandlung der Versuchsmethode von einander ab, ihre Darlegungen sind auch verschieden von der Theorie der Versuchsmethode, wie sie oben im Text in § 46 unter 47 gegeben wurde, und die ich mir schon vor der Ausführung meiner Versuche zurechtgelegt hatte; beide kommen zu dem Schlusse, dass bei gut abgerundeten Mündungen die Widerstände ganz vernachlässigt werden dürften und der Ausflusscoefficient n mit dem Werthe $\varkappa = 1{,}410$ identisch angenommen werden könne.

In einer zweiten Abhandlung (Civilingenieur Bd. 23. S. 443. 1877) kommt Fliegner auf die Frage zurück, veröffentlicht neue Versuchsreihen mit abgerundeten Mündungen, bei denen eine directe Beobachtung des Druckes in der Mündung und ausserhalb derselben versucht worden ist. Hier wird der Ausflussexponent n zu 1,37 angegeben, was auf einen Widerstandscoefficienten führt, der grösser wäre, als er beim Wasserausfluss gefunden worden ist.

Als Mittel aus beiden Werthen ergiebt sich daher auf Grund beider Versuchsreihen die durch Gl. (37) S. 239 dargestellte Grösse ψ für Luftausfluss durch eine gut abgerundete Mündung, sobald sich in der Mündung der Minimaldruck einstellt (für $p_1 > 2p_2$), allgemein:

$$\psi = 2{,}1350 \ ,$$

hieraus nach der Hülfstabelle S. 242 der Ausflussexponent n für eine derartige Mündung:

$$n = 1{,}404$$

und endlich der entsprechende Widerstandscoefficient ζ nach Gl. (20) S. 227

$$\zeta = 0{,}0105 \ .$$

Sind p_1, v_1 und T_1 Druck, Volumen und Temperatur im Ausflussgefässe und strömt die Luft durch eine gut abgerundete Mündung bei constantem Drucke p_1 aus, so findet sich also nach den Gln. (24), (25) und (26) der Druck (Minimaldruck) p, das Volumen v und die Temperatur T in der Mündungsebene beziehentlich:

$$p = 0{,}5276\, p_1 \ ; \quad v = 1{,}5768\, v_1 \ ; \quad T = 0{,}8319\, T_1 \ .$$

Ist der äussere Druck p_2 grösser als der Minimaldruck p, so berechnet sich das Gewicht G der Luftmenge (in Kilogramm), welche in der Secunde durch eine Mündung von F Quadratmeter Querschnitt ausströmt, nach Gl. (22) S. 228

$$G = 8{,}2142 \cdot F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \ . \qquad (47)$$

Ist dagegen der äussere Druck kleiner, so stellt sich in der Mündungsebene der vorhin berechnete Minimaldruck ein und die Ausflussmenge ergiebt sich nach Gl. (27a) S. 232 unter Berücksichtigung der in Gl. (37) angegebenen Bezeichnung:

$$G = \psi F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = 2{,}1350\, F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \qquad (48)$$

oder wenn man sich p_1 in Atmosphären (zu 10333 kg) substituirt denkt:

$$G = 217{,}03\, F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \ . \qquad (48\,a)$$

In diesen Fällen erscheint die Ausflussmenge unabhängig vom äussern Drucke.

Multiplicirt man Gl. (48) auf beiden Seiten mit v_1 und beachtet man die Zustandsgleichung $p_1 v_1 = B T_1$, so folgt

$$G v_1 = 11{,}550\, F \sqrt{T_1}\ . \tag{48b}$$

Bei der Temperatur von 0° C. folgt hieraus

$$G v_1 = 190{,}85\, F\ .$$

Es strömt daher durch eine solche Mündung, sobald sich in derselben der Minimaldruck einstellt, durch ein Quadratmeter Mündungsfläche in der Secunde bei innerm Drucke gemessen ein Luftvolumen von 190,85 cbm aus. De Saint-Venant und Wantzel finden bei ihren unzuverlässigen Versuchen hierfür den Werth 170.

Beim Ausfluss des Wassers durch eine gut abgerundete Mündung hat sich, insbesondere durch die zahlreichen Versuche von Weisbach bei den verschiedensten Druckhöhen und bei verschiedenem Mündungsdurchmesser für den Widerstandscoefficienten der constante Mittelwerth $\zeta = 0{,}063$ herausgestellt; will man annehmen, dass dieser Werth auch für Luft gebraucht werden dürfe, so würde der entsprechende Ausflusscoefficient n sich nach Gl. (17) S. 227 zu

$$n = 1{,}376$$

ergeben. Meine Versuche ergeben diesen Coefficienten grösser, wonach zu schliessen ist, dass der Reibungswiderstand beim Ausfluss der Luft durch abgerundete Mündungen wesentlich kleiner als bei Wasser ist.

§ 50. Ausfluss durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

Versuche mit einem cylindrischen Ansatzrohre ohne Abrundung im Innern (Fig. 40 b). Durchmesser $d = 6{,}98$ mm.

Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Druck beim Abschluss p_x	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	ψ
Erste Reihe: Barometerstand: $p_2 = 723.8$ mm Thermometerst.: $T_1 = 273 + 15.6^0$				Zweite Reihe: Barometerstand: $p_2 = 725.8$ mm Thermometerst.: $T_1 = 273 + 16.3^0$					
		mm							
1	10.1	2982.0	0.003437	9	10.1	1585.8	1434.8	0.003422	1.814
2	10.0	2752.9	3473	10	10.1	1464.5	1324.8	3440	1.824
3	10.0	2541.3	3438	11	10.0	1351.9	1226.8	3348	1.775
4	10.0	2347.9	3442	12	10.0	1251.6	1136.8	3308	1.754
5	10.0	2169.0	3432	13	10.2	1159.8	1054.4	3173	1.682
6	10.0	2004.2	3374	14	9.9	1076.5	980.6	3067	1.626
7	10.0	1854.4	3389	15	10.0	1003.8	915.7	2926	1.551
8	9.9	1715.2	3433	16	10.0	938.4	863.0	2687	1.425
		1586.1		17	10.2	882.1	819.3	2372	1.256
		Mittel $\lambda = 0.003427$				834.3			
		$\psi = 1.8194$							

Aus der vorstehenden Zusammenstellung, bei welcher die Beobachtungswerthe in gleicher Weise angeordnet sind, wie in der Tabelle auf S. 250 für die abgerundete Mündung, die übrigens denselben Durchmesser, wie das vorliegende Ansatzrohr hatte, ist sofort ersichtlich, dass auch hier der Satz von de Saint-Venant und Wantzel über den Mündungsdruck seine Bestätigung findet. In der ersten Reihe, bei welcher durchgängig der innere Druck mehr als das Doppelte des äussern betrug, gruppiren sich die Werthe von λ entschieden um den Mittelwerth $\lambda = 0{,}003427$ und dürfen daher, von den Beobachtungsfehlern abgesehen, als mit diesem identisch für alle einzelnen Versuche betrachtet werden. Unter Benutzung des angegebenen Mündungsdurchmessers und der beobachteten Temperatur T_1 ergiebt sich dann nach Gl. (40) die Grösse $\psi = 1{,}8194$.

In einer andern Versuchsreihe*), welche mit einem kurzen An-

*) Die betreffende Versuchsreihe habe ich im Civilingenieur Bd. 20. S. 13. 1874 veröffentlicht; der dort angegebene Mündungsdurchmesser, 5,79 mm, stellte sich durch später vorgenommene Messungen Fliegner's genauer zu 5,74 mm heraus.

satzrohre vom Durchmesser $d = 5{,}74$ mm bei der äussern Temperatur $T_1 = 290{,}4^0$ ausgeführt wurde, ergab derjenige Theil der Versuche, bei welchem der innere Druck mehr als das Doppelte des äussern betrug, aus 14 Versuchen für λ den Mittelwerth $0{,}002326$, woraus sich für diese Mündung $\psi = 1{,}8195$ berechnet, es folgt daher derselbe Werth, wie bei der vorher besprochenen Mündung. Dem gefundenen Werthe von ψ entspricht, nach der Hülfstabelle auf S. 242 durch Interpolation bestimmt, der Ausflussexponent $n = 1{,}286$.

Dieser Werth dürfte nun bis auf Weiteres für den Luftausfluss durch kurze Ansatzröhren (Fig. 40 b) allgemein in Anwendung gebracht werden. Benutzt man den Werth n in Gl. (44 a) zur Berechnung von ψ für die zweite Reihe der Versuche vorstehender Tabelle, so erhält man Grössen, die von denen der Tabelle nicht stärker abweichen, als unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler noch zulässig erscheint.

Der entsprechende Widerstandscoefficient stellt sich hiernach auf Grund von Gl. (20) S. 227

$$\zeta = 0{,}307$$

heraus, während sich für den Ausfluss von Wasser, insbesondere nach den zahlreichen Versuchen Weisbach's, der Werth etwas grösser, nämlich 0,505, ergeben hat. Stellt sich beim Ausfluss der Luft durch ein cylindrisches Ansatzrohr in der Mündungsebene der Minimaldruck ein, ist also der innere Druck grösser als das Doppelte des äussern, so findet sich dieser Minimaldruck für den angegebenen Werth von n nach Gl. (24) S. 231

$$p = 0{,}5483 \, . \, p_1 \ ,$$

und auf demselben Wege, wie oben bei Besprechung der gut abgerundeten Mündung gezeigt wurde, ergiebt sich das Luftgewicht in Kilogrammen, welches in der Secunde zum Ausfluss gelangt, unter Zugrundelegung der Gl. (27 a) S. 232 und (37) S. 239

$$G = \psi F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} = 1{,}8194 \, F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \ , \tag{49}$$

oder, wenn der innere Druck p_1 in Atmosphären (zu 10 333 kg) eingeführt wird,

$$G = 184{,}95 \, F \sqrt{\frac{p_1}{v_1}} \ . \tag{49 a}$$

Hieraus folgt das Luftvolumen bei innerem Drucke gemessen, wenn im Innern die Temperatur T_1 vorliegt,

$$G v_1 = 9{,}8431\, F \sqrt{T_1} \tag{49b}$$

und bei der Temperatur von 0° C.

$$G v_1 = 162{,}33 \,.\, F \,.$$

Unter der zuletzt gemachten Annahme strömen also durch ein kurzes cylindrisches Ansatzrohr in der Secunde 162,33 cbm Luft durch ein Quadratmeter Mündungsfläche, sobald sich in letzterer der Minimaldruck einstellt. Ist dagegen der Mündungsdruck mit dem äussern Drucke identisch, was der Fall ist, sobald der äussere Druck $p_2 > 0{,}5483\, p_1$, so ist die Ausflussmenge, wie bei der gut abgerundeten Mündung, nach Gl. (47) S. 253, zu berechnen, wobei jedoch der Ausflussexponent $n = 1{,}286$ anzunehmen ist.

Weisbach (a. a. O.) hat ebenfalls einige Versuche mit kurzen cylindrischen Ansatzröhren von drei verschiedenen Durchmessern ausgeführt, von denen Grashof*) drei Versuche einer neuen Berechnung unterzogen hat, die unter sich verschiedene und etwas kleinere Werthe für den Ausflussexponenten n ergeben, als im Vorstehenden gefunden wurde. Wegen der verhältnissmässig langen Ausflusszeit, welche Weisbach in Anwendung brachte, müssen dessen Versuche nach andern, als den oben entwickelten Formeln berechnet werden und diese Formeln von Weisbach, die Grashof einer Revision unterzog, sind sehr complicirt und unter Annahmen entwickelt, die es mir wahrscheinlich machen, dass die Abweichungen von meinen Versuchsergebnissen dieser Berechnungsmethode zuzuschreiben sind. Nur bei sehr wenig Versuchen Weisbach's betrug der innere Druck bei Beginn eines einzelnen Versuches mehr als das Doppelte des äussern, stets aber wesentlich weniger am Ende eines solchen.

§ 51. Ausfluss durch Mündungen in dünner Wand.

Auf demselben Wege, wie mit den vorhin besprochenen Mündungen, wurden von mir Versuche durchgeführt mit vier

*) Theoretische Maschinenlehre Bd. I. S. 585.

verschiedenen Mündungen in dünner Wand, deren Durchmesser bez. 4,07; 5,74; 6,98 und 9,99 mm betrugen; die Versuche mit der dritten dieser Mündungen ergaben die nachstehenden Resultate.

Versuche mit einer Mündung in dünner Wand (Fig. 40c).
Durchmesser $d = 6{,}98$ mm.

Erste Reihe:
Barometerstand: $p_2 = 725.8$ mm
Thermometerstand: $T_1 = 273 + 17.0^\circ$

Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	Contr.-Coeff. α
		mm		
1	10.0	2996.1	0.003365	0.835
2	10.3	2772.7	3355	0.833
3	10.0	2560.6	3313	0.822
4	10.0	2372.5	3296	0.818
5	10.1	2199.1	3282	0.814
6	9.9	2037.5	3241	0.804
7	10.1	1892.4	3219	0.799
8	10.0	1755.9	3183	0.790
9	10.0	1631.8	3137	0.778
		1518.1		

Zweite Reihe:
Barometerstand: $p_2 = 726.0$ mm
Thermometerstand: $T_1 = 273 + 17.1^\circ$

Nr.	Ausflusszeit t Sec.	Gleichgewichtsdrucke p_1 p_3	Druck beim Abschluss p_x	Werthe von $\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3}$	Contr.-Coeff. α
10	10.0	1518.3	1377.2	0.003054	0.758
11	10.0	1415.2	1286.3	2998	0.744
12	10.1	1320.8	1202.9	2923	0.725
13	10.2	1234.0	1125.5	2850	0.707
14	10.0	1154.1	1059.7	2713	0.673
15	10.2	1084.2	999.4	2557	0.634
16	10.0	1021.0	946.6	2427	0.602
17	10.2	965.5	899.9	2236	0.555
18	10.1	916.1	858.7	2062	0.512
19	10.0	873.2	824.5	1917	0.476
		835.5			

Die vorstehenden Versuchsresultate unterscheiden sich wesentlich von denen, auf welche die Versuche mit der abgerundeten Mündung und dem cylindrischen Ansatzrohre geführt haben; der Werth λ erscheint hier in der ersten Reihe keineswegs constant, sondern nimmt schon hier und nicht erst in der zweiten Reihe regelmässig ab mit abnehmendem Anfangsdrucke. Diese Erscheinung ist nun ohne allen Zweifel dem Einflusse der Contraction des Luftstrahles ausserhalb der Mündung zuzuschreiben; der Querschnitt des Strahles, in welchem sich der Minimaldruck, beziehungsweise der äussere Druck einstellt, ist nicht mit dem Mündungsquerschnitte identisch, sondern liegt ausserhalb desselben und ist kleiner; das Verhältniss beider Querschnitte wird eben durch den Contractionscoefficienten α, der oben in Gl. (40) S. 241 eingeführt worden ist, in Rechnung gebracht.

Benutzt man wieder die Bezeichnung:

$$\lambda = \frac{1}{t} \log_{10} \frac{p_1}{p_3},$$

so giebt die angezogene Gl. (40) das Mittel an die Hand, das Product $\alpha\psi$ zu berechnen. Die Substitution der für vorstehende Versuche bekannten Werthe des Kesselinhaltes V, des Mündungsquerschnittes F und der Temperatur T_1 ergiebt für die vorliegende Mündung

$$\alpha\psi = 529{,}62 \,.\, \lambda \;.$$

Geht man nun von der bekannten und wohl als richtig zu betrachtenden Annahme aus, dass für eine Mündung in dünner Wand die Widerstände in gleicher Weise zu bemessen sind, wie bei einer gut abgerundeten Mündung, dass also für eine solche, wie auf S. 252 gefunden wurde, der Ausflussexponent $n = 1{,}403$ und der zugehörige Werth $\psi = 2{,}1340$ zu setzen ist, so giebt die vorstehende Formel

$$\alpha = 248{,}18 \,.\, \lambda \;,$$

und hiernach sind die in vorstehender Tabelle angegebenen Werthe α des Contractionscoefficienten berechnet worden. Man ersieht aus der Tabelle, dass dieser Coefficient um so kleiner ist, je geringer der Druck im Ausflussgefässe gegenüber dem äussern Drucke ist. Beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in dünner Wand ist es gerade umgekehrt, hier nimmt der Contractionscoefficient mit wachsender Druckhöhe ab. Auf diesen eigenthümlichen Unterschied hat schon Weisbach*) aufmerksam gemacht, obgleich ihm nur eine geringe Anzahl von Versuchen zur Verfügung stand.

Ist p_1 der Anfangsdruck im Ausflussgefässe bei einer mittleren Ausflusszeit von 10 Secunden und p_2 der äussere Druck, so lässt sich aus vorstehender Tabelle auf dem Wege der Interpolation der Coefficient α für einzelne Werthe des Druckverhältnisses $p_1 : p_2$ bestimmen. In der folgenden Zusammenstellung sind die entsprechenden Resultate in der dritten Verticalreihe angegeben, zugleich aber auch in der 1., 2. und 4. Reihe die Rechnungsergebnisse, auf welche mich die Versuche mit den andern Mündungen in dünner Wand geführt haben.

*) Civilingenieur. Bd. 12. 1866. S. 87.

Werthe des Contractionscoefficienten α bei Mündungen in dünner Wand.

Mündungsdurchmesser	$d=4.07^{mm}$	5.74	6.98	9.99
Druckverhältniss: $\frac{p_1}{p_2}=4$	0.849	0.845	0.835	0.831
4.5	0.839	0.823	0.822	0.819
3	0.826	0.824	0.814	0.806
2.5	0.816	0.799	0.794	0.776
2	0.754	0.751	0.748	0.721
1.5	0.653	0.653	0.634	0.604

Die Werthe der Tabelle zeigen bezüglich ihres Aenderungsgesetzes grosse Regelmässigkeit, obgleich sie direct aus den Versuchsresultaten ohne jedwede Correction abgeleitet worden sind. Läge ein praktisches Bedürfniss hierzu vor, so liessen sich die Angaben der Tabelle leicht durch eine empirische Formel zusammenfassen, welche den Werth α als Function des Druckverhältnisses $p_1 : p_2$ und des Mündungsdurchmessers d ergeben würde. Man erkennt übrigens aus der Tabelle, dass der Coefficient α mit grösser werdendem Mündungsdurchmesser langsam abnimmt, ein Resultat, worauf ebenfalls schon Weisbach (a. a. O.) mit dem Hinzufügen aufmerksam macht, dass sich nach dieser Richtung das Wasser beim Ausflusse durch Mündungen in dünner Wand in gleicher Weise verhält, wie Luft.

Auf Grund vorstehender Untersuchungen berechnet sich nun die Luftmenge, welche durch eine Mündung in dünner Wand ausströmt, in der Weise, dass man zuerst die Luftmenge ermittelt, welche unter den gleichen Druckverhältnissen durch eine gut abgerundete Mündung zum Ausflusse gelangt, indem man hierbei Gl. (47) oder Gl. (48a) S. 253 verwendet, je nachdem das Druckverhältniss $p_1 : p_2$ kleiner bez. grösser als 1.895 ist.

Der berechnete Werth der Ausflussmenge G ist dann noch mit dem entsprechenden aus vorstehender Zusammenstellung zu entnehmenden Werthe des Contractionscoefficienten α zu multipliciren.

§ 52. Schlussbemerkungen über die strömende Bewegung der Gase.

An die vorstehenden Untersuchungen über den permanenten Ausfluss der Gase durch einfache Mündungen müssten sich naturgemäss Betrachtungen anschliessen über die Bewegung der Gase durch Röhrenleitungen mit constantem oder veränderlichem Querschnitte, über den Einfluss des hierbei auftretenden Reibungswiderstandes, des Widerstandes, der durch Krümmungen, Kniee, Verengungen, plötzliche Erweiterungen u. s. f. hervorgerufen wird; ferner wäre zu untersuchen, welche Erscheinungen eintreten, wenn dem strömenden Gase zugleich von aussen her in vorgeschriebener Weise Wärme zugeführt wird oder wenn hierbei eine Wärmeentziehung in bestimmter Art vorliegt.

Beim Versuche einer Lösung der angedeuteten Fragen unter der Voraussetzung *grosser Druckdifferenzen* stösst man aber auf Schwierigkeiten, die bis jetzt nur zu einem sehr kleinen Theile überwunden werden konnten, *vollständig* fehlt es aber an hierhergehörigen Versuchen.

Theoretische Untersuchungen über die Bewegung der Gase durch kurze Leitungen mit veränderlichem Querschnitte (unter Vernachlässigung des Reibungswiderstandes) hat *Emil Herrmann**) geführt, insbesondere aber hat *Grashof***) einen Theil der vorhin angegebenen Fragen, so weit dieses zur Zeit möglich ist, mit Erfolg behandelt.

Bei den Problemen, auf welche man bezüglich des Strömens der Gase bei technischen Untersuchungen stösst, hat man es glücklicher Weise fast ohne Ausnahme mit *geringen* Druckdifferenzen zu thun, in welchem Falle die für tropfbare Flüssigkeiten gültigen Formeln Anwendung finden können und wobei zugleich auch von den Werthen der Widerstandscoefficienten Gebrauch gemacht werden kann, die man in der technischen Hydraulik für die verschiedenen Widerstandsarten bei der Bewegung des Wassers unter den gleichen Umständen durch Versuche gefunden hat.

*) Compendium der mechanischen Wärmetheorie. Berlin 1879. S. 77 u. f.

**) Theoretische Maschinenlehre. Leipzig 1875. Bd. I. S. 592 u. F.

Anwendungen.

Technischer Theil.

I. Theorie der Luftmaschinen.

§ 53. Vorbemerkungen.

Man unterscheidet Heiss- und Kaltluftmaschinen; bei den ersteren liegt der Zweck vor, andauernd und continuirlich im grössern Maassstabe Wärme in Arbeit zu verwandeln und diese Arbeit zu technischen Zwecken, zum Betriebe von Arbeitsmaschinen zu verwerthen.

Die Heissluftmaschinen sind daher Betriebs- oder Umtriebsmaschinen; bei denselben wirkt im maschinentechnischen Sinne gesprochen als »Motor«, im Sinne der Thermodynamik als »vermittelnder Körper« ein Gas, und zwar die atmosphärische Luft; das in der Maschine eingeschlossene Luftquantum erleidet periodisch durch entsprechende Wärmezu- und Wärmeableitung, durch Expansion und Compression solche Druck- und Volumenänderungen, dass die entsprechende Druckcurve oder die einzelnen im Processe vorkommenden Druckcurven ein Indicatordiagramm bilden und eine Fläche umschliessen, deren Inhalt ohne Weiteres ein Maass für die Arbeit bildet, die bei einer vollen Periode oder bei einem »Spiele der Maschine« gewonnen worden ist; mit einem Worte, die Maschine vollführt einen Kreisprocess. Bei dem Kreisprocess der Heissluftmaschine ist mit dem Arbeitsgewinn ein entsprechender Wärmeverbrauch verbunden, wie dies bereits ausführlich im ersten Abschnitte dargelegt worden ist.

Bei der Expansion entzieht die Luft Wärme einem Körper von höherer Temperatur und überträgt solche bei der Compression auf einen andern Körper von niederer Temperatur; die Differenz der aufgenommenen und abgegebenen Wärmemenge ist hierbei zu äusserer Arbeit verbraucht worden.

Ein Process der angegebenen Art lässt sich aber auch in umgekehrter Richtung ausgeführt denken und dieser Fall liegt bei der Kaltluftmaschine vor; hier entzieht die Luft während der Expansion einem Körper Wärme bei niedriger Temperatur und überträgt solche bei der Compression auf einen Körper höherer Temperatur; hierbei ist die abgegebene Wärmemenge grösser, als die aufgenommene und die Differenz muss durch Arbeit erzeugt werden. Der Betrieb der Kaltluftmaschine erfordert mechanische Arbeit und die Maschine gehört daher zu der Classe der Arbeitsmaschinen; ihr Zweck ist, gewissen Körpern Wärme bei niedrigen Temperaturwerthen zu entziehen, Kälte zu erzeugen, unter Umständen flüssige Körper (Wasser) zum Gefrieren zu bringen, also Eis zu bilden (Eismaschinen).

In dem einen Falle, wo es sich um Arbeitserzeugung, wie in dem andern Falle, bei dem es sich um Kälteerzeugung handelt, kommt es auf die Art des vermittelnden Körpers nicht an; ersetzt man daher bei den besprochenen Maschinen die Luft durch ein Dampf- und Flüssigkeitsgemisch, so hat man statt einer Luftmaschine die Dampfmaschine und hat hier in gleicher Weise die Heissdampfmaschine von der Kaltdampfmaschine zu unterscheiden, je nachdem der Process in der einen oder andern Richtung vollführt wird.

Bei allen genannten Maschinen, die am Besten allgemein mit dem Namen »calorische Maschinen« bezeichnet werden, während allerdings nach dem Vorgange Redtenbacher's Viele unter diesem Namen speciell die Heissluftmaschine verstehen, hat man je nach der Ausführung zwei verschiedene Arten und zwar die geschlossenen und die offenen Maschinen zu unterscheiden.

Bei der geschlossenen calorischen Maschine ist der vermittelnde Körper, also Luft oder Gas, oder Dampf- und Flüssigkeitsmischung irgend welcher Art in der Maschine eingeschlossen und wird am Ende des Processes in den Anfangszustand zurückgeführt, um denselben Process fortwährend wiederholen zu können; bei der offenen Maschine dagegen wird der vermittelnde Körper

am Ende eines jeden Processes ausgestossen, von der Maschine entlassen, und an seiner Stelle von derselben ein neues Quantum von aussen her aufgenommen.

Im letzteren Falle können natürlich für technische Zwecke nur solche Körper als vermittelnde Körper Benutzung finden, die überall und ohne Betriebsaufwand zu haben sind; die Luftmaschinen werden daher gespeist mit atmosphärischer Luft vom Zustande (nach Druck und Temperatur) der äussern Atmosphäre, die Dampfmaschine mit Wasser.

Bei den hier besprochenen Maschinen finden innerhalb des von der Maschine ausgeführten Processes keine chemischen Aenderungen statt; die offenen Luftmaschinen entlassen die atmosphärische Luft nur mit anderer, im Allgemeinen höherer Temperatur und unter Umständen mit anderm Druck, als dieselbe bei der Aufnahme hatte, und bei der offenen Dampfmaschine liegt nur eine Aenderung des Aggregatzustandes vor, das aufgenommene Wasser verlässt die Maschine in Dampfform oder richtiger gesagt, als Dampf- und Flüssigkeitsgemisch.

Zu der Classe der calorischen Maschinen gehören aber noch jene Maschinen, deren Speisung durch ein Gemisch von Körpern, gewöhnlich von Gasen verschiedener Art erfolgt, die innerhalb des von der Maschine ausgeführten Arbeitsprocesses, und zwar im Innern der Maschine, einen chemischen Process — Verbrennung, Explosion — vollführen und die unter dem Namen Feuerluftmaschinen erst weiter unten der Untersuchung unterzogen werden sollen.

A. Heissluftmaschinen.

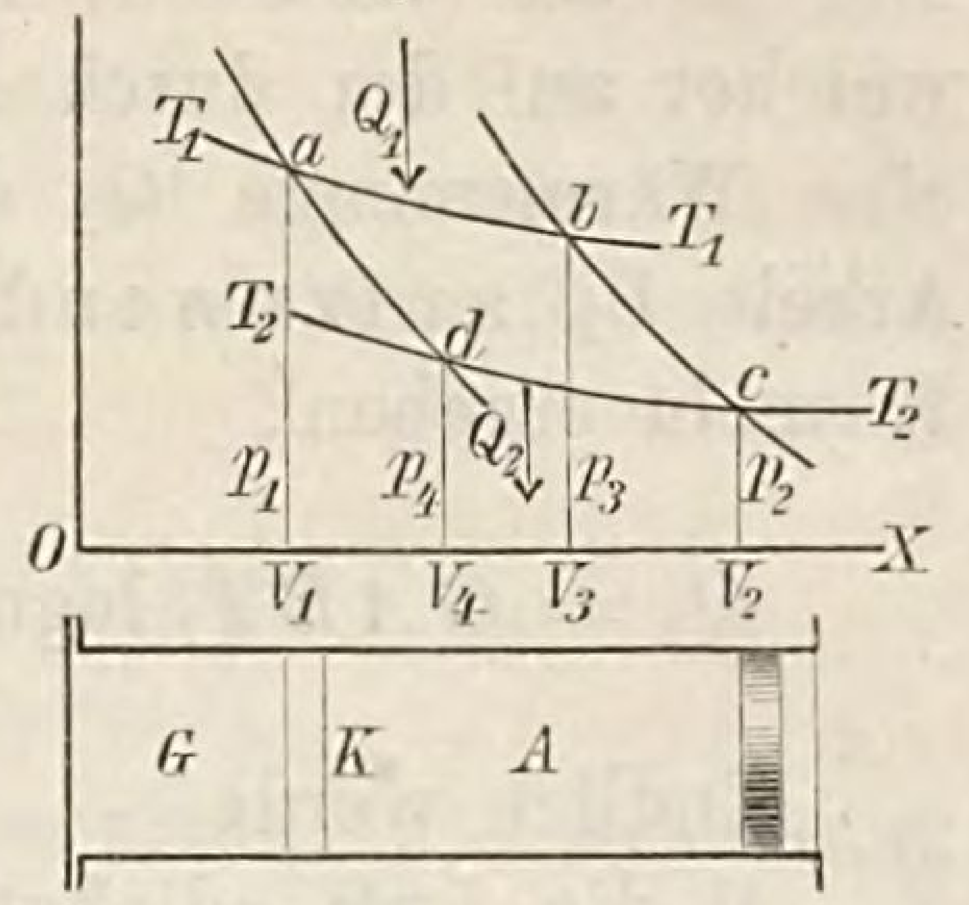
a) Geschlossene Heissluftmaschinen.

§ 54. Der Carnot'sche Process einer geschlossenen Luftmaschine.

In einem Cylinder A (Fig. 41) a. f. S. schliesse der Kolben K links einen Raum ab, in welchem sich G kg Luft eingeschlossen befinden; das Volumen der Luft sei V_1, der Druck p_1 und T_1 die zugehörige absolute Temperatur; ist v_1 das specifische Volumen, so gilt die Beziehnung $V_1 = Gv_1$.

Trägt man auf der Axe OX die Strecke V_1 als Abscisse und p_1 als Ordinate auf, so entspricht der Punkt a der zugehörigen Temperatur T_1 und bestimmt vollständig den augenblicklichen Zustand der Luft.

Fig. 41.



Mit diesem Luftquantum soll nun folgender Kreisprocess ausgeführt, zunächst aber von der Frage abgesehen werden, ob in der vorzuführenden Weise der Process praktisch ausführbar ist.

Man lasse

1) die Luft sich arbeitsverrichtend unter Ueberwindung eines äussern Druckes, der fortwährend dem jeweiligen Drucke der Luft entspricht (also auf umkehrbarem Wege) ausdehnen nach der isothermischen Curve ab, es bleibe also hierbei die Temperatur T_1 der Luft constant, was eine bestimmte Art der Wärmemittheilung voraussetzt.

Die Wärmemenge Q_1, welche der Luft während der Ausdehnung von V_1 auf V_3 von Aussen mitgetheilt werden muss, die also von der Luft bei constanter Temperatur T_1 aufgenommen, sowie die Arbeit L_1, die hierbei durch Expansion der Luft gewonnen wird, findet sich dann nach den im § 26 gegebenen Sätzen:

$$Q_1 = GABT_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}, \quad (1\,a) \qquad L_1 = GBT_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}, \quad (1\,b)$$

wobei p_3 der dem Punkte b und dem Volumen V_3 entsprechende Druck ist.

Man lege nun durch die beiden Punkte a und b der Fig. 41 die beiden adiabatischen Curven bc und ad und lasse

2) die Luft ohne Zu- und Ableitung von Wärme bis zum Punkte c, dem V_2, p_2 und T_2 als Volumen, Druck und Temperatur entsprechen, weiter expandiren. Die hierbei gewonnene Arbeit L_1' findet sich nach Gl. (62a) S. 135

$$L_1' = G \frac{c_v}{A} (T_1 - T_2) \quad \cdot \quad (2)$$

Jetzt werde

3) die Luft auf der isothermischen Curve cd bei constanter Temperatur T_2 comprimirt bis zum Punkte d, welchem V_4, p_4 und T_2 als Volumen, Druck und Temperatur entsprechen, und welcher auf der durch a gehenden Adiabaten liegt. Hierbei ist eine Wärmemenge Q_2 der Luft zu entziehen und wird eine Arbeit L_2 aufzuwenden sein, die sich nach den folgenden Formeln ergeben:

$$Q_2 = GABT_2 \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2}, \quad (3a) \qquad L_2 = GBT_2 \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2} \cdot \quad (3b)$$

Endlich werde

4) die Luft adiabatisch auf dem Wege da in den Anfangszustand a zurückgebracht; die Arbeit L_2', welche bei diesem Theile der Compression erforderlich ist, findet sich

$$L_2' = G\frac{c_v}{A}(T_1 - T_2) \,. \tag{4}$$

Bei diesem Kreisprocesse ist nun die Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ verschwunden und in Arbeit verwandelt worden; die ganze gewonnene Arbeit L findet sich

$$L = L_1 + L_1' - L_2 - L_2'$$

und hieraus durch Substitution der im Vorstehenden angegebenen Werthe, wobei die Arbeitsquantitäten L_1' und L_2' als gleich gross sich aufheben,

$$L = GB\left(T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} - T_2 \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2}\right) \tag{5}$$

und die beiden für die Wärmemengen Q_1 und Q_2 gegebenen Ausdrücke führen, wie es sein muss, auch auf die Beziehung

$$AL = Q_1 - Q_2 \,. \tag{5a}$$

Nun ist aber nach den Sätzen, welche für die adiabatische Curve gefunden wurden (§ 37 S. 134 Gl. 61) für die beiden Uebergänge bc und ad, die zwischen denselben Temperaturgrenzen T_1 und T_2 erfolgen:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_4}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \tag{6}$$

und daher besteht zwischen den vier Pressungen die Beziehung

$$p_1 p_2 = p_3 p_4 \ , \tag{7}$$

wonach aus Gl. (5) sich ergiebt

$$L = G B (T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}$$

und, wenn man hier noch p_3 aus der zweiten der Gln. (6) bestimmt:

$$L = G B \, (T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \ , \tag{8}$$

während nach Gl. (1a) und (2a) unter Benutzung der Beziehung Gl. (7) das Verhältniss der beiden Wärmemengen Q_2 und Q_1 sich findet:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \tag{9}$$

und hieraus nach Gl. (5a)

$$L = \frac{Q_1}{A T_1} (T_1 - T_2) , \tag{10}$$

wobei

$$\frac{Q_1}{A T_1} = \frac{Q_2}{A T_2} = P \tag{11}$$

als das Wärmegewicht für die beiden Uebergänge auf den isothermischen Curven *ab* und *dc* zwischen den beiden adiabatischen Curven *bc* und *ad* bezeichnet worden ist. Die letzten Gleichungen sind bereits im 1. Abschnitt bei den allgemeinen Betrachtungen des Carnot'schen Processes durch die Gl. (IV) und (V) S. 49 gegeben worden, nur ist dort die Function S an Stelle der absoluten Temperatur T benutzt worden und die Identität beider Functionen erst durch die Untersuchungen in § 23 S. 122 hervorgetreten.

Im Uebrigen ergiebt sich für vorliegenden Fall noch das Volumen der Luft für jeden der vier Eckpunkte des Curvenvierecks *abcd* oder des dem Carnot'schen Processe entsprechenden Indicatordiagrammes aus den Formeln

$$\left.\begin{aligned} V_1 p_1 = G B T_1 \ ; \quad V_2 p_2 = G B T_2 \ ; \\ V_3 p_3 = G B T_1 \ ; \quad V_4 p_4 = G B T_2 \ . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Multiplication der beiden obern und der beiden untern

Ausdrücke giebt unter Berücksichtigung von Gl. (7) noch die Beziehung:

$$V_1 V_2 = V_3 V_4 \ . \tag{13}$$

Endlich lässt sich aus der zweiten der Gln. (12) noch der Werth GB bestimmen und in Gl. (8) benutzen; man erhält dann die Arbeit, welche in der Technik als indicirte Arbeit pro Spiel bezeichnet wird:

$$L = V_2 p_2 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \ . \tag{14}$$

Da V_2 das grösste Volumen darstellt, welches innerhalb des Processes das Luftgewicht G annimmt, so erlaubt die vorstehende Gleichung zugleich einen Schluss auf die Grösse des Arbeitscylinders bei einer bestimmten Arbeit L; überdies ist p_1 der grösste und p_2 der kleinste Werth der im Processe vorkommenden Pressungen bei den Grenztemperaturen T_1 und T_2.

Will man an eine Heissluftmaschine denken, welche den Process nach Fig. 41 in der That ausführt und setzt man voraus, dass nicht blos links vom Kolben K, sondern auch rechts von demselben eine Luftmenge von G kg den angegebenen Kreissprocess vollführt, dass also eine doppelt wirkende Maschine vorliegt, so werden bei einem vollen Hin- und Rückgange des Kolbens oder, wenn die oscillirende Bewegung durch einen Kurbelmechanismus in eine rotirende umgesetzt wird, bei jeder Umdrehung zwei Kreisprocesse vorliegen. Macht nun die Maschine u Umdrehungen in der Minute, so ist die in der Secunde gewonnene Arbeit

$$\frac{2Lu}{60} \ ,$$

und wenn dieser Werth durch 75 mkg dividirt wird, so erhält man die gewonnene Arbeit in Pferdestärken, die mit N bezeichnet werden mag,

$$N = \frac{Lu}{30 \cdot 75} \ . \tag{15}$$

Benutzt man hier Gl. (14) und bezeichnet man mit F den Kolbenquerschnitt (Fig. 41) und mit s den gesammten Kolbenhub, so wäre ohne Rücksicht auf die schädlichen Räume $V_2 = Fs$ und demnach:

$$N = \frac{Fsu}{30} \cdot \frac{p_2}{75} \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} \cdot \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} . \qquad (16)$$

Das ist die Arbeitsgleichung dieser doppelt wirkenden Maschine in derjenigen Form, in welcher sie bei technischen Untersuchungen direct Verwerthung finden würde, wenn der hier behandelte Process in der vorbezeichneten Art praktisch wirklich ausgeführt werden könnte.

Von gleicher technischer Wichtigkeit ist aber auch Gl. (10), welche die Beziehung zwischen der gewonnenen Arbeit L und der Wärmemenge Q_1 angiebt, die während der Expansion der in der Maschine eingeschlossenen Luft nach der isothermischen Curve ab von Aussen her aufgenommen wird. Bezieht man in Gl. (10) die aufgenommene Wärmemenge auf die Secunde und wird dieselbe mit Q_1'' bezeichnet, so stellt L die in der Secunde gewonnene Arbeit, in Meterkilogrammen gemessen, dar, und wenn man diese Arbeit, in Pferdestärken ausgedrückt, mit N bezeichnet, so ergiebt sich

$$N = \frac{Q_1''}{75 \cdot A T_1} (T_1 - T_2) \qquad (17)$$

und aus Gl. (9) folgt dann auch die Wärmemenge Q_2'', welche im Mittel in jeder Secunde von der arbeitenden Luft bei ihrer isothermischen Compression auf dem Wege cd (Fig. 41) nach Aussen hin abgegeben wird,

$$Q_2'' = \frac{T_2}{T_1} Q_1'' . \qquad (18)$$

§ 55. Der Process einer geschlossenen Luftmaschine zwischen zwei Paaren polytropischer Curven.

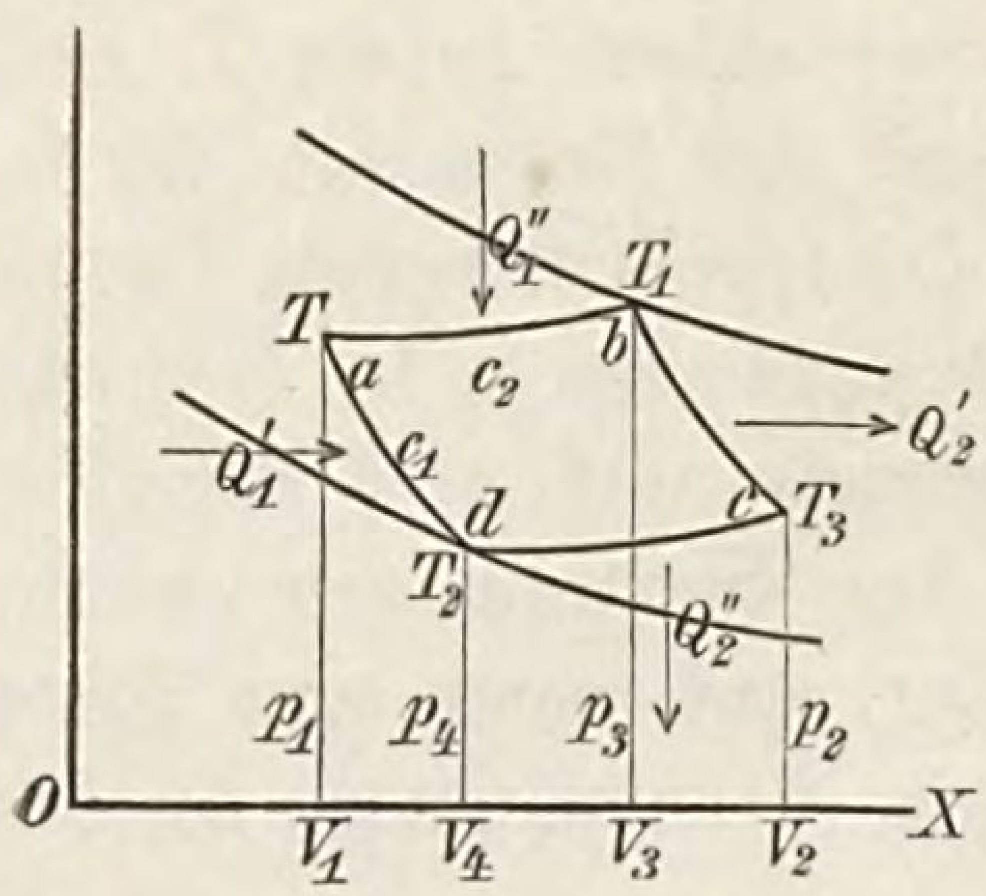
Es seien im Cylinder A (Fig. 42) a. f. S. links vom Kolben G kg Luft abgesperrt, das Anfangsvolumen sei V_4, der Druck p_4 und T_2 die Temperatur; es soll nun mit dieser Luftmenge der Kreisprocess $dabc$ vollführt werden, und zwar seien da und bc zwei polytropische Curven, welche dem Gesetze $pv^{n_1} =$ Const. unterworfen sind und die beiden Curven ab und cd ebensolche Curven, welche dem Gesetze $pv^{n_2} =$ Const. folgen. Für das erstere und

das andere Paar findet sich daher die specifische Wärme c_1 und c_2 beziehentlich (nach Gl. (4) S. 143)

$$c_1 = \frac{n_1 - \varkappa}{n_1 - 1}\, c_v \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{n_2 - \varkappa}{n_2 - 1}\, c_v \,. \tag{19}$$

Es sei nun die Temperatur T_2 im Punkte d die niedrigste und T_1 im Punkte b die höchste der im ganzen Process vorkommenden Temperaturen, wonach die den Eckpunkten a und c entsprechenden Temperaturen T und T_3 zwischen den Grenzwerthen liegen sollen.

Fig. 42.



Nach den in § 29 S. 144 gegebenen Sätzen über die polytropischen Curven finden sich nun nach Gl. (6) die auf die Gewichtseinheit Luft bezogenen Wärmemengen Q_1' und Q_2', welche längs der Strecke da zu- und auf bc abgeleitet werden, bez.

$$Q_1' = c_1\,(T - T_2) \quad \text{und} \quad Q_2' = c_1\,(T_1 - T_3)$$

und ebenso für die Strecken ab und cd

$$Q_1'' = c_2\,(T_1 - T) \quad \text{und} \quad Q_2'' = c_2\,(T_3 - T_2) \,.$$

Daher ist die ganze Wärmemenge Q_1, welche die G kg Luft aufnehmen,

$$Q_1 = G\left[c_1\,(T - T_2) + c_2\,(T_1 - T)\right] \tag{20}$$

und die Wärmemenge Q_2, welche sie abgeben,

$$Q_2 = G\left[c_1\,(T_1 - T_3) + c_2\,(T_3 - T_2)\right] \,. \tag{21}$$

Unter Benutzung von Gl. (7) S. 144 lassen sich leicht die Arbeitsquantitäten bestimmen, welche den einzelnen Curvenstrecken entsprechen; dieselben, in gehöriger Weise zusammengefasst, geben die Arbeit L, welche dem vollen Kreisprocess entspricht, wie sich leicht verfolgen lässt:

$$AL = (c_2 - c_1)\, G\,[T_1 - T + T_2 - T_3] \,, \tag{22}$$

welche Gleichung sich auch durch die Differenz $Q_1 - Q_2$ nach den Gl. (20) und (21) ergiebt.

Nun stehen aber die vier in diesen Formeln auftretenden Temperaturwerthe in einfacher Beziehung zu einander.

Legt man durch die Punkte d und b (Fig. 41) adiabatische Curven, so ist für jeden Uebergang von einem Punkte der ersten zu einem beliebigen Punkte der zweiten Adiabaten der Werth des Wärmegewichtes

$$P = \int \frac{dQ}{AT}$$

derselbe.

Man erhält daher im vorliegenden Falle für den Uebergang auf dem Wege dab (auf die Gewichtseinheit bezogen)

$$AP = \int_{T_2}^{T} c_1 \frac{dT}{T} + \int_{T}^{T_1} c_2 \frac{dT}{T}$$

und für den Uebergang auf dem Wege dcb

$$AP = \int_{T_2}^{T_3} \frac{c_2 \, dT}{T} + \int_{T_3}^{T_1} \frac{c_1 \, dT}{T} .$$

Durch Integration der Ausdrücke, die einfach ist, weil c_1 und c_2 bei polytropischer Aenderung Constante sind, und durch Gleichsetzen beider Ausdrücke findet sich, wie leicht verfolgt werden kann:

$$c_1 \operatorname{logn} \frac{T T_3}{T_1 T_2} = c_2 \operatorname{logn} \frac{T T_3}{T_1 T_2} ,$$

und diese Beziehung kann, da c_1 und c_2 verschiedene Werthe haben, nur bestehen, wenn der unter dem Logarithmus stehende Werth gleich der Einheit, also wenn

$$T T_3 = T_1 T_2 \tag{23}$$

ist. Da für die beiden Curvenstrecken ad und bc nach Gl. (5) S. 144 auch die Beziehungen

$$\frac{T}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{n_1 - 1} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{n_1 - 1}$$

bestehen, so folgt unter Berücksichtigung der vorstehenden Gl. (23) auch:

$$V_3 V_4 = V_1 V_2 , \tag{24}$$

und daraus leicht noch der Zusammenhang

$$p_3 p_4 = p_1 p_2 \,. \tag{25}$$

Denkt man sich nun die Grenztemperaturen T_1 und T_2 gegeben, so ergiebt sich für eine beliebige Zwischentemperatur T aus Gl. (23) die zweite Zwischentemperatur T_3 und wenn man deren Werth in Gl. (22) substituirt, so folgt die bei dem vorgelegten Kreisprocess gewonnene Arbeit L nach einfacher Reduction

$$A L = \frac{(c_2 - c_1) G}{T} (T_1 - T)(T - T_2) \,. \tag{26}$$

Sind für zwei Paare polytropischer Curven die Exponenten n_1 und n_2 und damit nach den Gln. (19) die entsprechenden specifischen Wärmen c_1 und c_2 bekannt, so lässt sich nach vorstehender Formel die Arbeit L berechnen, welche bei dem vorgelegten Kreisprocesse gewonnen wird, sobald neben den Grenztemperaturen T_1 und T_2 die Zwischentemperatur T bekannt und überdies das Gewicht G der arbeitenden Luft gegeben ist; nach Gln. (20) und (21) findet sich dann bei jedem einzelnen Processe die von der arbeitenden Luft aufgenommene Wärmemenge Q_1 und abgegebene Wärme Q_2. Ist endlich von den vier Druckwerthen $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ auch nur einer, z. B. p_1, gegeben, so finden sich leicht die übrigen; unter Zugrundelegung von Gl. (5) S. 144 fände sich beispielsweise p_4 und p_3 aus den Beziehungen

$$\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T}\right)^{\frac{n_1}{n_1 - 1}} \quad \text{und} \quad \frac{p_3}{p_1} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\frac{n_2}{n_2 - 1}} \,. \tag{27}$$

Der Druck p_2 ergiebt sich dann durch Gl. (25). Das Volumen der Luft in jedem der vier Eckpunkte des Indicatordiagrammes (Fig. 41) bestimmt sich endlich durch die allgemeine Gleichung

$$V p = G B T \,, \tag{28}$$

wenn man in dieselbe die entsprechenden Werthe von p und T einsetzt.

Die vorstehenden Untersuchungen umschliessen je nach der Wahl der Exponenten n_1 und n_2 in den Gleichungen der polytropischen Curven oder der entsprechenden Werthe der specifischen Wärmen c_1 und c_2 unendlich viele Einzelfälle und geben noch zu Specialuntersuchungen Anlass, die von technischer Wichtigkeit sind, weil sie für die Construction von Heissluftmaschinen auf bestimmte, praktisch verwerthbare Regeln führen.

Es möge zunächst angenommen werden, dass T_1 die obere Grenze der Temperatur bezeichnet, welche die in der Maschine enthaltene Luft während des ganzen Processes nicht überschreiten darf, wenn nicht nachtheilige Folgen für die Maschine selbst (z. B. mit Rücksicht auf die Schmier- und Dichtungsmaterialien) hervortreten sollen; es sei ferner T_2 die untere Temperaturgrenze, bei der überhaupt eine Wärmeentziehung (beispielsweise durch Kühlwasser) noch möglich ist, und es seien diese beiden Grenzwerthe gegeben; es seien fernerhin die beiden Paare von polytropischen Curven durch bestimmt angegebene Werthe der specifischen Wärmen c_1 und c_2 vorgeschrieben; dann zeigt ein Blick auf die Arbeitsgleichung (26), dass eine bestimmte Zwischentemperatur T vorliegen wird, bei welcher die gewonnene Arbeit L ein Maximum wird.

Die Differentiation von Gl. (26) in Hinsicht auf T ergiebt den entsprechenden Werth der erforderlichen Zwischentemperatur

$$T = \sqrt{T_1 T_2}$$

und die Substitution in Gl. (23) dann denselben Werth auch für die zweite Zwischentemperatur T_3; es soll also der Process so geleitet werden, dass

$$T = T_3 = \sqrt{T_1 T_2} \tag{29}$$

ausfällt, mit andern Worten, die beiden Eckpunkte a und c (Fig. 42) sollen auf ein und derselben Isothermen liegen. Unter dieser Voraussetzung giebt dann Gl. (26) das Maximum der Arbeit

$$AL = (c_2 - c_1)\, G\, [\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}]^2 \cdot \tag{30}$$

Aus Gl. (20) folgt die Wärmemenge Q_1, welche die arbeitende Luft aufgenommen hat,

$$Q_1 = G\,(c_1\sqrt{T_2} + c_2\sqrt{T_1})\,(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})\ , \tag{31}$$

und aus Gl. (21) die Wärmemenge Q_2, welche sie abgegeben hat:

$$Q_2 = G\,(c_1\sqrt{T_1} + c_2\sqrt{T_2})\,(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})\ . \tag{32}$$

Die vorstehenden Formeln umschliessen alle Fälle, die gewöhnlich nur einzeln der Untersuchung unterworfen worden sind. Wären z. B. in Fig. 42 die beiden Curven ad und bc adiabatische Linien, so wäre in allen vorstehenden Formeln $c_1 = 0$ zu substituiren; wären die beiden Curven ab und dc horizontale

Gerade, so wäre c_p für c_2 einzusetzen, d. h. die specifische Wärme der Luft bei constantem Drucke; oder man müsste die specifische Wärme bei constantem Volumen (c_v) für c_2 substituiren, wenn die Curvenstrecken ab und dc verticale gerade Linien wären. Es ist leicht und bedarf keiner weiteren Vorführung von Specialfällen, die Formeln in der angezeigten Richtung weiter zu verfolgen.

§ 56. Ueber den theoretisch vollkommenen Process der Heissluftmaschine.

Die im vorstehenden Paragraphen gegebenen Sätze führen auf wichtige Erweiterungen, wenn man die Frage stellt, welche polytropischen Curven in Anwendung kommen müssen, wenn man das Maximum der Arbeit aus einer gewissen gegebenen Wärmemenge Q_1, welche der Luft zugeführt wird, bei gegebenen Grenztemperaturen T_1 und T_2 erzielen will.

Betrachtet man auch das in der Maschine eingeschlossene Luftgewicht G als bekannt, so lässt sich schreiben

$$Q_1 = c_0 G (T_1 - T_2) , \tag{33}$$

wobei c_0 eine Hülfsgrösse ist, die sich aus dieser Gleichung leicht bestimmt, da alle übrigen Grössen als gegeben angesehen werden, deren Einführung in die Rechnung aber die Uebersicht der folgenden Untersuchungen wesentlich erleichtert. Unter Benutzung dieser Formel schreibt sich dann Gl. (20)

$$c_0 (T_1 - T_2) = c_1 (T - T_2) + c_2 (T_1 - T) \tag{33a}$$

und hieraus bestimmt sich für den in Fig. 42 dargestellten Process die Zwischentemperatur T:

$$T = \frac{(c_2 - c_0) T_1 + (c_0 - c_1) T_2}{c_2 - c_1} . \tag{33b}$$

Die Substitution dieses Werthes in die Arbeitsgleichung (26) giebt dann nach leicht zu verfolgenden Umformungen

$$\frac{AL}{G} = \frac{(T_1 - T_2)^2}{\dfrac{T_2}{c_2 - c_0} + \dfrac{T_1}{c_0 - c_1}} . \tag{34}$$

In dieser Gleichung sind bis auf die Werthe c_2 und c_1, die in der ganzen Entwickelung vom Anfange an als positive Grössen betrachtet wurden, alle Grössen bekannt. Der Arbeitswerth L ist nun ein Maximum, wenn der Nenner des Bruches auf der rechten Seite ein Minimum ist und das ist der Fall, wenn c_2 am grössten und c_1 am kleinsten, d. h. wenn

$$c_2 = \infty \quad \text{und} \quad c_1 = 0$$

ist. Bezeichnet man die entsprechende Maximalarbeit mit L_m, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung

$$\frac{A\,L_m}{G} = \frac{c_0\,(T_1 - T_2)^2}{T_1} \tag{35}$$

oder unter Benutzung von Gl. (33)

$$L_m = \frac{Q_1}{A\,T_1}\,(T_1 - T_2)\,. \tag{35a}$$

Nun entspricht aber der Bedingung $c_2 = \infty$ nach Gl. (19) $n_2 = 1$ und der Bedingung $c_1 = 0$ kommt der Werth $n_1 = \varkappa$ zu, woraus folgt, dass für eine gegebene Wärmemenge Q_1 und vorgeschriebene Temperaturen T_1 und T_2 das Maximum der Arbeit gewonnen wird, wenn in dem Indicatordiagramme (Fig. 42) die beiden Curven *ab* und *cd* isothermische und die beiden Curven *ad* und *bc* adiabatische Curven sind; die Wärmeaufnahme soll also auf dem Wege *ab* bei constanter höchster Temperatur T_1 und die Wärmeabgabe auf dem Wege *cd* bei constanter niedrigster Temperatur T_2 stattfinden; mit einfachen Worten, der Process muss der Carnot'sche Kreisprocess sein, der in § 54 schon besprochen worden ist.

Der vorstehende Satz enthält übrigens nichts Neues, da er in ganz allgemeiner Form bereits in Abschnitt I S. 50 gegeben worden ist; es erschien mir aber zweckmässig, in Rücksicht auf das weiter Folgende den Beweis des Satzes auch in einer Form zu geben, welche direct an die Betrachtung der calorischen Maschinen anschliesst und die Frage vom rein technischen Gesichtspunkte aus betrachtet.

Ich bezeichne, wozu die Berechtigung übrigens noch näherer Besprechung zu unterwerfen sein wird, die Grösse L_m in Gl. (35) oder (35a) als die disponible Arbeit der Heissluft-

maschine und beurtheile die Leistungsfähigkeit einer Luftmaschine, welche den in Fig. 42 S. 270 angegebenen Process zwischen zwei andern Paaren polytropischer Curven ausführt, durch den Vergleich der gewonnenen Arbeit L (nach Gl. 34) mit der disponiblen, indem ich, wie es im Maschinenfache Gebrauch, das Verhältniss beider Arbeitsquantitäten $L : L_m$ den Wirkungsgrad der betreffenden Maschine nenne. Bezeichnet man den Wirkungsgrad mit η, so findet sich nach den Gln. (34) und (35)

$$\eta = \frac{T_1}{\frac{c_0 T_2}{c_2 - c_0} + \frac{c_0 T_1}{c_0 - c_1}}, \tag{36}$$

wobei die Hülfsgrösse c_0 als durch Gl. (33) bestimmt vorausgesetzt wird, und die Zwischentemperaturen T und T_3 nach den Gln. (33b) und (23) durch die gegebenen Grössen G, Q_1, T_1, T_2, c_1 und c_2 vorgeschrieben sind.

Der Wirkungsgrad nähert sich, wie vorstehende Formel erkennen lässt, um so mehr der Einheit, je grösser c_2 und je kleiner c_1 gewählt wird; je mehr also das eine Curvenpaar sich in seinem Verlaufe der isothermischen Curve und das andere sich der adiabatischen Linie nähert. Statt vorauszusetzen, es sei die Wärmemenge Q_1 direct und damit c_0 indirect gegeben, kann man auch die Zwischentemperatur T als gegeben ansehen, und erhält dann die gewonnene Arbeit, wie früher durch Gl. (26), und dann die aufgenommene Wärmemenge Q_1 nach Gl. (33) und (33a)

$$Q_1 = G[c_1(T - T_2) + c_2(T_1 - T)], \tag{37}$$

hieraus die disponible Arbeit nach Gl. (35a)

$$A L_m = \frac{G}{T_1}[c_1(T - T_2) + c_2(T_1 - T)](T_1 - T_2)$$

und daher unter Benutzung von Gl. (26) den Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta = \frac{(c_2 - c_1)\, T_1 (T_1 - T)(T - T_2)}{T(T_1 - T_2)[c_1(T - T_2) + c_2(T_1 - T)]}. \tag{36a}$$

Setzt man, um die gewonnenen Ausdrücke an einem speciellen Falle zu erläutern, voraus, die beiden Curven ad und bc (Fig. 42 S. 270) seien adiabatische Linien, so ist in den vorstehenden

Ausdrücken $c_1 = 0$ zu setzen und man erhält nach Gl. (26) für die gewonnene Arbeit:

$$L = c_2 \frac{G}{AT}(T_1 - T)(T - T_2) , \tag{38}$$

für die aufgenommene Wärmemenge Q_1 nach Gl. (37)

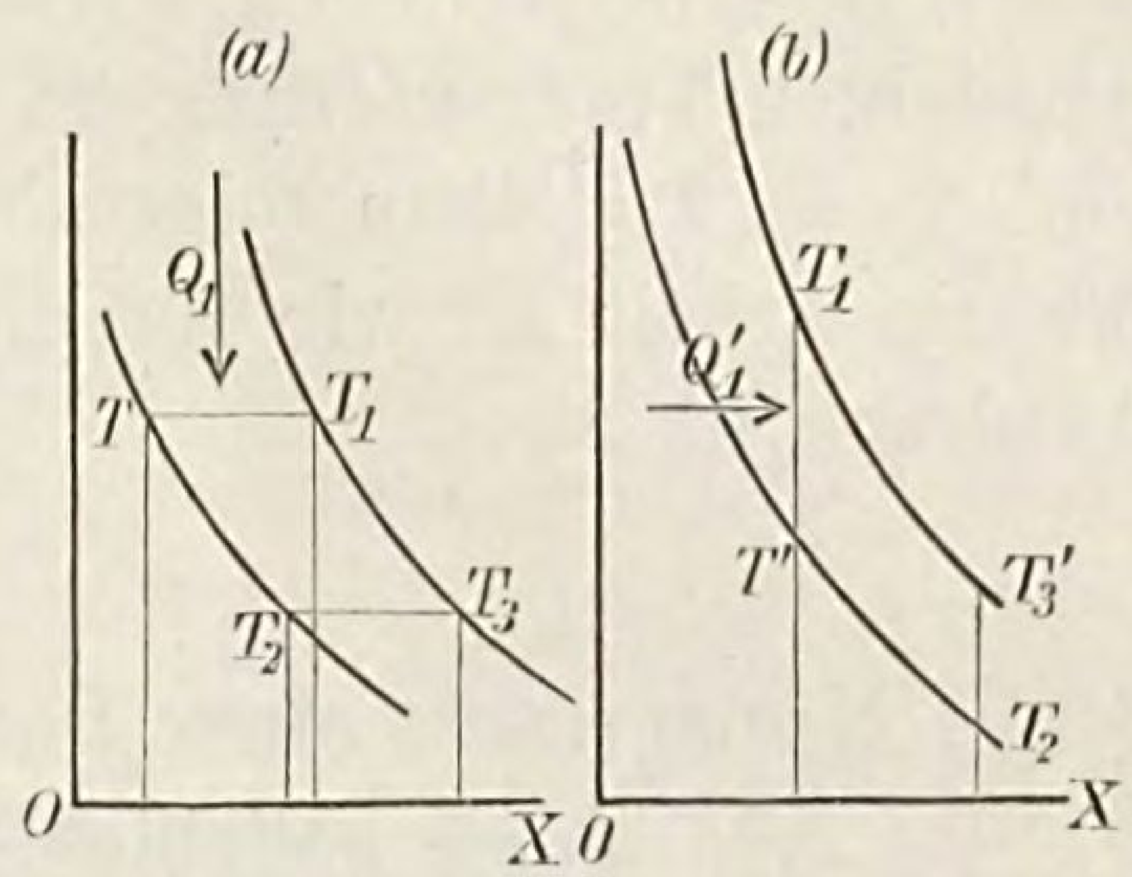
$$Q_1 = c_2 G (T_1 - T) , \tag{38a}$$

und für den Wirkungsgrad nach Gl. (36a)

$$\eta = \frac{T_1 (T - T_2)}{T (T_1 - T_2)} . \tag{38b}$$

Nimmt man nun bei weiterer Specialisirung an, die beiden Curven ab und dc seien einmal horizontale gerade Linien (Fig. 43a), ein zweites Mal verticale Geraden (Fig. 43b), so findet im erstern Falle die Wärmeaufnahme bei constantem Drucke, im andern Falle bei constantem Volumen statt; daher wäre in vorstehenden Formeln bez. c_p oder c_v für c_2 zu substituiren.

Fig. 43.



Bei gleichen Grenztemperaturen und bei gleicher Zwischentemperatur T würde bei beiden Processen der Wirkungsgrad der gleiche sein (nach Gl. 38b); wären aber beide Processe praktisch gleich leicht durchführbar, so würde man denjenigen vorziehen, welcher bei gleicher Wärmemenge Q_1 und gleichen Grenztemperaturen den höhern Wirkungsgrad ergäbe, und müsste daher nach Gl. (38a) verschiedene Zwischentemperaturen wählen; bezeichnet man die für den Process Fig. 43b zu wählende Zwischentemperatur T mit T' und den zugehörigen Wirkungsgrad mit η', so wäre

$$c_p (T_1 - T) = c_v (T_1 - T')$$

und

$$\eta' : \eta = \left(1 - \frac{T_1}{T'}\right) : \left(1 - \frac{T_2}{T}\right) .$$

Die erstere Gleichung ergiebt

$$T - T' = (\varkappa - 1)(T_1 - T) ,$$

woraus:

$$T' < T$$

und demnach:

$$\eta > \eta' .$$

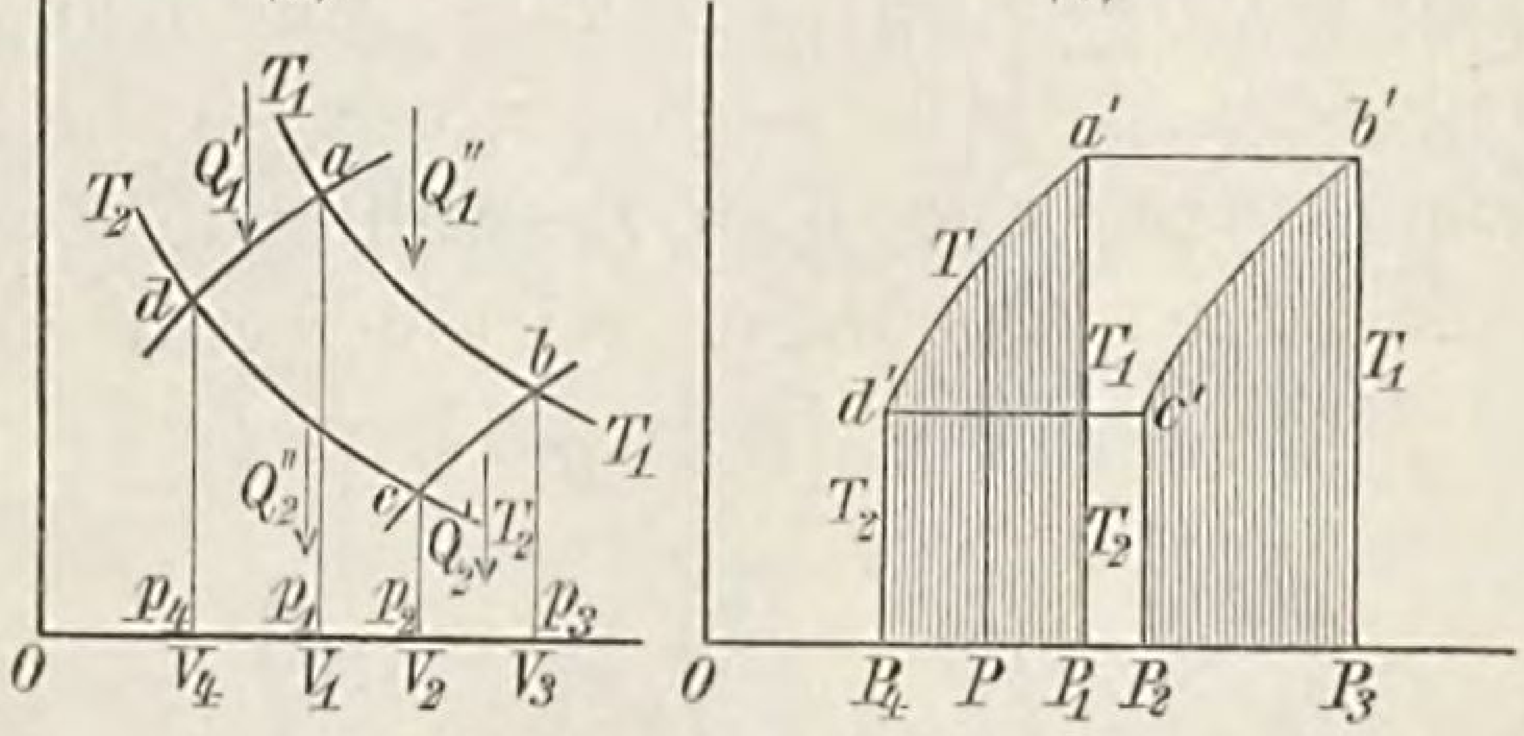
Von den beiden in Fig. 43a und Fig. 43b dargestellten Processen wäre hiernach der erstere vorzuziehen, wenn nicht andere praktische Gründe dagegen sprechen sollten.

Eine andere Specialisirung der allgemeinen Untersuchungen könnte darin bestehen, dass man in dem durch Fig. 42 S. 270 dargestellten Falle von der Annahme ausginge, dass die beiden Curven *ab* und *dc* isothermische Curven wären. Dieser Fall ist denn auch von so hervorragender technischer Bedeutung, dass ihm im folgenden Paragraphen eine besondere Untersuchung gewidmet werden soll und daher eine ausgedehntere Betrachtung des vorher behandelten Falles unterlassen worden ist; unter der gemachten Voraussetzung ist $c_2 = \infty$ und $n_2 = 1$, daher $T = T_1$ und $T_3 = T_2$; dann folgt aber nach Gl. (26), wie nach Gl. (33a) für die Arbeit L, wie für die Wärmemenge Q_1 der unbestimmte Ausdruck $0 . \infty$.

§ 57. Kreisprocess einer Luftmaschine zwischen zwei Isothermen und einem beliebigen Paar polytropischer Curven.

Der in Fig. 44a dargestellte Process einer Luftmaschine bestehe aus den beiden Isothermen *ab* und *cd*, wovon die erstere

Fig. 44.



der obern Temperaturgrenze T_1, die andere der untere Grenze T_2 entspreche. Die beiden andern Curven *da* und *bc* seien

zwei polytropische Curven gleicher Art vom Gesetze $p v^n = \text{Const.}$, für welches der Exponent n, welchem die specifische Wärme

$$c = \frac{(n - \varkappa)}{(n - 1)} c_v$$

entspricht, zunächst unbestimmt bleibe. Benutzt man die in der Fig. 44a angegebene Bezeichnung, so ist die ganze auf dem Wege *dab* aufgenommene Wärmemenge:

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' = G\left[c\,(T_1 - T_2) + A B T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}\right], \quad (39)$$

wenn man die für die isothermische Curve auf S. 132 gegebenen Sätze beachtet. Auf gleichem Wege erhält man für die Wärmemenge Q_2, die auf dem Wege *bcd* abgegeben wird,

$$Q_2 = Q_2' + Q_2'' = G\left[c\,(T_1 - T_2) + A B T_2 \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2}\right]. \quad (40)$$

Nun gilt aber für die beiden polytropischen Curven (S. 144) die Beziehung

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}},$$

und daher folgt auch:

$$Q_1 = G\left[c\,(T_1 - T_2) + A B T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right] \quad (39\,\text{a})$$

sowie

$$Q_2 = G\left[c\,(T_1 - T_2) + A B T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right], \quad (40\,\text{a})$$

und hiernach durch die Formel

$$A L = Q_1 - Q_2$$

die bei diesem Processe gewonnene Arbeit

$$L = G B (T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (41)$$

Beim vollkommenen Process würde nach Gl. (10) die Arbeit

$$L_m = \frac{Q_1}{A T_1} (T_1 - T_2)$$

gewonnen, wonach für vorliegende Maschinengattung unter Benutzung von Gl. (39a) und der bekannten Beziehung:

$$AB = c_v(\varkappa - 1)$$

der Wirkungsgrad η sich berechnet:

$$\eta = \frac{c_v(\varkappa - 1)\, T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{c(T_1 - T_2) + c_v(\varkappa - 1)\, T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}} \,. \tag{42}$$

Je nach dem vorausgesetzten Werthe von n und c liegen hier noch unendlich viele Fälle vor; speciell für $n = \varkappa$ und $c = 0$ gelangt man wieder auf den Carnot'schen Process.

Wäre die Maschine praktisch ausführbar, doppelt wirkend, machte dieselbe u Umdrehungen in der Minute und sollte sie eine Arbeit von N Pferdestärken entwickeln, so fände sich, wenn man Gl. (15) S. 268 in vorstehender Formel (41) benutzt,

$$GB(T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 30 \cdot 75 \cdot \frac{N}{u} \,, \tag{41a}$$

woraus sich für gegebene Grenztemperaturen das Luftgewicht G berechnet, welches in der Maschine eingeschlossen sein müsste, vorausgesetzt noch, dass auch das Pressungsverhältniss $p_1 : p_2$ angenommen wäre; dieses Verhältniss ist zwar willkürlich, darf aber nicht unter einen bestimmten Werth herabsinken. Die vorstehenden Formeln führen nur auf reelle Werthe, wenn der Ausdruck unter dem Logarithmus grösser, als die Einheit ist, es muss also durchaus die Beziehung:

$$\frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{43}$$

erfüllt sein. Ist dann von den vier Druckwerthen auch nur einer z. B. p_1 gegeben, so ist p_2 durch das gewählte vorstehende Druckverhältniss begrenzt, und die andern Werthe p_3 und p_4 ermitteln sich aus der schon benutzten Beziehung:

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \,. \tag{44}$$

Die entsprechenden Volumina bestimmen sich weiter durch den Ausdruck

$$Vp = BGT ,$$

wenn man die den vier Eckpunkten des Indicatordiagrammes (Fig. 44a) entsprechenden Werthe der Temperatur und des Druckes substituirt. Man erhält dann ein Maass für die Grösse des Maschinencylinders in dem vorgelegten Fall, immer vorausgesetzt, der ganze Process liesse sich in einer Maschine mit einem einzigen Cylinder wirklich praktisch durchführen.

Es wird sich übrigens unten Gelegenheit bieten, die vorstehenden Untersuchungen durch numerische Beispiele weiter zu erläutern.

Das in Fig. 44a S. 278 angenommene Indicatordiagramm ist in Fig. 44b abgebildet gedacht; zu diesem Zwecke ist (vergl. Abschnitt I S. 66 und die Sätze auf S. 151) das Wärmegewicht

$$P = G\int\frac{dQ}{AT}$$

von O aus als Abscisse und die Temperatur T als Ordinate aufgetragen worden. Die Abbildungen der beiden isothermischen Curven ab und cd sind hier durch die Horizontalen $a'b'$ und $c'd'$ gegeben, während sich für irgend einen Punkt der polytropischen Curven zu einem beliebigen zwischen den Grenztemperaturen liegenden Werth T der Temperatur (wegen $dQ = GcdT$) das Wärmegewicht

$$P = P_0 + \frac{c}{A}\,\text{logn}\, T$$

findet, wobei P_0 eine willkürlich gewählte Constante ist. Diese Gleichung repräsentirt die Abbildung $d'a'$ der polytropischen Curve da (Fig. 44a). (Vergl. S. 151.)

Allgemein gelten für die Abbildung irgend eines Punktes eines Indicatordiagrammes die Gln. (55) S. 128, wenn der vermittelnde Körper ein Gas ist. Benutzt man hier speciell Gl. (55c), in der Form

$$AP = AP_0 + c_p\,\text{logn}\, T - (c_p - c_v)\,\text{logn}\, p\,, \qquad (46)$$

so folgt für den Uebergang ab die Länge der Strecke $a'b'$ in Fig. 44b

$$a'b' = P_1 P_3 = (c_p - c_v) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3}$$

und für den Uebergang dc die Strecke $d'c'$

$$d'c' = P_4 P_2 = (c_p - c_v) \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2} ,$$

woraus wegen der Beziehung $p_1 p_2 = p_3 p_4$ sich $a'b' = c'd'$ herausstellt; die Abbildungen der beiden polytropischen Curven $d'a'$ und $b'c'$ sind daher horizontal äquidistant, wonach die von beiden Curven begrenzten Flächen, die in Fig. 44 b schraffirt sind, gleich gross sind, ein Satz der übrigens aus den Sätzen über die Abbildung direct folgt, denn die beiden schraffirten Flächen repräsentiren die in Arbeit gemessenen Wärmemengen Q_1' und Q_2' (Fig. 44) und oben wurde gefunden

$$Q_1' = Q_2' = c\,G\,(T_1 - T_2) .$$

Ebenso repräsentiren die beiden Rechteckflächen $a'b'P_3P_1$ und $d'c'P_2P_4$ die in Arbeit gemessenen Wärmemengen Q_1'' und Q_2'' und das Curvenviereck $a'b'c'd'$ stellt die gewonnene Arbeit L dar.

Ist die Curve da (Fig. 44 a) keine polytropische, sondern eine ganz beliebige Curve, so kann man doch sehr leicht auch in diesem Falle eine zweite Curve cb construiren unter der Voraussetzung, dass die Abbildungen beider Curven horizontal äquidistant sind, also ebenfalls gleiche Flächen umschliessen.

Ist nämlich für irgend einen Punkt der Curve da die Temperatur T und der Druck p und für den zugehörigen Punkt auf der Curve cb die Temperatur die gleiche, der Druck aber p', so gilt für erstern Punkt die Gl. (46), für den andern

$$AP' = AP_0 + c_p \operatorname{logn} T - (c_p - c_v) \operatorname{logn} p'$$

und die Differenz beider Gleichungen ist:

$$AP - AP' = (c_p - c_v) \operatorname{logn} \frac{p'}{p}$$

und dieser Werth wäre für alle Punkte derselbe, wenn

$$\frac{p'}{p} = \text{Const.}$$

Bezeichnet man diese Constante mit m, denkt man an die Gewichtseinheit Gas und bezeichnet man mit v und v' das Vo-

lumen, welches den zusammengehörigen Punkten entspricht, so gilt für den, einem gegebenen Punkte (pv) entsprechenden Punkt der zweiten Curve:

$$p' = mp \quad \text{und} \quad v' = \frac{v}{m},$$

wonach sich die zweite Curve leicht aus der ersten construiren lässt.

Rankine*) nennt zwei Curven, die in der angegebenen Weise zusammenhängen, isodiabatische; nach den vorstehenden Untersuchungen sind polytropische Curven jederzeit zugleich isodiabatisch, d. h. in ihren Abbildungen horizontal äquidistant. Diese Curven spielen in den weiteren Untersuchungen über die Luftmaschine eine wichtige Rolle.

§ 58. Ueber disponible Arbeit calorischer Maschinen überhaupt.

Die Untersuchungen in § 56 sowohl, wie die allgemeinen Betrachtungen in Abschnitt I S. 50 haben ergeben, dass diejenige Heissluftmaschine oder allgemeiner diejenige als Umtriebsmaschine wirkende calorische Maschine das Maximum der Arbeit liefert, welche den Carnot'schen Process ausführt. Dabei wurde aber ausdrücklich vorausgesetzt, dass die angenommenen Grenztemperaturen T_1 und T_2 sich auf den vermittelnden Körper, also bei der Luftmaschine auf die in der Maschine eingeschlossene Luft beziehen sollten und dass Q_1 die Wärmemenge sei, welche die Luft bei ihrer Expansion unter constanter höchster Temperatur T_1 aufnehme und Q_2 die Wärmemenge, welche sie bei der Compression unter constanter niedrigster Temperatur T_2 abgebe. Einem bestimmt vorgeschriebenen Werthe Q_1 entspricht dann das Maximum L_m der gewonnenen Arbeit nach der Formel

$$L_m = \frac{Q_1}{A\,T_1}(T_1 - T_2) \tag{47}$$

und das Wärmegewicht P ist für beide Uebergänge

$$P = \frac{Q_1}{A\,T_1} = \frac{Q_2}{A\,T_2}, \tag{48}$$

*) Rankine, A Manual of the Steam Engine. 1859. p. 345.

wonach sich auch schreibt:

$$L_m = P(T_1 - T_2) \,. \qquad (47\text{a})$$

Für diese Grösse ist die im Maschinenwesen gebräuchliche Bezeichnung disponible Arbeit eingeführt worden und die Maschine, welche in Wirklichkeit den Carnot'schen Process auszuführen vermöchte, wäre als theoretisch vollkommen anzusehen. Jede Abweichung von dem verlangten Process bei gleichem Werthe von Q_1 führt, wenn auch in demselben die gleichen Grenztemperaturen vorkommen, auf einen kleinern Werth der Arbeit L; das Verhältniss $L : L_m$, welches vorhin mit η und als Wirkungsgrad bezeichnet wurde, kann dann als Maass für die Güte der Maschine angesehen werden. Die Differenz

$$L' = L_m - L$$

bezeichne ich, wenn die Arbeitsquantitäten, wie dies bei Maschinen allgemein geschieht, auf die Secunde bezogen werden, als den Arbeitsverlust, welcher der Unvollkommenheit des Processes entspricht.

Dividirt man vorstehende Gleichung auf beiden Seiten mit L_m, so erhält man:

$$\zeta = 1 - \eta \,,$$

wobei in der Folge ζ als Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Processes bezeichnet werden soll.

Die obige Gl. (47) zeigt, dass bei gleicher Wärmemenge Q_1 die disponible Arbeit um so grösser ist, je weiter die Grenztemperaturen auseinander liegen, je grösser also das Temperaturgefälle $T_1 - T_2$ ist, und Gl. (47a) lässt ersehen, dass die Arbeit durch das Product aus Wärmegewicht und Gefälle zu messen ist.

Auf die Analogie, die hier bezüglich der Bestimmung der disponiblen Arbeit zwischen calorischen und hydraulischen Maschinen vorliegt, ist bereits auf S. 53 hingewiesen worden.

Hinsichtlich der Temperaturen T_1 und T_2 sind wir nun bei Luftmaschinen, die hier zunächst in Betracht fallen, auf ganz bestimmte Grenzen angewiesen; was zunächst die untere Temperaturgrenze T_2 betrifft, so ist man bezüglich dieser im Maschinenbetrieb an die Temperatur gebunden, welche diejenigen Körper besitzen, die man zur Abkühlung (Wärmeabgabe der arbeitenden

Luft an dieselben bei der Compression) benutzt; da hier ausschliesslich Kühlwasser von atmosphärischer Temperatur in Betracht fallen kann, so wäre als untere Temperaturgrenze die mittlere Temperatur der äussern atmosphärischen Luft, also etwa 15° C. oder $T_2 = 288°$ anzunehmen. Bezüglich der obern Grenze kommt die Art der Construction der Maschine in Betracht; wird zunächst und bis auf Weiteres angenommen, der Kolben bewege sich mit gewöhnlicher Dichtung im Cylinder, so kann man mit Rücksicht auf Erhaltung der Schmier- und Dichtungsmaterialien erfahrungsgemäss nicht wohl über 350° C., also über $T_1 = 623°$, mit der obern Temperaturgrenze hinausgehen; es wäre demnach nach der gemachten Annahme das Temperaturgefälle $T_1 - T_2 = 335°$ und dann nach Gl. (47) die Arbeit

$$L_m = 0{,}5377 \frac{Q_1}{A}$$

oder, wenn man für A seinen Werth 1 : 424 substituirt:

$$L_m = 228 \cdot Q_1 \ .$$

Bei diesem vollkommenen Processe entspricht also jeder Wärmeeinheit eine Arbeit von 228 mklg.

Denkt man an eine continuirlich arbeitende Maschine und drückt man die Arbeit in Pferdestärken aus (N_m), so ergiebt die Gl. (47) die Wärmemenge Q_1, welche s t ü n d l i c h von der arbeitenden Luft bei constanter höchster Temperatur aufgenommen wird,

$$Q_1 = \frac{3600 \cdot 75 \cdot A\, T_1}{T_1 - T_2}\, N_m \ ,$$

woraus beispielsweise für die angenommenen Temperaturgrenzen $Q_1 = 1184 \, . \, N_m$ folgt; hiernach wäre für den angenommenen Fall die aufgenommene Wärmemenge s t ü n d l i c h p r o P f e r d e s t ä r k e 1184 Calorien, während sich nach Gl. (48) die abgegebene, also die vom Kühlkörper aufgenommene Wärmemenge Q_2 ebenfalls stündlich pro Pferdestärke bestimmt, und zwar wäre $Q_2 = 547$ oder allgemein:

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1}\, Q_1 \, .$$

Diese letztere Wärmemenge ist nun nicht, wie es nach den ältern Anschauungen angenommen wurde, als ein Verlust

anzusehen, dessen Beseitigung durch Auffindung eines andern Processes und einer andern Anordnung der Maschine zu erwarten wäre, sondern diese Wärmemenge ist überhaupt technisch vollkommen werthlos, denn es ist Wärme von der niedrigsten Temperatur T_2, die nicht weiter auf andere Körper übertragbar ist. Man ersieht hieraus, dass der technische Werth, d. h. der Arbeitswerth der Wärme nicht allein nach der Anzahl der Wärmeeinheiten zu bemessen ist, die zur Verfügung stehen, sondern zugleich nach der Temperatur; der Arbeitswerth einer gewissen Wärmemenge ist um so grösser, je höher die Temperatur ist, unter welcher der in der Maschine arbeitende, vermittelnde Körper die Wärme aufzunehmen vermag. So klar und einfach die ganze Frage an sich ist und dem Maschineningenieur erscheinen muss, wenn noch die Analogie, auf welche bereits an mehreren Stellen oben hingewiesen wurde, in Betracht gezogen wird, so begegnet man doch heute noch in Schriften und Abhandlungen Anschauungen, die vollständigem Missverständniss der Lehren der mechanischen Wärmetheorie entspringen und ebenbürtig denen zur Seite zu stellen sind, welche noch immer die Möglichkeit des Perpetuum mobile festhalten.

Die Frage bespricht sich am Kürzesten in folgender Weise.

Bei der Verbrennung von einem Kilogramm Steinkohlen werden im Mittel 7500 Calorien Wärme frei; da nun der Wärmeeinheit eine Arbeit von 424 mkg entspricht, so, schliesst man unrichtiger Weise, steht in der Gewichtseinheit Steinkohlen eine Arbeit von $424 \cdot 7500 = 3\,180\,000$ mkg zur Verfügung und es ist nun Sache des Maschinen-Ingenieurs eine Maschine zu erdenken, welche diese Arbeit so vollkommen, wie möglich, ausnutzt. In dem letzten Jahrzehnt sind im Baue der Dampfmaschinen (Woolf- und Compound-Receiver-Maschinen mit Mantelheizung) Fortschritte gemacht worden, die denen der Watt'schen Zeit entsprechen und auf welche die mechanische Technik stolz sein darf; diese besten Maschinen geben aber noch nicht einmal den zehnten Theil der so eben berechneten Arbeit und daher wäre kein Anlass vorhanden, mit Befriedigung auf die angegebenen Fortschritte hinzublicken.

Denkt man sich zum Vergleich an einer bestimmten Stelle eines Flusses, der aus dem Gebirge des Binnenlandes nach dem Meere strömt, eine hydraulische Anlage mit Zufluss- und Abflusskanal, — die Spiegel beider Kanäle sollen bez. um T_1 und

T_2 Meter über dem Meeresspiegel liegen und das Wassergewicht, welches in der Secunde durch den Kanal geleitet werden kann, sei P kg, — dann ist die disponible Arbeit des hydraulischen Motors

$$L_m = P(T_1 - T_2) ,$$

also in gleicher Weise zu bestimmen, wie diejenige der calorischen Maschine nach Gln. (47) und (47a). Für den Besitzer dieser Wasserkraftanlage bilden die beiden Pegelstände, auf den Meeresspiegel als Nullpunkt bezogen, ebenfalls Grenzwerthe, denn derselbe wird den Wasserstand im Oberkanal durch Stauung so hoch wie möglich zu halten suchen, so hoch als es ihm nach dem Gesetze und nach den Verträgen mit seinem Nachbar oberhalb der Anlage zugelassen ist; andererseits wird er den Spiegel im Unterkanal so tief wie möglich legen, in der Wahl hierbei aber ebenfalls eingeschränkt sein, denn einmal muss das Wasser überhaupt abströmen können und dann muss es auch in Rücksicht auf die Rechte des nächsten Nachbars auf der Seite des Unterkanals in einem vorgeschriebenen Niveau abgegeben werden.

In der vorstehenden Formel bedeutet das Product PT_1 die Arbeit, die ihm von oben her geliefert wird und das Product PT_2 die Arbeit, die er nach der Seite des Unterkanales abgeben muss, die Differenz beider allein ist es, die ihm zur Benutzung, zur Disposition steht; nun wäre es absurd, die Arbeitsquantität PT_2 im vorliegenden Falle als einen Verlust anzusehen und die Güte der aufgestellten hydraulischen Umtriebsmaschine zu beurtheilen nach dem Theile der Arbeit, welchen sie von der Arbeitsquantität PT_1 in Wirklichkeit ausnutzt; dieses Verfahren wäre jedoch genau dasselbe, wie es vorhin bezüglich der angegebenen Beurtheilung calorischer Maschinen von Einzelnen noch aufrecht erhalten wird.

Führt man in Gl. (47) den Werth von A ein, so schreibt sich diese Gleichung auch in folgender Form

$$L_m = 424 \cdot Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) , \tag{47b}$$

und aus ihr erkennt man, dass die bezeichnete unrichtige Bestimmung der disponiblen Arbeit nur dann einen Sinn hätte, wenn man sich im Carnot'schen Process der untern Temperaturgrenze $T_2 = 0$ oder nach Celsius gemessen $t_2 = -273^\circ$ zu nähern vermöchte; in Wirklichkeit liegt aber aus bereits erwähnten Grün-

den diese Grenze weit höher, und es wäre bei Luftmaschinen $t_2 = 15^\circ$ C. oder $T_2 = 288^\circ$, dagegen bei Dampfmaschinen, bei welchen t_2 die Temperatur im Condensator darstellt, die im Mittel zu 40° C. anzunehmen ist, $T_2 = 313^\circ$ zu setzen. (Bei Dampfmaschinen ohne Condensation ist sogar $T_2 = 373^\circ$, weil Wasserdampf von atmosphärischer Pressung die Temperatur von $t_2 = 100^\circ$ C. hat.)

Soweit überhaupt die untere Grenze T_2 in Frage kommt, sind wir für alle Zeiten an die angegebene Grenze gebunden und jeder Gedanke an eine Verbesserung der Maschine durch Veränderung dieser Verhältnisse ist von vornherein vom mechanisch-technischen Standpunkte aus als unausführbar zu verwerfen; wenn auch durch die Kälteerzeugungsmaschine der heutigen Zeit sehr grosse Temperaturerniedrigungen erzielt werden können, so wird doch kein Ingenieur an eine Combination dieser Maschinen mit den calorischen Betriebsmaschinen denken, denn die Verhältnisse würden so liegen, wie wenn der oben erwähnte Besitzer einer Wasserkraftanlage durch Abteufung eines Schachtes den Unterwasserspiegel senken und die Verbesserung seiner Anlage dadurch erzielen wollte, dass er durch Pumpen das Wasser aus dem Schachte wieder in das Niveau des Unterkanales heben wollte.

Ganz anders liegt aber die Frage in Bezug auf die obere Temperaturgrenze T_1: ein Blick auf die Gl. (47b) zeigt, dass bei vorgeschriebenem Werthe von T_2 die Arbeit L_m um so grösser ausfällt, je höher die Temperatur T_1 ist.

Hierbei ist aber wohl zu beachten, unter welchen Voraussetzungen die angegebene Formel für die disponible Arbeit der calorischen Maschinen nach Carnot's Princip entwickelt wurde; es ist nämlich schon oben ganz ausdrücklich betont worden, dass sich die Temperaturgrenzen T_1 und T_2 auf den vermittelnden Körper, also bei Luftmaschinen auf die in der Maschine arbeitende Luft beziehen sollen und oben wurde beispielsweise für eine Luftmaschine die obere Temperaturgrenze zu 350° C. oder zu $T_1 = 623^\circ$ in Hinweis darauf angesetzt, dass die Schmier- und Dichtungsmaterialien im Arbeitscylinder der Maschine eine höhere Temperatur nicht zulässig erscheinen lassen.

Aehnlich verhält es sich bei Dampfmaschinen, bei denen aber die obere Temperaturgrenze (Temperatur von Wasser und Dampf

im Kessel) aus Gründen, die später nähere Besprechung finden werden, lange nicht einmal den Werth erreicht, der im Vorstehenden für die Luftmaschine angenommen wurde.

Eine bedeutsame Erweiterung erleidet aber jetzt die ganze Frage, wenn man sein Augenmerk nicht den Temperaturverhältnissen und dem Verhalten des vermittelnden Körpers zuwendet, sondern zugleich diejenigen Körper ins Auge fasst, welche in dem einen Theile des Processes Wärme an den vermittelnden Körper abgeben und im andern Theile von diesem aufnehmen; der Wärme abgebende Körper mag in der Folge, der Kürze wegen, als Heizkörper, der andere, der Wärme aufnehmende, als Kühlkörper bezeichnet werden.

In allen vorstehenden Untersuchungen ist zunächst stillschweigend angenommen worden, dass der Heizkörper eine Temperatur habe, die höher sei, als die höchste Temperatur T_1, die im Processe vorkommt und dass die Temperatur des Kühlkörpers unter der niedrigsten Temperatur T_2 liege, weil ja nur unter diesen Voraussetzungen an die in Betracht gezogenen Wärmeübertragungen zu denken ist.

Von den hierbei auftretenden Temperaturdifferenzen zwischen dem Heizkörper und dem vermittelnden Körper, sowie zwischen dem letztern und dem Kühlkörper ist dagegen noch nicht die Rede gewesen; in dieser Beziehung liegen aber bezüglich des Kühlkörpers die Verhältnisse einfach und geben nur zu wenig Bemerkungen Anlass; für die Temperatur des Kühlkörpers wird die mittlere atmosphärische Temperatur zum Anhalt zu nehmen sein und daher wird, wie es bereits bei den obigen Erörterungen geschehen ist, auch die untere Temperaturgrenze t_2 in dem betrachteten Processe als nahezu mit der atmosphärischen Temperatur übereinstimmend angesehen werden können.

Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse bezüglich der erstgenannten Temperaturdifferenz. Bei den gewöhnlichen Heizanlagen, liege nun Gasheizung oder Wärmeerzeugung durch Verbrennung fester Brennmaterialien vor, besteht der Heizkörper aus den durch die Verbrennung unter Luftzuführung erzeugten Feuergasen, die ihre Wärme durch die Gefässwandungen (durch Wandungen der Arbeitscylinder oder der Kessel) an den vermittelnden Körper der calorischen Maschinen abgeben. In den gedachten Fällen liegt im Allgemeinen die Temperatur der Feuer-

gase weit über der obern Temperaturgrenze T_1, die oben für den vermittelnden Körper als gebräuchliche und noch zulässige angegeben worden ist; bei den hierher gehörigen Maschinen, zu denen die wichtigsten Umtriebsmaschinen einschliesslich der Dampfmaschinen zu rechnen sind, ist aber nichtsdestoweniger bei der Berechnung der disponiblen Arbeit unter Benutzung obiger Gl. (47b) für T_1 die obere Temperaturgrenze des vermittelnden Körpers, also die Temperatur einzuführen, mit welcher die Wärme in die Maschine eintritt. In den Feuergasen, also dem eigentlichen Heizkörper, steht allerdings Wärme von wesentlich höherer Temperatur zur Verfügung und daher wird mit dem hier vorliegenden Temperaturfall ein gewisser Arbeitsverlust verbunden sein, den man unter Umständen der Maschine selbst zur Last legen könnte; es erscheint aber angemessen und für den Einblick in die Verhältnisse übersichtlicher, die Beurtheilung der Leistungsverhältnisse der Maschine selbst in der oben angegebenen Art festzuhalten und unter Berücksichtigung der zuletzt erwähnten Verhältnisse noch einen besondern Wirkungsgrad, welcher als der der Feuerungsanlage bezeichnet werden mag, einzuführen.

Bezeichnet man mit L_0 den Arbeitswerth der Wärme im Heizkörper, mit L die Arbeit der Maschine und mit L_m die disponible Arbeit der letzteren im obigen Sinne, die Werthe auf die gleiche Zeit bezogen, so finden sich die erwähnten Wirkungsgrade η und η_0:

$$\eta = \frac{L}{L_m} \quad \text{und} \quad \eta_0 = \frac{L_m}{L_0}\,, \tag{49}$$

von denen der erstere sich auf die Maschine, der andere auf die Heizanlage bezieht.

Es steht nun nichts im Wege, die Arbeit L der Maschine direct mit dem Arbeitswerthe L_0 des Heizkörpers zu vergleichen und das Verhältniss η' dieser beiden Grössen, für welches die vorstehenden beiden Ausdrücke

$$\eta' = \eta\eta_0 = \frac{L}{L_0} \tag{50}$$

ergeben, als Wirkungsgrad der Maschine zu bezeichnen, wofür im Weiteren die Bezeichnung »Wirkungsgrad der ganzen Anlage« oder »Gesammt-Wirkungsgrad« benutzt werden wird.

Dem Praktiker liegt auch wirklich der Gedanke näher, die Frage in der zuletzt angedeuteten Weise zu behandeln und die

Arbeit der Maschine unmittelbar mit der Menge des verbrauchten Brennmateriales zu vergleichen; für ein eingehendes Studium der ganzen Anlage ist es aber zweifellos vortheilhafter, die Behandlung der Frage so zu trennen, wie dies die Gln. (49) zum Ausdruck bringen. In dem Werthe η spiegelt sich jede constructive Aenderung der Maschine und jede Aenderung im Processe derselben ab, während die Grösse des Werthes η_0 als Maass für die Güte der Heizungsanlage und der Heizungsmethode Geltung hat; nur durch solch getrennte Behandlung kann erkannt werden, ob die nächste wirksame Verbesserung einer Anlage, also die Erhöhung des Gesammtwirkungsgrades η', nach der einen oder nach der andern Richtung, an der Betriebsmaschine selbst oder an der Heizungsanlage, angestrebt werden muss.

Hierzu ist allerdings noch zu bemerken, dass der Arbeitswerth L_0 der Wärme im Heizkörper nicht nach den bereits entwickelten Formeln bestimmt werden kann, die Bestimmung desselben vielmehr besonderer Voruntersuchungen bedarf, auf welche jedoch erst weiter unten eingegangen werden soll; insbesondere sind es die Dampfmaschinen, die verbreitetsten aller Umtriebsmaschinen, bei denen der Vortheil der angegebenen getrennten Behandlung hervortritt. Bei den Heissluftmaschinen treten dagegen allerdings oben noch nicht berührte Anordnungen auf, bei denen die Beurtheilung nach Gl. (50) statt nach den beiden Gln. (49) erfolgen müsste; es sind das diejenigen Maschinen, bei denen der Arbeitsprocess mit dem Verbrennungsprocess gewissermaassen vereinigt und im gleichen Raume ausgeführt wird (Feuerluftmaschinen), und als deren Repräsentant die Leuchtgas- (Explosions-) Maschine anzusehen ist, die im Folgenden ebenfalls noch besonderer Betrachtung unterworfen werden wird.

§ 59. Praktische Unausführbarkeit des Carnot'schen Processes bei Luftmaschinen.

Bei der Besprechung des Carnot'schen Processes in § 54 unter Zugrundelegung der Fig. 41 auf S. 265 und der theoretisch vollkommenen Heissluftmaschine in § 56 S. 274 ist vorausgesetzt worden, dass die vier einzelnen Theile des Processes in ein und demselben Cylinder, dem Arbeitscylinder, ausgeführt

werden sollen; eine solche Annahme und Forderung ist aber praktisch unerfüllbar; denkt man auch nur an die ersten beiden Theile des Processes, — im ersten Theile soll die Luft bei constanter oberer Temperatur erhitzt werden, im zweiten Theile adiabatisch expandiren, bis die untere Temperaturgrenze erreicht ist, — so erscheint bereits diese Forderung wegen des Einflusses der Cylinderwandungen unerfüllbar, da dieselben im zweiten Theile des Processes an der der Adiabaten der Luft entsprechenden Temperaturerniedrigung unter Wärmeabgabe an die Luft Theil nehmen werden; noch weniger wird der dritte und vierte Theil des Processes im gleichen Raume ausgeführt werden können.

Diese Schwierigkeiten lassen sich aber, wenigstens theilweise, überwinden und werden auch in der That bei den praktischen Ausführungen der Luftmaschine (wie der Dampfmaschine) nahezu dadurch umgangen, dass man die einzelnen Theile des Processes in mindestens zwei, meist in drei verschiedenen Räumen vollführt, indem man das arbeitende Luftquantum aus einem Raume nach dem andern schiebt und dazu Maschinenanordnungen trifft, wie sie noch Besprechung finden sollen.

Die in der Ueberschrift hervorgehobene Unausführbarkeit des Carnot'schen Processes ist vielmehr in andern Dingen begründet.

Unter Zugrundelegung von Fig. 41 S. 265 ergab sich nach Gl. (8) S. 267 die Arbeit L der Maschine bei einem Spiele:

$$L = GB(T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}},$$

in welcher Formel T_1 und T_2 die Grenztemperaturen bezeichneten, während p_1 den grössten und p_2 den kleinsten im Processe vorkommenden Druck darstellt. Nun führt aber diese Formel nur dann für die Arbeit auf einen positiven Werth, wenn der unter dem Logarithmus stehende Werth grösser als Eins ist, es muss demnach das Pressungsverhältniss $p_1 : p_2$ unter allen Umständen so gewählt werden, dass

$$\frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \tag{51}$$

ist. Setzt man hier beispielsweise die Grenztemperaturen, wie

auf S. 285 erwähnt wurden, $T_2 = 288^0$ und $T_1 = 623^0$, so findet sich mit $\varkappa = 1{,}410$

$$\frac{p_1}{p_2} > 14{,}20 .$$

Könnte man, was ja als zweckmässig hervorgehoben worden ist, die obere Temperaturgrenze T_1 erhöhen, z. B. auf $T_1 = 1000^0$ (nach Celsius einer Temperatur $t_1 = 1000 - 273 = 572^0$ entsprechend), was etwa dadurch zu ermöglichen wäre, dass man die in der Maschine arbeitende heisse Luft nicht direct mit dem eigentlichen Arbeitskolben in Berührung bringen würde, so fände sich nach Gl. (51) sogar

$$\frac{p_1}{p_2} > 72{,}30 .$$

Hält man sich auch nur an die zuerst gewählten Temperaturgrenzen, so müsste, wenn der niedrigste im Processe vorkommende Druck p_2 zu einer Atmosphäre angenommen würde, der grösste Druck p_1 mehr als 14 Atmosphären betragen; bei solchen Pressungen ist es aber unmöglich, die Luft in der Maschine zurückzuhalten, da dieselbe durch die Poren in den Metallwandungen entweicht. (Dämpfe verhalten sich in dieser Beziehung ganz anders, dieselben condensiren sich beim Eintritte in die Poren und bilden daher ein Dichtungsmittel für den in der Maschine arbeitenden Dampf.)

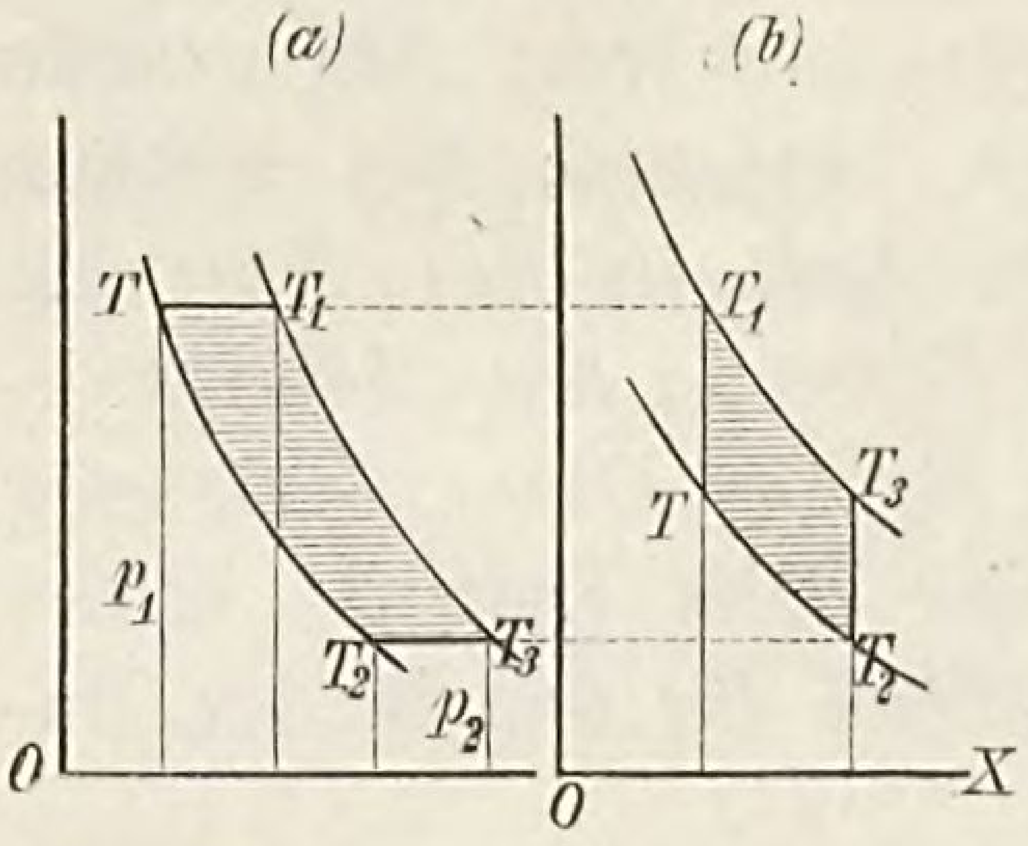
Wollte man dagegen mit der obern Druckgrenze herabgehen, so müsste der untere Druck weniger als der Atmosphärendruck betragen; würde beispielsweise p_1 zu 4 Atmosphären angenommen, so müsste nach dem oben berechneten Druckverhältnisse der untere Druck p_2 weniger als 0,28 Atmosphären betragen; in diesem Falle würde aber ein Eindringen der äussern atmosphärischen Luft in das Innere der Maschine unvermeidlich sein, ganz abgesehen davon, dass auch noch beim Herabgehen auf so geringe Luftpressungen sich ganz unförmliche und unpraktische Maschinendimensionen nöthig machen würden. Noch weit ungünstiger würden sich die Verhältnisse gestalten, wenn man mit der obern Temperaturgrenze weiter, als hier angenommen, gehen wollte und könnte.

Aus den letzten Bemerkungen geht hervor, dass man bei Heissluftmaschinen auch noch an gewisse Druckgrenzen gebunden

ist, dass aber diejenigen, wie sie die vollkommene Maschine fordert, praktisch unerreichbar sind. Wenn daher der Gedanke aufgegeben werden muss, Luftmaschinen auszuführen, welche den Carnot'schen Process vollführen, so scheint auf den ersten Augenblick nichts andres übrig zu bleiben, als einen andern Kreisprocess in Anwendung zu bringen und damit zugleich den Arbeitsverlust, welcher der Unvollkommenheit dieses Processes d. h. dem Umstande entspringt, dass er vom Carnot'schen Processe abweicht, mit in den Kauf zu nehmen.

Im Obigen sind bereits eine Reihe solcher Processe untersucht worden, von denen einige hier wiederholt Betrachtung finden sollen, nur unter der Erweiterung, dass nicht nur die Grenztemperaturen T_1 und T_2, sondern auch noch eine obere und eine untere Grenze des Druckes, also p_1 und p_2, vorgeschrieben sind.

Fig. 45.



Sei zunächst angenommen, in den Figuren 45 a und b seien $T_1\,T_3$ und $T\,T_2$ adiabatische Curven und es seien die den Punkten T_1 und T_2 entsprechenden Grenzwerthe des Druckes p_1 und p_2 gegeben, so findet sich für den in Figur 45 a gezeichneten Fall, in welchem die beiden polytropischen Curven $T\,T_1$ und $T_2\,T_3$ horizontale Gerade sind (Mittheilung und Entziehung der Wärme bei constantem Drucke), nach den Sätzen über die adiabatische Curve die Zwischentemperatur aus der Formel

$$\frac{T}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \qquad (52)$$

In dem durch Fig. 45 b gegebenen Falle, in welchem die Curven $T\,T_1$ und $T_2\,T_3$ verticale gerade Linien sind, also Mittheilung und Entziehung von Wärme bei constantem Volumen erfolgt, findet sich dagegen, wenn p der Druck im Punkte der Zwischentemperatur T ist,

$$\frac{T}{T_2} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}$$

und hieraus durch Elimination des Druckes p zur Bestimmung der Zwischentemperatur T die Gleichung

$$\frac{T}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1}\right)^{\varkappa - 1} . \tag{52a}$$

Nun ergab sich aber allgemein für den Kreisprocess zwischen zwei Adiabaten und zwei beliebigen polytropischen Curven nach Gl. (38b) S. 277 der Wirkungsgrad der betreffenden Maschine

$$\eta = \frac{T_1(T - T_2)}{T(T_1 - T_2)} ,$$

wonach sich der Wirkungsgrad für jeden der beiden im Vorstehenden behandelten Fälle bestimmt, wenn man die Zwischentemperatur T nach Gl. (52) bez. Gl. (52a) ermittelt und substituirt.

Wählt man, wie in frühern Beispielen, die Grenztemperaturen $T_1 = 623^0$ und $T_2 = 288^0$ (nach Celsius $t_1 = 250^0$, $t_2 = 15^0$) und nimmt man an, bei einem untern Drucke $p_1 = 1$ Atmosphäre sei als Druck der obern Grenze $p_1 = 5$ Atmosphären praktisch noch zulässig, so berechnet sich die Zwischentemperatur nach Gl. (52)

$$T = 460^0 \quad \text{und} \quad t = 187^0 \text{ C.}$$

und nach Gl. (52a)

$$T = 406^0 \quad \text{und} \quad t = 133^0 \text{ C.} ,$$

und daher nach vorstehender Gleichung der Wirkungsgrad für die Maschinenanordnung, welche dem Kreisprocess Fig. 45a entspricht,

$$\eta = 0{,}695 ;$$

dagegen unter Zugrundelegung des Processes in Fig. 45b

$$\eta = 0{,}541 .$$

Hiernach beträgt gemäss den Bemerkungen auf S. 284 der Effectverlust in Folge der Unvollkommenheit des Processes, nämlich $\zeta = 1 - \eta$, im erstern Falle $\zeta = 0{,}305$, im andern $0{,}459$; mit andern Worten, bei dem Processe Fig. 45a gehen $30{,}5\,\%$ und bei dem Processe Fig. 45b gehen $45{,}9\,\%$ der disponibeln Arbeit verloren, allein nur deshalb, weil die Maschine nicht den vollkommenen Process nach Carnot ausführt; rechnet man hierzu

alle diejenigen Arbeitsverluste, die bei der wirklichen Aufstellung der Maschine im Uebrigen noch auftreten werden, so müssen die betreffenden Maschinenanordnungen, soweit sie überhaupt praktisch ausführbar sind, von vorn herein als sehr unvollkommen bezeichnet werden.

Nicht ohne Wichtigkeit ist es für den Uebergang zu den nächstfolgenden Untersuchungen als besonderen Fall noch denjenigen zu behandeln, bei welchem die beiden adiabatischen Curven $T T_2$ und $T_1 T_3$ der Figuren 45a und b durch isothermische Curven ersetzt werden. Es seien demnach bei der folgenden Betrachtung die Zwischentemperaturen

$$T = T_2 \quad \text{und} \quad T_3 = T_1 ;$$

in diesem Falle gelten die in § 57 S. 278 entwickelten Formeln, wobei für den in Fig. 45a dargestellten Fall $c = c_p$ und $n = 0$ zu setzen ist; nach Gl. (42) ergiebt sich daher der Wirkungsgrad, wie leicht verfolgt werden kann

$$\eta = \frac{\operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}}{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} + \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}} . \tag{53}$$

Dagegen ergiebt dieselbe Gl. (42) für den in Fig. 45b vorausgesetzten Fall, wenn man $c = c_v$ und $n = \infty$ substituirt:

$$\eta = \frac{\operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}}{\frac{1}{\varkappa - 1} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} + \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}} . \tag{53a}$$

Wählt man dieselben Grenztemperaturen und Grenzpressungen, wie im vorher behandelten Falle, so ergiebt Gl. (53) für die Maschine Fig. 45a $\eta = 0{,}465$ und Gl. (53a) für den Process nach Fig. 45b $\eta = 0{,}390$, also in beiden Fällen eine noch ungünstigere technische Verwerthung der Wärme, wie in den vorhergehenden.

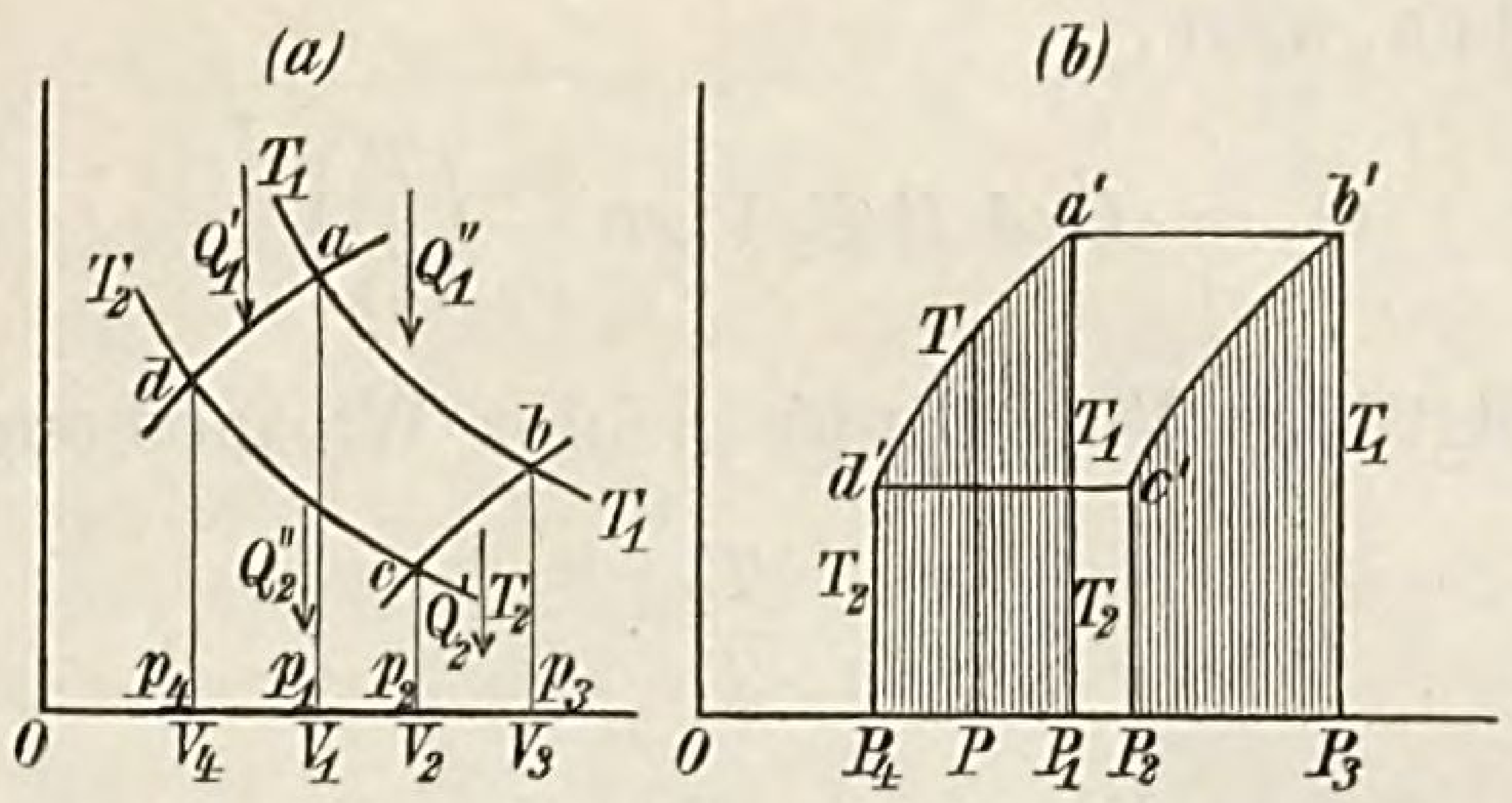
Unter solchen Umständen scheint nach allen im Vorstehenden vorgeführten Untersuchungen der Beweis geliefert, dass die Bestrebungen, durch die Heissluftmaschine die Dampfmaschine zu verdrängen oder wenigstens unter gewissen Verhältnissen mit

Vortheil zu ersetzen, wenig oder eigentlich keine Erfolge erwarten lassen, — und doch wird eine weitere Verfolgung der Frage, wie die Untersuchungen der folgenden Paragraphen ergeben werden, gerade das Gegentheil beweisen.

§ 60. Theorie des Regenerators.

Zur gründlichern Betrachtung werde noch einmal derjenige Kreisprocess herangezogen, der bereits in § 57 S. 278 untersucht wurde und der aus zwei isothermischen Curven und einem

Fig. 46.



Paare polytropischer Curven beliebiger Art zusammengesetzt war; in Fig. 46 ist die Figur 44 wiederholt worden, in welcher Fig. 46a den gedachten Kreisprocess und Fig. 46b dessen Abbildung giebt. Nun ist a. a. O. (S. 279) gezeigt worden, dass die Wärmemenge Q_1, welche auf dem Wege *dab* der in der Maschine befindlichen Luft zuzuführen ist, nach Gl. (39a) sich findet:

$$Q_1 = G\left[c(T_1 - T_2) + AB\,T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]$$

und die Wärmemenge Q_2, welche auf dem Wege *bcd* abzuleiten ist, findet sich nach Gl. (40a)

$$Q_2 = G\left[c(T_1 - T_2) + AB\,T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right].$$

In der erstern Gleichung bedeutet des erste Glied $Gc(T_1 - T_2)$ die Wärmemenge, die auf dem Uebergange *da* von der einen Isothermen zur andern zuzuführen ist und dasselbe Glied der zweiten Gleichung, welches ebenfalls $Gc(T_1 - T_2)$ ist, die Wärme-

menge, welche auf dem Wege *bc*, d. h. auf dem Rückwege von der zweiten Isothermen zu der ersten, wieder abzuführen ist.

Könnte man nun diese letztere Wärmemenge regelmässig beim Rückgange auf *bc* in einem Körper aufspeichern, um sie beim nächstfolgenden Processe auf dem Hinwege *da* wieder zu benutzen, so würde sich nach den beiden vorstehenden Gleichungen die Wärmemenge Q_1, welche von aussen, d. h. vom Heizkörper her, zuzuleiten ist, nur noch ergeben:

$$Q_1 = G A B T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{54}$$

und die Wärmemenge Q_2, die auf dem Wege *cd* an den Kühlkörper abzugeben wäre,

$$Q_2 = G A B T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \tag{55}$$

und hieraus folgt das Verhältniss beider Wärmemengen

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} . \tag{56}$$

Nun war aber für vorliegenden Process die gewonnene Arbeit nach Gl. (41) S. 279

$$L = G B (T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} . \tag{57}$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch Gl. (54), so folgt sehr einfach

$$L = \frac{Q_1}{A T_1} (T_1 - T_2) . \tag{58}$$

Diese Gln. (56) und (58) stimmen genau mit den Formeln überein, welche für die vollkommene Maschine, die einen Carnot'schen Process ausführt, gefunden worden sind.

Es giebt daher, vorausgesetzt, dass für den vermittelnden Körper bestimmte Grenztemperaturen vorgeschrieben sind, unendlich viele Processe, durch welche das Maximum der Arbeit wie beim Carnot'schen Processe gewonnen werden kann, wenn man nur die beiden Adiabaten des letzteren durch ein beliebiges Paar polytropischer Curven ersetzt und die Möglichkeit der vorausgesetzten Wärmeaufspeicherung

gegeben ist; ja das polytropische Curvenpaar kann sogar eine beliebige Curvengattung sein, wenn die beiden Curven nur isodiabatisch sind. (Vergl. Schlussbemerkung in § 57 S. 283.) Damit würden aber auch alle Schwierigkeiten fortfallen, welche sich nach den obigen Darlegungen (§ 59) der praktischen Ausführbarkeit des Carnot'schen Processes bei Luftmaschinen entgegenstellten; die theilweise Hebung dieser Schwierigkeiten ist der Technik in der That durch die Anwendung des Regenerators ermöglicht*).

Es stelle AB (Fig. 47) a. f. S. den Regenerator, d. h. ein prismatisches Gefäss dar, welches gleichmässig mit einem dichten Drahtgewebe (das sich bei Heissluftmaschinen auch durch

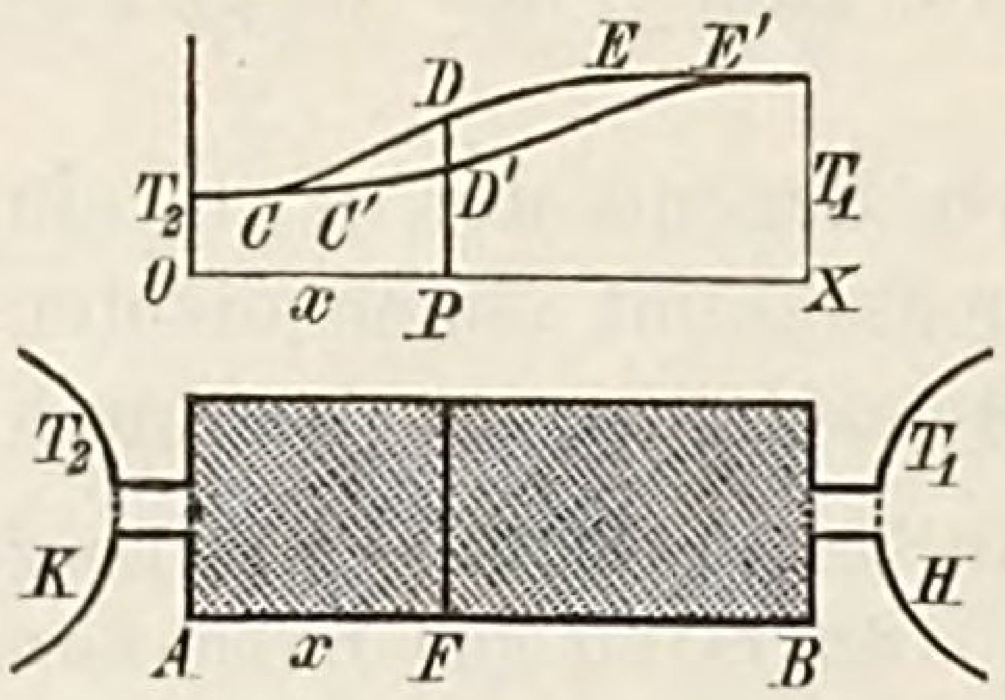
*) Der Regenerator ist schon im Jahre 1816 von Dr. Robert Stirling erfunden worden, erst später haben dann James Stirling und Ericsson von demselben Gebrauch bei ihren Heissluftmaschinen gemacht. Die grosse Bedeutung, welche der Regenerator in neuerer Zeit durch die Brüder Wilhelm und Friedrich Siemens auch in andern Theilen der Wärmetechnik erlangt hat, kennt jeder Ingenieur.

Die erste theoretische Behandlung der Frage über die Wirkungsweise des Regenerators bei Heissluftmaschinen findet sich bei Macquorn Rankine (A Manual of the Steam Engine. 1859. p. 344 u. f. und schon vorher in den Philosophical Transactions 1854). Auf diese Darlegungen gestützt, berührt die Frage zuerst wieder Briot (Théorie mécanique de la chaleur. Paris 1869. p. 84. Deutsch von Heinrich Weber: Lehrbuch der mechan. Wärmetheorie. Leipzig 1871. S. 88), sowie auch de Saint Robert (Principes de Thermodynamique. Sec. édition. Turin et Florence 1870 p. 287).

In der zweiten Auflage des vorliegenden Buches (1866), bei dessen Abfassung mir Rankine's Darlegungen unbekannt geblieben waren, habe ich irrthümlich den Vortheil des Regenerators bei Luftmaschinen bestritten, weil ich nur Kreisprocesse zwischen zwei Adiabaten der Untersuchung unterwarf, für die allerdings die Wirkungslosigkeit des Regenerators zutreffend ist. Ersetzt man aber die Adiabaten durch Isothermen, so gestalten sich die Verhältnisse anders, worauf speciell Prof. Reitlinger aufmerksam machte (Ueber Kreisprocesse mit zwei isothermischen Curven. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins 1873). Eine wesentlich erweiterte Theorie der Regeneratorwirkung giebt J. Hirsch (Théorie des machines aérothermiques. Annales des ponts et chaussées. 1874. p. 409) und in neuester Zeit hat Prof. M. Schröter in einer sehr beachtenswerthen Abhandlung unter Benutzung der Sätze über die Abbildung der Druckcurven die in Betrachtung stehende Frage ebenfalls behandelt. (Ueber die Anwendung von Regeneratoren bei Heissluftmaschinen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1883.) Die Untersuchungen im vorliegenden Buche umfassen wesentliche Erweiterungen und Anwendungen auf specielle praktische Fälle.

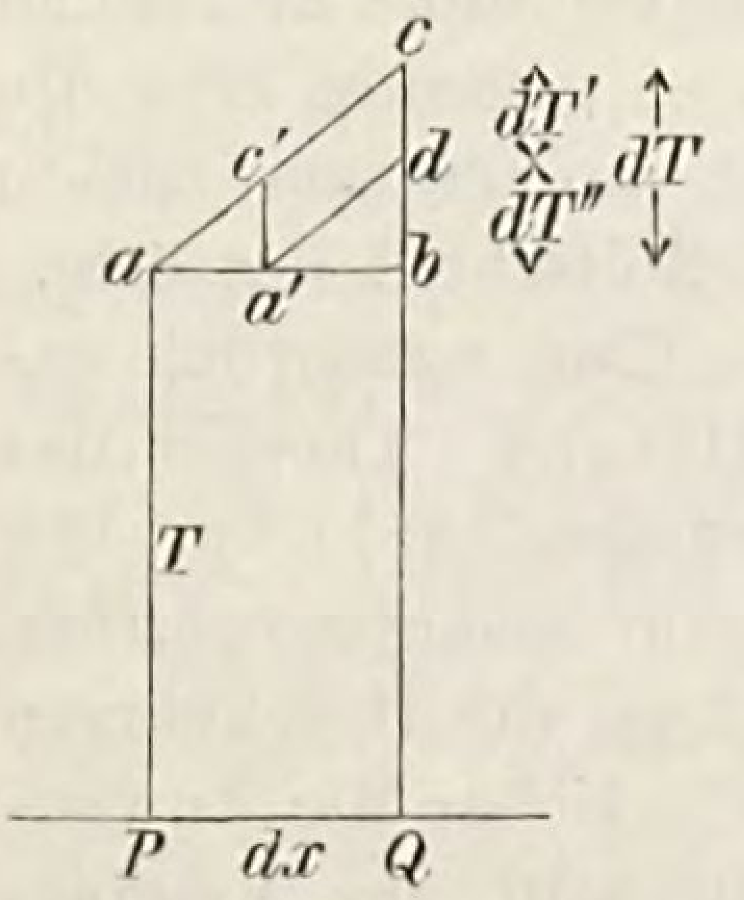
dünne, bez. durchlochte Metallplatten ersetzt findet), überhaupt mit einem Körper von grosser Oberfläche gefüllt ist, der leicht Wärme aufnimmt und abgiebt und welcher zugleich dem Durchgange von Luft einen verhältnissmässig geringen Widerstand entgegenstellt; am linken Ende A befindet sich ein Gefäss K, welches mit Luft von der untern Temperaturgrenze T_2 und rechts ein Gefäss H, welches mit Luft von der obern Temperaturgrenze T_1 erfüllt ist: es wird dann, wenn man sich vorstellt, ein gewisses Luftquantum sei mehrmals vom kalten nach dem heissen Raume durch den Regenerator hindurch und wieder zurückgetrieben worden, in der Füllung des Regenerators, dem Drahtgewebe, eine Temperaturvertheilung vorliegen, deren Gesetz durch die Curve CDE dargestellt werden kann, wenn man von der horizontalen Axe OX aus die Temperatur an der betreffenden Stelle P, d. h. dem Querschnitte F, der um $OF = OP = x$ vom linken Ende abliegt, als Ordinate $PD = T$ aufträgt. Es möge dabei angenommen werden, dass die Temperaturcurve an ihren Enden nahezu horizontal verlaufe, also die Grenztemperaturen T_2 und T_1 sich auf eine gewisse Länge in den Regenerator hinein erstrecken.

Fig. 47.



Denkt man sich nun, es sei wiederum eine gewisse Luftmenge vom kalten Raume K nach dem heissen Raume H durch den Regenerator getrieben worden, so wäre dieselbe von der Temperatur T_2 auf die Temperatur T_1 gebracht, gleichzeitig aber die Temperaturcurve CDE verändert worden und jetzt durch die Curve $C'D'E'$ dargestellt; der Zusammenhang dieser beiden Curven mag nun zunächst ermittelt werden.

Fig. 48.



Es stelle ac (Fig. 48) das Curvenelement dar, welches dem Punkte D der Curve CDE in Fig. 47 entspricht; dem Punkte P, dessen Abscisse x ist, entspricht die Temperatur T und dem Punkte Q in der Entfernung dx vom ersteren die Temperatur $T + dT$.

Ist ferner G_0 das Gewicht der Regeneratorfüllung (Drahtgeflecht) auf die Längeneinheit bezogen und c_0 die specifische Wärme der Füllung, ferner G das Luftgewicht, welches in der Secunde durch den Regenerator geführt wird, (wenn zunächst an ein continuirliches, längere Zeit andauerndes Strömen der Luft gedacht und der Regenerator nach rechts hin bedeutend verlängert angenommen wird), so muss die auf der Länge dx befindliche Füllung $G_0 dx$ eine Temperaturabnahme erleiden, die mit dT' bezeichnet werden mag, also eine Wärmemenge dQ abgeben, welche durch die Formel

$$dQ = c_0 G_0 dx dT'$$

bestimmt ist. In der zugehörigen Zeit dt geht aber im Querschnitte F bei dem Punkte P das Luftgewicht $G dt$ hindurch und erwärmt sich; die entsprechende Temperaturerhöhung sei dT'' und die specifische Wärme der Luft c; es folgt daher auch die Wärmemenge, welche die Luft auf dem Wege dx aufgenommen hat:

$$dQ = c G dt \cdot dT'' .$$

Durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke erhält man:

$$c_0 G_0 \frac{dx}{dt} \cdot dT' = c G dT'' .$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit w, mit welcher die Luft im Punkte P den Querschnitt F passirt,

$$w = \frac{dx}{dt}$$

und daher ergiebt die vorstehende Formel

$$c_0 G_0 w dT' = c G dT'' . \tag{59}$$

Die beiden Temperaturänderungen dT' und dT'' werden in Fig. 48 durch die Strecken cd und bd angezeigt und es ist hierbei auch

$$dT = dT' + dT'' . \tag{60}$$

Zieht man durch d die Linie da' parallel zu ac bis zur Horizontalen ab, so giebt a' denjenigen Punkt der Curve $C' D' E'$ (Fig. 47), welchen der Punkt D von der Temperatur T' nach der unendlich kleinen Zeit dt einnimmt. Bezeichnet man die Hori-

zontalverschiebung aa' (Fig. 48) mit dx', so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $aa'c'$ und abc die Beziehung

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dT'}{dT}$$

oder

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dT'}{dT} = w \cdot \frac{dT'}{dT} \,.$$

Nun bedeutet aber der Werth der linken Seite dieser Gleichung nichts anderes, als die Geschwindigkeit der horizontalen Verschiebung des Punktes a (Fig. 48) oder des Punktes D der Temperaturcurve CDE in Fig. 47; bezeichnet man dieselbe mit u, so folgt

$$u = w \cdot \frac{dT'}{dT}$$

und man erhält, wenn man aus den beiden Gln. (59) und (60) die Grösse dT'' eliminirt,

$$u = \frac{w}{1 + \frac{G_0 c_0}{G c} w} \,. \tag{61}$$

Es ist zwar die Geschwindigkeit w, mit welcher die Luft die verschiedenen Querschnitte des Regenerators durchschreitet, verschieden, weil wegen der Temperatur- und eventuell der gleichzeitigen Druckänderungen, auch Volumenänderungen der Luft stattfinden, es folgt daher streng genommen, dass auch die Geschwindigkeit u, mit welcher die verschiedenen Punkte der Curve CDE (Fig. 49) fortschreiten, verschieden ist; diese Verschiedenheit ist aber ausserordentlich gering, denn einmal ist die Geschwindigkeit w der Luft im Regenerator verhältnissmässig gross und dann hat der in Gl. (61) auftretende Bruch $\frac{G_0 c_0}{G c}$ jederzeit einen sehr grossen Werth; man kann daher in dieser Gleichung die Eins im Nenner unbedenklich vernachlässigen und erhält daher viel einfacher und hinreichend genau die Beziehung

$$u = \frac{G c}{G_0 c_0} \tag{62}$$

und daraus den Satz, dass alle Punkte der Temperaturcurve

CDE sich mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Multiplicirt man Gl. (62) auf beiden Seiten mit dem Differential dt der Zeit und integrirt man, so folgt auch

$$s = \frac{Lc}{G_0 c_0}, \tag{62 a}$$

wobei L die Luftmenge in Kilogrammen darstellt, die in gegebener Zeit durch den Regenerator hindurchgetrieben worden ist und s die dadurch hervorgebrachte Verschiebung der Temperaturcurve bedeutet; die beiden dem Anfange und Ende entsprechenden Temperaturcurven CDE und $C'D'E'$ (Fig. 47) sind daher horizontal (in der Richtung der Regeneratoraxe) äquidistant. Die zwischen beiden Curven enthaltene Fläche, welche mit f bezeichnet werden mag, findet sich daher

$$f = s(T_1 - T_2) = \frac{Lc}{G_0 c_0}(T_1 - T_2)$$

oder

$$Q = G_0 c_0 f, \tag{63}$$

weil $Q = Lc(T_1 - T_2)$ die Wärmemenge darstellt, welche die Luft beim Durchgange durch den Regenerator aufgenommen hat.

Die Gl. (63) hätte sich direct auch leicht, wie folgt, ableiten lassen. Im Querschnitte F beim Punkte P ist die Anfangstemperatur T durch die Ordinate PD dargestellt, am Ende durch die Ordinate PD', die mit T' bezeichnet werden mag; die auf der Länge dx befindliche Regeneratorfüllung $G_0 dx$ hat also die Temperaturverminderung $T - T'$ erlitten und daher eine Wärmemenge abgegeben, welche ist

$$dQ = G_0 c_0 dx (T - T').$$

Da aber $(T - T')dx$ den zwischen D und D' liegenden Flächenstreifen darstellt, so giebt die Integration die ganze Fläche f, wodurch die vorstehende Formel gleichfalls auf Gl. (63) führt.

Wird die Luft in umgekehrter Richtung durch den Regenerator getrieben, so findet die parallele Verschiebung der Curve CDE nach der andern Seite hin statt; geht also nach dem Richtungswechsel dieselbe Luftmenge wieder durch den Regenerator, so kehrt die Curve in ihre ursprüngliche Lage zurück. Ueber den

Verlauf der Curve selbst giebt allerdings die vorstehende Untersuchung keinen Aufschluss.

Von Wichtigkeit ist noch die Bestimmung der im Regenerator enthaltenen Luftmenge; dieselbe variirt, lässt sich aber für einen bestimmten Moment und eine bestimmte Lage der Temperaturcurve CDE graphisch darstellen. Bezeichnet F den Querschnitt des mit Luft erfüllten freien Raumes des Regenerators in der Entfernung x vom linken Ende A (Fig. 47), so ist das Luftvolumen auf der Längenerstreckung dx durch Fdx gegeben; ist dG das Luftgewicht innerhalb dieses Raumes und v das specifische Volumen der Luft daselbst, so besteht die Beziehung

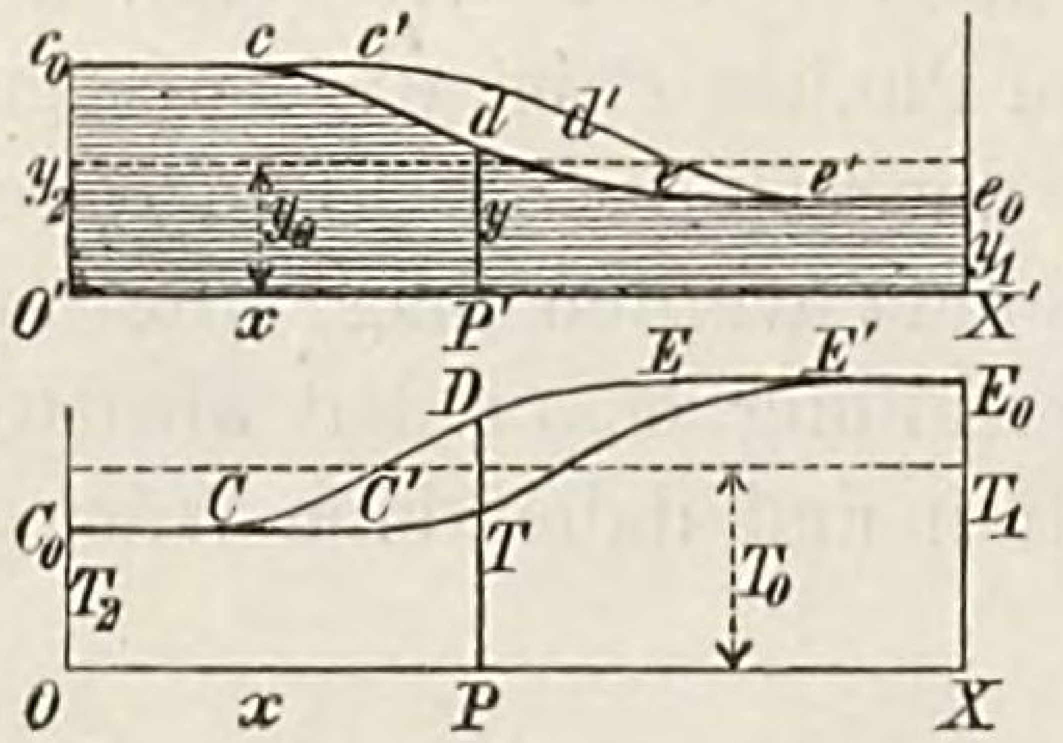
$$v\,dG = F\,dx\ .$$

Wenn man nun mit dem Drucke p der Luft beide Seiten dieser Gleichung multiplicirt und die Zustandsgleichung $pv = BT$ der Luft benutzt, so ergiebt sich

$$dG = \frac{Fp}{B} \cdot \frac{dx}{T}\ ,$$

und diese Gleichung wäre integrabel, wenn man den Verlauf $T = f(x)$ der Temperaturcurve CDE (Fig. 47) des Regenerators kennen würde, denn der Druck p ist überall derselbe. Im untern Theile der Fig. 49 ist die Temperaturcurve CDE der Fig. 47 wiederholt dargestellt; bezeichnet man den reciproken Werth von T, also $1 : T$, mit y und trägt man im obern Theile der Fig. 49 den Werth y als Ordinate $P'd$, der Abscisse $O'P' = x$ entsprechend, auf, so erhält man eine neue Curve $c_0 c d e e_0$ und die Integration der vorstehenden Gleichung giebt, wenn man mit G_r das Gewicht der ganzen im Regenerator befindlichen Luft bezeichnet:

Fig. 49.



$$G_r = \frac{Fp}{B} \int y\,dx\ .$$

Das hier auftretende Integral wird durch die schraffirte Fläche der Fig. 49 dargestellt; reducirt man diese Fläche auf ein Rechteck von der Basis $O'X' = OX = l$, der Axenlänge

des Regenerators, und ist y_0 die Höhe des Rechtecks, so folgt aus vorstehender Gleichung

$$G_r = \frac{Flpy_0}{B} \tag{64}$$

oder, wenn man den reciproken Werth von y_0 mit T_0 bezeichnet und beachtet, dass Fl den ganzen mit Luft erfüllten Raum V_0 bezeichnet,

$$G_r = \frac{V_0 p}{B T_0} , \tag{64 a}$$

wobei T_0 eine Art von mittlerer Temperatur im Regenerator bedeutet, die auch direct gefunden wird, wenn man die von der Curve $C_0 CDEE_0$ begrenzte Fläche auf ein Rechteck von der Basis $OX = l$ reducirt; die schraffirte Fläche bietet aber den Vortheil, dass man zugleich erkennt, nach welchem Gesetz die Luft im Regenerator dem Gewichte nach vertheilt ist.

Denkt man nun wieder, es seien vom kalten Raume aus L kg Luft durch den Regenerator nach dem heissen Raume getrieben worden, so wird der parallelen Verschiebung s der Curve CDE eine gleich grosse Verschiebung der Curve cde nach $c'd'e'$ entsprechen und die zwischen beiden Curven enthaltene Fläche vom Inhalte $s(y_2 - y_1)$ die Vergrösserung der schraffirten Fläche (Fig. 49) ausdrücken; demnach wird nach dem Durchgange der Luft im Regenerator ein grösseres Luftgewicht G_r', wie Anfangs enthalten sein, also in den heissen Raum eine geringere Luftmenge eintreten, als vom kalten Raume herbeigeführt wurde, immer vorausgesetzt, dass das Durchtreiben der Luft bei constantem Drucke p erfolgt.

Die Differenz findet sich unter Beachtung von Gl. (64)

$$G_r' - G_r = \frac{Fp}{B} s(y_2 - y_1) ,$$

wobei die Verschiebung s durch Gl. (62 a) gegeben ist. Die mittlere Ordinate y_0 hat sich nach dem Durchgange der Luft auf y_0' vergrössert und zwar:

$$y_0' = y_0 + \frac{s}{l}(y_2 - y_1) ,$$

woraus sich der reciproke Werth, also die Temperatur T_0' findet, wenn man Gl. (62 a) benutzt

$$T_0' = T_0 \left[1 - \frac{Lc}{G_0 l c_0} \cdot \frac{T_0 (T_1 - T_2)}{T_1 T_2} \right].$$

Das zweite Glied in der Klammer ist nun aber bei Heissluftmaschinen ein sehr kleiner Bruch. Man darf daher annehmen, dass die mittlere Temperatur im Regenerator nur zwischen engen Grenze variirt und dass das Gewicht G_r der im Regenerator eingeschlossenen Luft vorzugsweise von dem Drucke p abhängig und diesem nahezu proportional ist, (nach Gl. 64a) sofern der Durchgang der Luft durch den Regenerator überhaupt zugleich mit Druckänderungen verbunden ist.

§ 61. Geschlossene Heissluftmaschine ohne Regenerator.

Erste Anordnung (System Rider).

Anschliessend an die vorstehenden theoretischen Untersuchungen über die verschiedenen Kreisprocesse der Heissluftmaschinen, soll nun im Folgenden gezeigt werden, auf welchem Wege die praktische Durchführung dieser Processe möglich ist.

Es liegen nach dieser Richtung hin eine ganze Reihe von überaus sinnreichen Vorschlägen und Ausführungsversuchen vor, wie von Stirling, dem genialen Ericsson, von Laubereau-Schwartzkopf, Rider, Lehmann u. A.; mit Ausnahme vielleicht der Maschinenanordnung von Lehmann hat aber keine der vorgeschlagenen Constructionen grössere Verbreitung gefunden. Nichtsdestoweniger ist die Annahme gerechtfertigt, dass es doch noch gelingen werde, eine brauchbare Maschinenanordnung für den kleinern Betrieb zu gewinnen; von einem Verdrängen der Dampfmaschinen durch Heissluftmaschinen wird allerdings bei grösseren Arbeitsleistungen niemals die Rede sein.

Der Mangel an Erfolg hat wohl theilweise seinen Grund darin, dass bei den Vorschlägen der neueren Zeit der Regenerator entweder gar nicht mehr oder in sehr unvollkommener Art in Anwendung gekommen ist, dann aber vielleicht auch darin, dass eigentliche theoretische Untersuchungen der Heissluftmaschine unter Zugrundelegung praktisch möglicher Ausführungen noch nicht vorhanden sind. Die bekannten Untersuchungen stützen sich entweder auf die praktisch unmögliche Annahme, dass alle Theile des Kreisprocesses in ein und demselben Raume ausgeführt

werden können, wie das auch in den oben gegebenen Entwickelungen vorausgesetzt worden ist, oder man hat für eine gewisse Maschinengattung nur das Indicatordiagramm und daraus die Arbeit der Maschine abzuleiten versucht, die ebenso wichtige Frage nach den Wärmemengen, welche im Verlaufe des einzelnen Kreisprocesses der arbeitenden Luft zuzuführen bez. zu entziehen sind, hatte bisher keine Lösung gefunden; die Sätze, die ich oben in § 38 S. 186 bis S. 211 über die Wirkung des Verdrängers entwickelt habe, geben aber jetzt das Mittel an die Hand, auch diese Frage weiter zu verfolgen.

Es mag die Lösung der Aufgabe versucht werden, den in Fig. 50 a. f. S. dargestellten Kreisprocess, der aus zwei Isothermen $T_2 T_2$ und $T_1 T_1$ und zwei polytropischen Curven $T_2 T_1$ und $T_2 T_1$ besteht und der schon oben untersucht worden ist, durch eine Maschine auszuführen, die wirklich construirbar ist.

Fig. 51a a. f. S. giebt die schematische Darstellung einer solchen Maschine ohne Regenerator, eine Anordnung übrigens, welche mehrere Fälle umschliesst, die wirklich schon in Vorschlag und zur Ausführung gekommen sind.

Zwei Cylinder A und B von gleichem Durchmesser sind durch eine mit Durchlassöffnungen versehene Scheidewand ab von einander getrennt.

Im Cylinder A bewegt sich der Kolben K_1, im Cylinder B der Kolben K_2, der erstere Cylinder ist links offen, der andere rechts, so dass auf die beiden Kolben von aussen her der atmosphärische Druck wirksam ist.

Das arbeitende Luftquantum ist zwischen den beiden Kolben K_1 und K_2 eingeschlossen.

Den Cylinder A umschliesst ein Mantel C, durch welchen der Heizkörper (Feuergase) hindurchströmt, so dass die Luft, welche sich in diesem Cylinder befindet oder daselbst einströmt, auf der obern Temperaturgrenze T_1 erhalten bez. sofort auf diese gebracht wird.

Der Cylinder B dagegen ist mit einem Mantel D versehen, durch welchen der Kühlkörper (Kühlwasser) strömt, so dass die in diesem Cylinder befindliche Luft auf der untern Temperaturgrenze T_2 erhalten bleibt und die aus dem heissen Cylinder A kommende Luft sofort auf die Temperatur T_2 abgekühlt wird.

20*

Die beiden Cylinderräume mögen im Weitern als **heisser** Raum und als **kalter** Raum unterschieden werden.

Die unter Fig. 51a gegebene Figur 51b stellt das **Kolbendiagramm** vor; die verticale Linie OZ repräsentirt die Zeit eines vollen Spieles der Maschine, welche durch die Punkte M, N, P und Z in vier Theile getheilt ist.

Man denke sich nun die beiden Kolben K_1 und K_2 zuerst am rechten Hubende; in diesem Momente befindet sich die ganze

Fig. 51*a*. Fig. 50.

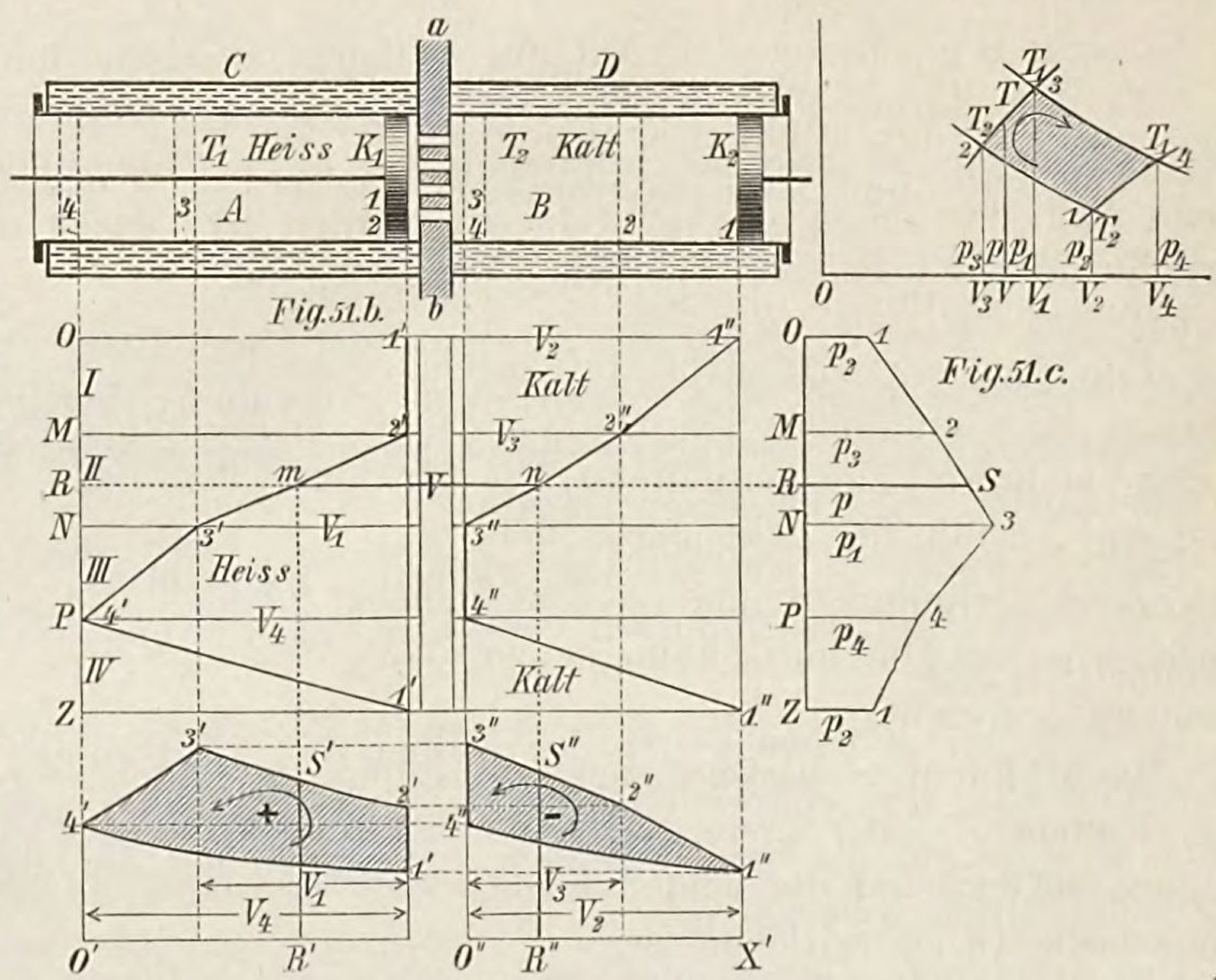


Fig. 51*d*.

Luft im kalten Raume vom Volumen V_2 und dem zugehörigen Drucke p_2 und der Temperatur T_2 (vergl. Fig. 50).

Das Spiel der Maschine sei folgendes:

Im **ersten** Zeitintervall OM wird der Kolben K_1 festgehalten und der Kolben K_2 von rechts nach links geschoben bis das Luftvolumen von V_2 auf V_3 abgenommen hat; die Compression hierbei findet bei constanter Temperatur T_2 statt, der Druck wächst von p_2 auf p_3 (vergl. Fig. 50).

Die vorausgesetzte Kolbenbewegung wird im Kolbendiagramm durch die Linien $1''2''$ und $1'2'$ angegeben und in der neben-

stehenden Fig. 51c, dem Kolbenkraftdiagramm, ist der Zeitstrecke OM entsprechend durch die Curvenstrecke 1 2 die Druckzunahme von p_2 auf p_3 ersichtlich.

Im zweiten Zeitintervall MN bewegen sich beide Kolben von rechts nach links; der Weg des Kolbens K_2 im kalten Raume ist durch die Wegcurve 2″ 3″ dargestellt, das Luftvolumen V_3 wird aus dem kalten Raume vollständig verdrängt und in den heissen Raum geschoben, woselbst der Kolben K_1 schliesslich das Volumen V_1 der heissen Luft abschliesst; die Linie 2′ 3′) (Fig. 51b) ist die Wegcurve dieses Kolbens im Verlaufe der Zeit MN, innerhalb welcher der Druck der Luft nach der Curve 2 3 (Fig. 51c) von p_3 auf p_1 wächst.

Im dritten Zeitintervall NP wird der Kolben K_2 festgehalten (Wegcurve ist 3″ 4″) und der Kolben K_1 geht nach der Wegcurve 3′ 4′ vollends an das linke Hubende; innerhalb dieses Zeitabschnittes expandirt die Luft, die jetzt vollständig im heissen Raume angesammelt ist, bei constanter höchster Temperatur T_1 vom Volumen V_1 auf das Volumen V_4 und ihr Druck nimmt dabei nach der Curve 3 4 (Fig. 51c) von p_1 auf p_4 ab.

Endlich im vierten Zeitintervall PZ werden beide Kolben aus ihrer äussersten Stellung links nach ihrem rechten Hubende zurückgebracht; dabei wird die ganze Luftmenge aus dem heissen Raume nach dem kalten Raume zurückgeschoben, das Volumen V_4 geht auf V_2, der Druck p_4 auf p_2 zurück, und damit ist ein Spiel vollendet.

Im untern Theile der Zeichnung, nämlich in Fig. 51d, sind endlich noch die Indicatorcurven eines jeden der beiden Cylinder zur Darstellung gebracht; es ist leicht zu ersehen, wie diese beiden Curvenzüge sowohl, wie das Kolbenkraftdiagramm Fig. 51c, auf Grund des in Fig. 50 gegebenen Kreisprocesses dargestellt werden können. Dem Zeitpunkte R entspricht nach Fig. 51b das Luftvolumen $mn = V$; trägt man in Fig. 50 das Volumen V in der Strecke OV auf, so ergiebt sich daselbst der zugehörige Druck p durch die Ordinate VT, diese Grösse trägt man im Zeitpunkte R der Fig. 51c als Ordinate RS auf und erhält so den entsprechenden Punkt S vom Curvenzuge des Kolbenkraftdiagrammes.

Geht man endlich von den beiden Punkten m und n in Fig. 51b vertical herab bis zur Axe $O'X'$ (Fig. 51d) und trägt

man von dieser aus aufwärts den entsprechenden Druck p auf, so erhält man die beiden entsprechenden Punkte S' und S'' in den beiden Indicatordiagrammen.

Bei dem beschriebenen Spiele der Maschine werden die beiden Indicatordiagramme in der Richtung der angegebenen Pfeile umfahren, das Diagramm des heissen Raumes entspricht positiver Arbeit, also dem Arbeitsgewinne eines einzelnen Processes, das Diagramm des kalten Raumes entspricht negativer Arbeit, also dem Arbeitsaufwande. Die Differenz der beiden schraffirten Flächen giebt die ganze durch diese Maschine gelieferte Arbeit, welche auch durch die schraffirte Fläche der zu Grunde gelegten Figur 50 gemessen wird.

Bemerkenswerth ist noch, dass der im Vorstehenden beschriebene Process unserer Maschine unendlich viele Einzelfälle umfasst, denn über den Verlauf der beiden zusammengehörigen polytropischen Curven $T_2 T_1$ und $T_2 T_1$ in Fig. 50 ist keine bestimmte Annahme gemacht worden.

Man erkennt aber leicht, dass einem bestimmten Werthe n des Exponenten in der Gleichung der polytropischen Curven $pv^n =$ Const. eine ganz bestimmte Kolbenbewegung im zweiten und vierten Zeitintervalle (MN und PZ in Fig. 51 b) entsprechen muss. Wären z. B. die beiden Wegcurven $2' 3'$ und $2'' 3''$ parallele Gerade oder auch horizontale äquidistante Curven und wäre dasselbe mit den Wegcurven $4' 1'$ und $4'' 1''$ (Fig. 51 b) der Fall, so würde das Luftvolumen sowohl beim Hinüberschieben aus dem kalten in den heissen Raum, wie auch bei der rückgängigen Bewegung constant sein; in diesem Falle wären die beiden polytropischen Curven $T_2 T_1$ und $T_2 T_1$ in Fig. 50 verticale Gerade und der Process der Maschine derjenige, den man mehrfach als den Stirling'schen Process bezeichnet hat.

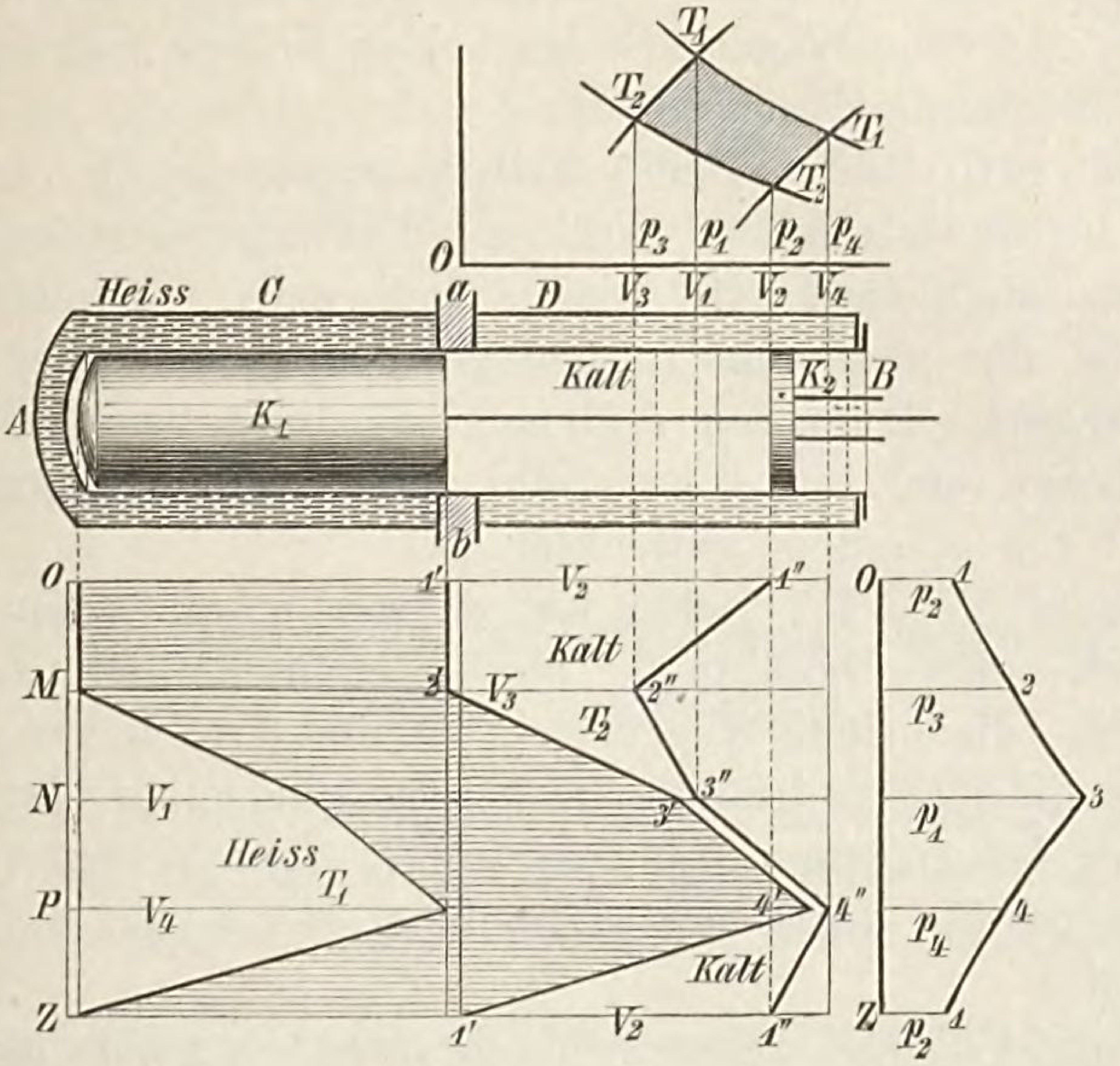
Man könnte in einem andern speciellen Falle des Verdrängens der Luft aus dem einen Raume in den andern und zurück die Kolbenbewegung im zweiten und vierten Zeitabschnitte auch so ausführen, dass der Druck constant erhalten bleibt. In diesem Falle wären die beiden Curven $T_2 T_1$ in Fig. 50 horizontale Gerade und der Process der Maschine wäre dann derjenige, den man als den Ericsson'schen Process bezeichnet findet. (Vergl. die Bemerkungen auf S. 296 und Fig. 45.)

§ 62. Geschlossene Heissluftmaschinen ohne Regenerator.

Zweite Anordnung (System Lehmann).

Der im Vorstehenden behandelte Process einer ausführbaren Luftmaschine lässt sich in genau gleicher Weise, so weit der zu Grunde gelegte Kreisprocess in Frage kommt, auch durch eine andre Maschinenanordnung erzielen. Es sei in Fig. 52 AB ein Cylinder, in welchem sich zwei Kolben K_1 und K_2 bewegen, von denen der erstere, der horizontal eine grosse Längenausdehnung besitzt und sich nicht dicht an die Cylinderwandung anschliesst, damit sich die Luft durch den übrig bleibenden ring-

Fig. 52.



förmigen Raum verbreiten kann, der Verdränger genannt werde, während der Kolben K_2 als Arbeitskolben bezeichnet werden soll.

Eine für Wärme undurchdringliche Wand ab theile den Cylinder äusserlich in zwei Theile. Links der Wand umgebe den Cylinder ein Mantel C, in welchem der Heizkörper circulire, rechts derselben ströme durch den Mantel D der Kühlkörper, der

Art, dass die Luft, welche sich links vom Verdränger K_1 befindet, auf der obern Temperaturgrenze T_1 erhalten wird, während die Luft rechts desselben, also zwischen Verdränger K_1 und Arbeitskolben K_2, die untere Temperatur T_2 besitze.

Im obern Theile der Fig. 52 ist wieder der Kreisprocess aus Fig. 50 dargestellt, welcher nun auch von der vorliegenden Maschine ausgeführt werden soll.

Die ganze Zeit eines Spieles sei durch die Verticale OZ gegeben; im Anfange sollen beide Kolben die Stellungen einnehmen, wie sie im Cylinder AB gezeichnet sind. Das Kolbenspiel muss nun folgendes sein.

Zeitintervall OM. Der Verdränger K_1 wird festgehalten und der Kolben K_2 von rechts nach links geschoben, so dass die Luft im kalten Raume bei constanter Temperatur T_2 vom Volumen V_2 auf das Volumen V_3 comprimirt wird, der Druck wächst von p_2 auf p_3. Die Wegcurven der beiden Kolben sind durch die Linien $1'\,2'$ und $1''\,2''$ dargestellt.

Zeitintervall MN. Beide Kolben werden nach rechts geschoben, bis sie sich nahezu berühren, die Wegcurven im Kolbendiagramme sind durch die Linien $2'\,3'$ und $2''\,3''$ dargestellt; hierbei ist die gesammte Luftmenge aus dem kalten Raume in den heissen Raum vom Volumen V_1 links vom Verdränger K_1 geschoben und ihre Temperatur auf T_1 erhöht worden; der Druck ist von p_3 auf p_1 gewachsen.

Zeitintervall NP. Beide Kolben gehen, auf dem ganzen Wege sich nahezu berührend, also gemeinschaftlich von links nach rechts, die beiden Wegcurven $3'\,4'$ und $3''\,4''$ liegen parallel. Die Luft, die sich vollständig im heissen Raume befindet, expandirt daher bei constanter Temperatur T_1 vom Volumen V_1 auf das Volumen V_4, der Druck sinkt dabei von p_1 auf p_4. Endlich im letzten

Zeitintervall PZ gehen beide Kolben von rechts nach links in ihre ursprüngliche Lage zurück, wobei das ganze Luftquantum aus dem heissen Raume in den kalten Raum zurückgetrieben wird.

Ersichtlich ist übrigens, dass in dem vorliegenden, wie in dem vorher besprochenen Falle auf die Länge der einzelnen Zeitintervalle nichts weiter ankommt.

Denkt man sich bei der in Fig. 52 dargestellten Maschinen-

anordnung das Rohr eines Indicators in den Raum mündend, in welchem sich die arbeitende Luft befindet, und wird die Indicatorrolle vom Arbeitskolben K_2 aus bewegt, so erhält man unmittelbar das Indicatordiagramm, welches in Fig. 52 dargestellt ist, d. h. den Kreisprocess, welcher der Maschine vorgeschrieben worden ist. Würde die Indicatorrolle mit dem Verdränger K_1 verbunden werden, so würde ein Indicatordiagramm von der Form hervortreten, wie es in Fig. 51 d für den heissen Raum gefunden worden ist. Auch der vorliegende Process umfasst unendlich viele Einzelfälle, je nach der Art und Weise, wie man die Kolben im zweiten und vierten Zeitintervall (MN und PZ Fig. 52) bewegt.

Die besprochene Maschinenanordnung entspricht dem allgemeinen Falle der Heissluftmaschine von Lehmann, während die in Fig. 51 gegebene Anordnung die Maschine von Rider, sofern solche ohne Regenerator arbeitet, darstellt. Man erkennt aus Obigem, dass sich diese beiden Maschinenarten nicht principiell, sondern nur in constructiver Richtung von einander unterscheiden. Bei den wirklich ausgeführten Maschinen von Rider, Lehmann u. A. sind allerdings die Curvenzüge $1'2'3'4'1'$ und $1''2''3''4''1''$ der Kolbendiagramme (Fig. 51 und 52) continuirlich verlaufende Curven und zwar näherungsweise Sinusoiden, da die Kolben durch Kurbelmechanismen bewegt werden, worauf zurückzukommen sein wird.

§ 63. Theorie der im Vorstehenden besprochenen Maschinenanordnungen.

Die folgenden Rechnungen gelten gleichzeitig für die in Fig. 51 und die in Fig. 52 gegebenen Anordnungen; den Betrachtungen mag aber die erstere Anordnung zu Grunde gelegt werden.

Was zunächst die Arbeit L betrifft, welche durch die Maschine bei einem Spiele gewonnen wird, sofern, wie (Fig. 50) a. f. S. der Kreisprocess zwischen zwei Isothermen und einem Paare polytropischer Curven vollführt wird, so gilt hier ohne Weiteres die in § 57 S. 279 entwickelte Gl. (41), nämlich:

$$L = GB(T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \qquad (65)$$

wobei G das Gewicht der in der Maschine eingeschlossenen Luft bedeutet; dagegen ist n der Exponent, welcher dem vorausgesetzten Paare der beiden polytropischen Curven $T_2 T_1$ entspricht. Bezüglich der beiden Wärmemengen Q_1 und Q_2, welche bei einem Spiele zu- bez. abgeleitet werden müssen, gelten aber die beiden Gln. (39) und (40a) S. 279 hier nicht mehr, vielmehr sind nun die Sätze zu verwerthen, welche über die Wirkung des Verdrängers, insbesondere in § 38 S. 186 abgeleitet worden sind.

Fig. 51 *a*. Fig. 50.

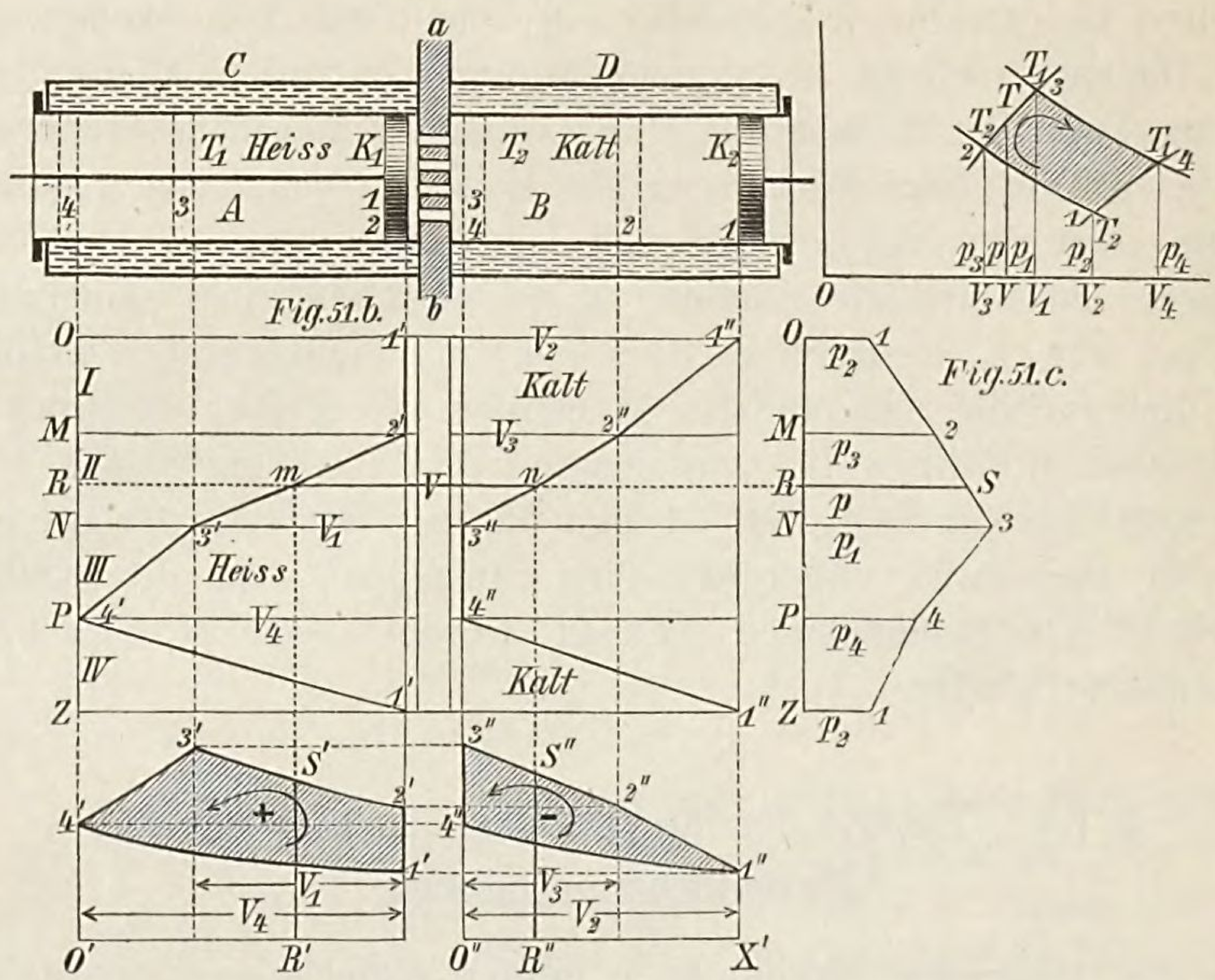


Fig. 51 *d*.

Man hat hier jedes der einzelnen Zeitintervalle der Fig. 51 besonders zu untersuchen.

Im ersten Intervalle OM (Fig. 51b) wird die Luft bei constanter Temperatur T_2 von V_2 auf V_3 comprimirt, der Druck wächst von p_2 auf p_3; die Wärmemenge, welche hierbei der Luft im kalten Raume zu entziehen ist und die mit Q_2' bezeichnet werden mag, findet sich nach Gl. (56b) auf S. 132

$$Q_2' = A G B T_2 \operatorname{logn} \frac{p_3}{p_2} \cdot \tag{66}$$

Im dritten Zeitintervall expandirt die gesammte Luft im heissen Raume bei constanter Temperatur T_1 vom Volumen V_1 auf das Volumen V_4, der Druck sinkt von p_1 auf p_4; die Wärmemenge, welche hierbei dem heissen Raume zugeführt werden muss und die mit Q_1' bezeichnet werde, ist nach der eben citirten Formel

$$Q_1' = A\,G\,B\,T_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4}\,. \tag{67}$$

Nun sind speciell die Vorgänge im zweiten Intervalle MN zu untersuchen, in welchem die ganze Luft aus dem kalten Raume in den heissen hinüber geschoben wird; im Anfange ist das Volumen V_3 und der Druck p_3; im Zeitpunkte R (Fig. 51 b) ist das Volumen V und der Druck p und der Voraussetzung gemäss soll die Beziehung

$$p\,V^n = p_3\,V_3^n \tag{68}$$

stattfinden, wobei zunächst über den constanten Exponenten n bestimmte Annahmen unterlassen werden. Die Differentiation dieser Gleichung giebt

$$V dp + n p\, d V = 0\,. \tag{69}$$

Nun findet sich aber für die gesammte Wärmemenge Q, welche beiden Räumen, dem heissen wie dem kalten Raume zugeführt werden muss, durch Integration der Gl. (46) S. 189, nämlich

$$d Q = \frac{A}{\varkappa - 1}\,(V dp + \varkappa p\, d V)\,,$$

die unter Benutzung von vorstehender Gl. (69) lautet

$$d Q = A \cdot \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} \cdot p\, d V\,,$$

wenn man noch p aus Gl. (68) bestimmt, der Werth

$$Q = A\,G\,B\,T_2\, \frac{(\varkappa - n)}{(\varkappa - 1)\,(n - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{n-1}\right], \tag{70}$$

oder, wenn man die entsprechenden Grenzen der Pressungen substituirt, nach Gl. (68)

$$Q = A\,G\,B\,T_2\, \frac{(\varkappa - n)}{(\varkappa - 1)\,(n - 1)} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right], \tag{70a}$$

und endlich, wenn man die Gesetze über die polytropische Curve in § 29 S. 144 Gl. (5) beachtet,

$$Q = AG \cdot \frac{(n - \varkappa)}{(\varkappa - 1)(n - 1)} \cdot B(T_1 - T_2) . \qquad (70b)$$

Diese Wärmemenge Q setzt sich aber zusammen aus zwei Theilen, nämlich derjenigen Q_2'', welche dem kalten, und Q_1'', welche dem heissen Raume zuzuführen ist.

Die erstere Wärmemenge findet sich durch Integration der Gl. (85a) S. 208

$$Q_2'' = -\int A V_x dp , \qquad (71)$$

wobei V_x das augenblickliche Volumen der Luft im Abflussraume, hier also in dem kalten Raume, ist. Im gleichen Zeitpunkte R ist $(V - V_x)$ das Volumen des heissen Raumes und daher gilt nach Gl. (42) S. 188 die Beziehung

$$\frac{BG}{p} = \frac{V_x}{T_2} + \frac{V - V_x}{T_1} .$$

Bestimmt man hieraus V_x und substituirt diesen Werth sowohl wie den aus Gl. (68) hervorgehenden Werth von V in Gl. (71), so ergiebt sich durch Integration und einige leicht zu verfolgende Umformungen für die Wärmemenge Q_2'', welche bei Verdrängung der Luft aus dem kalten Raume diesem zugeführt werden muss,

$$Q_2'' = ABG \left[\frac{n T_2}{n - 1} - \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} \right] \cdot \qquad (72)$$

Dagegen folgt die Wärmemenge Q_1'', welche zu gleicher Zeit dem heissen Raume mitgetheilt werden muss,

$$Q_1' = Q - Q_2'' ,$$

aus vorstehender Gleichung und Gl. (70b)

$$Q_1'' = ABG \left[\frac{(n - \varkappa)}{(\varkappa - 1)(n - 1)} T_1 - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} T_2 + \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} \right] \cdot (73)$$

Um endlich noch die Wärmemengen Q_1''' und Q_2''' zu bestimmen, welche im vierten Zeitabschnitte PZ (Fig. 51b) beim Zurückschieben der Luft aus dem heissen nach dem kalten Raume, diesen beiden Räumen mitzutheilen sind, hat man in den

beiden vorstehenden Gleichungen einfach nur die Temperaturwerthe zu vertauschen und die Pressungen p_1 und p_3 durch p_2 und p_4 zu ersetzen: man erhält daher:

$$Q_1''' = A\,B\,G\left[\frac{n\,T_1}{n-1} - \frac{T_1\,T_2}{T_1 - T_2}\operatorname{logn}\frac{p_4}{p_2}\right] \tag{74}$$

und

$$Q_2''' = A\,B\,G\left[\frac{(n-\varkappa)}{(\varkappa-1)(n-1)}\,T_2 - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,T_1 + \frac{T_1\,T_2}{T_1-T_2}\operatorname{logn}\frac{p_4}{p_2}\right]. \tag{75}$$

Jetzt endlich lässt sich die gesammte Wärmemenge Q_1 ermitteln, welche bei einem Spiele der Maschine dem heissen Raume von dem Heizkörper mitgetheilt werden muss, durch die Beziehung

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' + Q_1''',$$

und wenn man hier die vorstehenden Formeln benutzt und zugleich die Beziehungen (Fig. 50)

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_4}{p_2} \quad \text{und} \quad A\,B = c_p \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$$

verwerthet, sowie

$$\frac{p_1}{p_4} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

substituirt:

$$Q_1 = G\left[c_p\,(T_1 - T_2) + A\,B\,T_1\operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]. \tag{76}$$

Ferner findet sich die Wärmemenge Q_2, welche beim vollen Spiele dem kalten Raume zu entziehen ist:

$$Q_2 = Q_2' - Q_2'' - Q_2''',$$

und hieraus unter Benutzung vorstehender Formeln und der zuletzt gegebenen einzelnen Beziehungen:

$$Q_2 = G\left[c_p\,(T_1 - T_2) + A\,B\,T_2\operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]. \tag{77}$$

Die beiden vorstehenden Gleichungen (76) und (77) schliessen jetzt die Theorie der beiden in § 61 und § 62 S. 307 und 311 gegebenen Maschinenanordnungen ab und zeichnen sich, trotz der sehr complicirten Vorgänge, welche die Verdrängerwirkung mit sich bringt, durch ihre grosse Einfachheit aus. Die Differenz

$Q_1 - Q_2$ führt, wie es sein muss, ohne Weiteres wieder auf die Gl. (65) für die bei dieser Maschine gewonnene Arbeit L; interessant aber ist es, dass die beiden für Q_1 und Q_2 gefundenen Ausdrücke, die für die wirklich ausführbaren Heissluftmaschinen gelten, ihrem Baue nach vollständig mit den Formeln übereinstimmen, welche für den rein theoretischen Process in § 57 S. 279 (Gln. 39a und 40a) gefunden worden sind. An die Stelle der der betreffenden polytropischen Curve entsprechenden specifischen Wärme

$$c = \frac{n - \varkappa}{n - 1} \cdot c_v$$

dort, tritt hier bei der ausführbaren Maschine einfach die specifische Wärme c_p der Luft bei constantem Drucke; im Uebrigen gelten aber je nach dem angenommenen Werthe von n die vorstehenden Sätze für unendlich viele Processe, es kommt eben nur, wie bereits bemerkt worden ist, auf die Art der Bewegung der beiden Kolben K_1 und K_2 (Fig. 51b und Fig. 52) im zweiten und vierten Zeitabschnitte (MN und PZ) an. Die besprochenen ausführbaren Maschinen sind einfach wirkende; macht die betreffende Maschine in der Minute u Spiele, so ist die Arbeit N derselben in Pferdestärken (indicirt) nach Gl. (65)

$$N = \frac{B G u}{60 . 75} (T_1 - T_2) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot \qquad (78)$$

Da in den vorstehenden Gleichungen der Ausdruck unter dem Logarithmus positiv sein muss, so ist die Bedingung

$$\frac{p_1}{p_2} > \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

zu erfüllen. (Vergl. S. 280.)

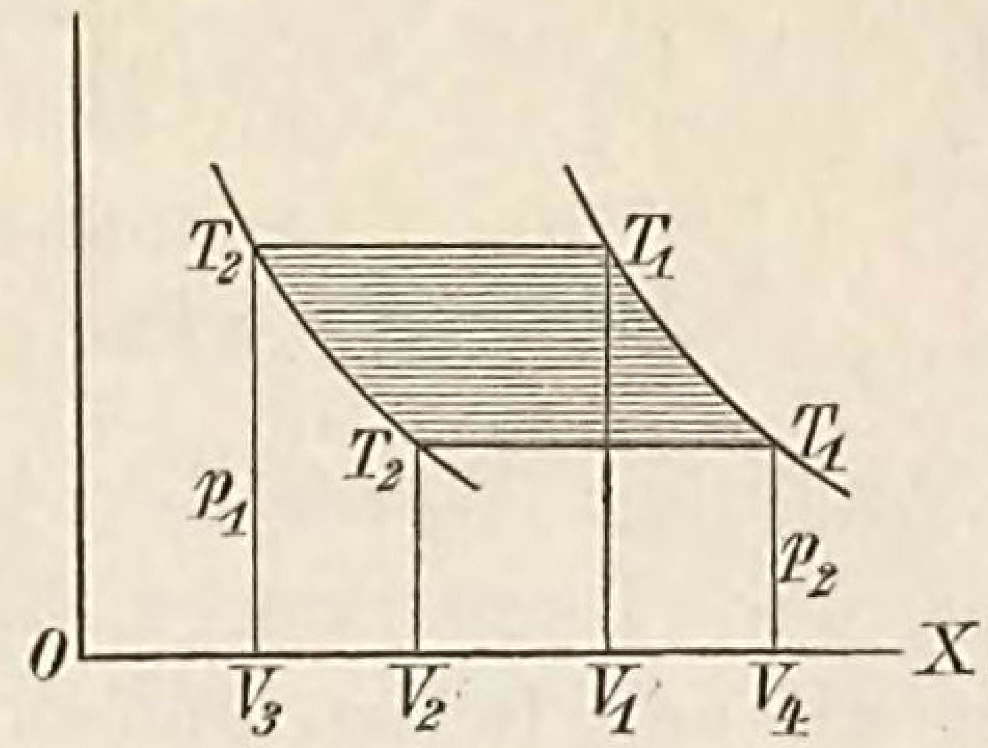
§ 64. Anwendungen und numerische Beispiele.

Macht man die Annahme, dass der den vorstehenden Maschinenanordnungen zu Grunde liegende Kreisprocess aus zwei Isothermen und zwei horizontalen Geraden bestehe, wie Fig. 53 andeutet, welcher Process der Ericsson'sche genannt werden mag, wenngleich keine der Ericsson'schen Maschinen in Wirk-

lichkeit diesen Process ausführt, so ist in den gegebenen Gleichungen $n = 0$ zu setzen; bezeichnet man das Verhältniss der Grenztemperaturen $T_1 : T_2$ mit λ so giebt Gl. (78)

$$\frac{N}{u} = \frac{B\,G\,T_2}{60\,.\,75}(\lambda - 1)\operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2} \cdot \quad (78\,a)$$

Fig. 53.



Die Gln. (76) und (77) geben dagegen die Wärmemengen, die bei jedem Spiele der Maschine bez. zu- und abgeleitet werden müssen:

$$Q_1 = A\,B\,G\,T_2\left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\varkappa - 1} + \lambda \operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2}\right], \quad (76\,a)$$

$$Q_2 = A\,B\,G\,T_2\left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\varkappa - 1} + \operatorname{logn}\frac{p_1}{p_2}\right]. \quad (77\,a)$$

Denkt man an die in Fig. 52 S. 311 angegebene Maschinenanordnung, die als die Lehmann'sche bezeichnet werden mag, nimmt man an, dass die betreffende Kolbenbewegung im 2. und 4. Zeitabschnitte auf das hier zu Grunde gelegte Indicatordiagramm Fig. 53 eingerichtet sei, und bezeichnet F den Querschnitt beider Kolben, s_1 den ganzen Hub des Verdrängers K_1 und s_2 den Hub des Arbeitskolbens K_2, so ist (Fig. 52)

$$V_4 = F s_1$$

und

$$V_4 - V_3 = F s_2 \,.$$

Nun ist aber nach der Zustandsgleichung der Gase unter Zugrundelegung von Fig. 53

$$V_4 p_2 = B\,G\,T_1 \quad \text{und} \quad V_3 p_1 = B\,G\,T_2 \,,$$

daher:

$$F s_1 p_2 = B\,G\,T_1 \,, \quad (79)$$

$$F_2\ s_2 p = B\,G\left(T_1 - \frac{p_2}{p_1}T_2\right), \quad (80)$$

woraus durch Division

$$\frac{s_2}{s_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1}\frac{T_2}{T_1} \,. \quad (81)$$

Hieraus folgt nach den vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{N}{u} = \frac{F s_1 p_2}{60 \,.\, 75} \, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \tag{78 b}$$

$$Q_1 = A F s_1 p_2 \left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\lambda(\varkappa - 1)} + \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \right] \tag{76 b}$$

$$Q_2 = A F s_1 p_2 \left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\lambda(\varkappa - 1)} + \frac{1}{\lambda} \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \right] . \tag{77 b}$$

Was den Werth des Verhältnisses λ, d. h. des Verhältnisses der Temperaturen T_1 und T_2 betrifft, so findet man bezüglich der Beobachtungen an ausgeführten Lehmann'schen Maschinen, die allerdings den hier angenommenen Process nur unvollkommen ausführen, λ zwischen 1,5 bis 3 angegeben.

Setzt man, um die vorstehenden Formeln an einem numerischen Beispiele zu erläutern, $\lambda = 2$ und $p_1 = 2 p_2$, so ergiebt sich aus Gl. (78 b)

$$F s_1 p_2 = 12980 \,.\, \frac{N}{u} \,.$$

Macht die Maschine in der Minute $u = 100$ Umdrehungen (Spiele) und beträgt der untere Druck p_2 gerade eine Atmosphäre ($p_2 = 10\,333$ kg) so findet sich für $N = 2$ Pferdestärken (indicirt)

$$F s_1 = 0{,}025.$$

Setzt man den Hub des Verdrängers $s_1 = 0{,}250$ m, so ergiebt sich der erforderliche Kolbenquerschnitt

$$F = 0{,}100 \text{ qm} \;,$$

demnach der Durchmesser

$$d = 0{,}357 \text{ m}.$$

Der Hub des Arbeitskolbens ist dagegen nach Gl. (81) $s_2 = 0{,}187$ m anzunehmen.

Unter den gemachten Annahmen ergiebt Gl. (76 b) die Wärmemenge, welche hierbei dem heissen Raume in der Minute zuzuführen ist:

$$Q_1 = 147{,}72 \text{ cal.}$$

und die Wärmemenge, die in der gleichen Zeit dem kalten Raume zu entziehen ist,

$$Q_2 = 126{,}50 \text{ cal.}$$

Wird die Kühlung durch kaltes Wasser bewerkstelligt, welches beim Durchströmen durch den Cylindermantel D (Fig. 52 S. 311) sich beispielsweise um 10° C. erwärmt, so wäre pro Minute eine Kühlwassermenge von 12,65 kg erforderlich.*)

*) Zum Vergleich mit Beobachtungen an einer wirklich ausgeführten Lehmann'schen Maschine mögen die Versuchsresultate dienen, welche

Die berechnete Wärmemenge Q_1 ergäbe, wenn der Process an einer vollkommenen Maschine ausgeführt würde, welche den Carnot'schen Kreisprocess vollführt, eine Arbeit, in Pferdestärken N_m ausgedrückt:

$$N_m = \frac{Q_1}{60 \,.\, 75 A \,.\, T_1}(T_1 - T_2) = \frac{Q_1}{60 \,.\, 75 \,.\, A} \,.\, \frac{(\lambda - 1)}{\lambda}$$

oder nach Substitution der entsprechenden Werthe

$$N_m = 6{,}959 \text{ Pferdestärken,}$$

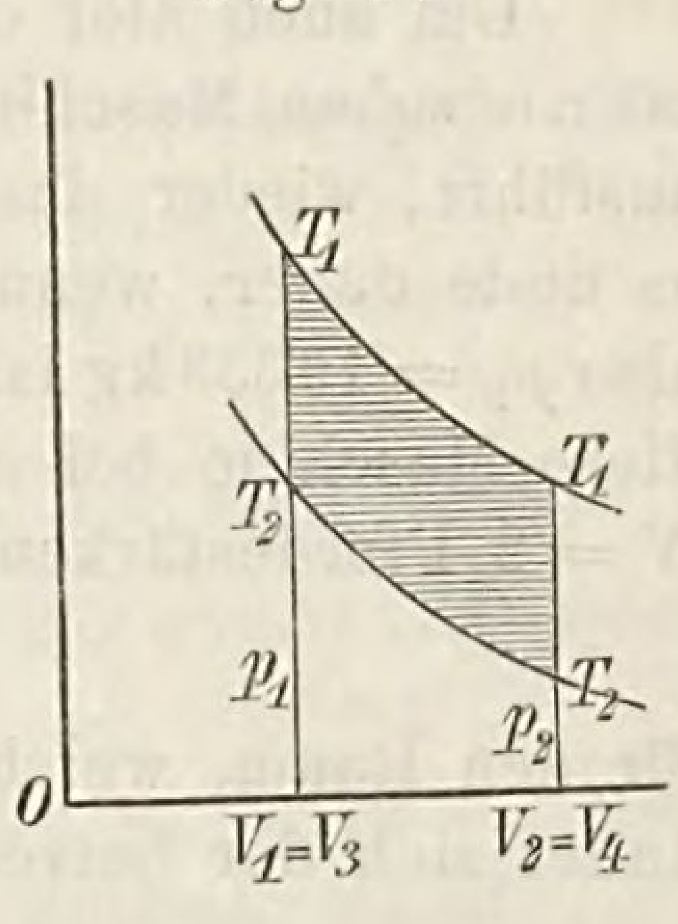
und hiernach wäre der Wirkungsgrad dieser Maschine im früher gegebenen Sinne:

$$\eta = \frac{N}{N_m} = 0{,}287 \;.$$

Die beiden Gln. (76b) und (77b) führen für diesen Wirkungsgrad auf eine Formel, die mit Gl. (53) S. 296 identisch ist und aus welcher man erkennt, dass dieser Wirkungsgrad sich um so mehr der Einheit nähert, je grösser λ und das Druckverhältniss $p_1 : p_2$ angenommen werden kann. Im vorstehenden Beispiele fällt der Wirkungsgrad sehr gering aus, weil das Druckverhältniss vergleichsweise klein und ebenso die Differenz der Grenztemperaturen gering vorausgesetzt wurde.

Bemerkenswerth ist übrigens, dass der im Vorstehenden vorausgesetzte Ericsson'sche Process für die Arbeit und die beiden Wärmemengen Q_1 und Q_2 auf Formeln geführt hat, die mit denen identisch sind, welche sich aus den Formeln (41), (39a) und (40a) S. 279 unter der Vorausetzung $c = c_p$ und $n = 0$ für den in Fig. 44 angenommenen theoretischen Process ergeben. Diese Identität der angezogenen Gleichungen mit vorstehenden Gln. (76), (77), (78) S. 317 verschwindet, wenn die Lehmann'sche Maschine einen andern, als den Ericsson'schen Process ausführt.

Fig. 54.



Läge z. B. der Stirling'sche Process vor, würde also der Verdränger K_1 (Fig. 52 S. 311) solcher Art bewegt, dass das Verdrängen der Luft bei constantem Volumen stattfindet, demnach der zu Grunde liegende Kreisprocess durch Fig. 54 dargestellt wird, so ist in den Gl.

Eckerth in den »Technischen Blättern« (Prag 1869. 1. Jahrgang S. 104) veröffentlicht hat. Die allgemeine Uebereinstimmung meiner theoretischen Ergebnisse mit den dort gegebenen Werthen der Dimensionen und Versuchsresultate erscheint sehr befriedigend.

(76), (77) und (78) der Exponent $n = \infty$ zu setzen. Man erhält hier auf dem gleichen Wege der Umformung, wie er vorhin beim Stirling'schen Process eingeschlagen wurde, wenn man wieder den Verdrängerhub mit s_1 und den Hub des Arbeitskolbens mit s_2 bezeichnet, wegen

$$V_1 = V_3 \quad \text{und} \quad V_2 = V_4 = Fs_1 \;,$$

sowie

$$Fs_2 = V_4 - V_2 = V_2 - V_1$$

(Fig. 52) und wegen der Beziehungen

$$V_2 p_2 = BGT_2 \quad \text{und} \quad V_1 p_1 = BGT_1$$

aus der Verbindung dieser Gleichungen:

$$\frac{s_2}{s_1} = 1 - \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \;. \tag{82}$$

Wie sich leicht verfolgen lässt, ergiebt sich dann weiterhin:

$$\frac{N}{u} = \frac{Fs_1 p_2}{60 \,.\, 75} (\lambda - 1) \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} \tag{78c}$$

$$Q_1 = AFs_1 p_2 \left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\varkappa - 1} + \lambda \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}\right] \tag{76c}$$

$$Q_2 = AFs_1 p_2 \left[\frac{\varkappa(\lambda - 1)}{\varkappa - 1} + \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1}\right] \;, \tag{77c}$$

wobei die beiden Wärmemengen für ein Spiel gültig sind.

Um auch hier ein numerisches Beispiel anzufügen, sei bei einer Lehmann'schen Maschine, welche den angenommenen Stirling'schen Process ausführt, wieder das Temperaturverhältniss $\lambda = 2$, dagegen sei $p_1 = 4p_2$, es finde daher, wenn der untere Druck p_2 wieder eine Atmosphäre beträgt, also $p_2 = 10\,333$ kg ist, eine Compression auf 4 Atmosphären statt. Soll auch diese Maschine bei $u = 100$ Spielen pro Minute eine indicirte Leistung von $N = 2$ Pferdestärken ergeben, so berechnet sich aus Gl. (78c)

$$Fs_1 = 0{,}0125 \text{ cbm}$$

für den Raum, welchen der Verdränger pro Schub zurücklegt; nach Gl. (82) findet sich der betreffende Raum für den Arbeitskolben

$$Fs_2 = 0{,}00625 \;.$$

Für die Wärmemengen Q_1 und Q_2 sowohl, wie für N_m und η finden sich (bei den hier gemachten speciellen Annahmen für λ und $p_1 = p_2$) nach den Gl. (76c) und (77c) dieselben Werthe, wie im vorigen Beispiele.

Hätte man in den beiden im Vorstehenden behandelten Beispielen statt der Lehmann'schen Anordnung (Fig. 52), die An-

ordnung der Maschine nach Fig. 51 zu Grunde gelegt, so wäre das Volumen, welches der Kolben K_1 im heissen Raume pro Schub zurückzulegen hätte, $V_4 = F_1 s_1$ und das betreffende Volumen für den Kolben im kalten Raume $V_2 = F_2 s_2$, wenn man die Kolbenquerschnitte F_1 und F_2 verschieden voraussetzen wollte.

Nun ist aber nach den Sätzen über die polytropische Curve vergl. Fig. 50 S. 307

$$\frac{V_4}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

daher folgt

$$F_2 s_2 p_2 = G B T_2$$

und

$$\frac{F_1 s_1}{F_2 s_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Macht die Maschine den Ericsson'schen Process, so ist $n = 0$ und daher das Verhältniss der Inhalte beider Cylinder:

$$\frac{F_1 s_1}{F_2 s_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Unter Voraussetzung des Stirling'schen Processes wäre $n = \infty$ und daher

$$F_1 s_1 = F_2 s_2$$

anzunehmen. Bei den wirklich ausgeführten Rider'schen Maschinen, die allerdings mit einem Regenerator versehen sind, finden sich die Cylinder von nahezu gleichem Inhalte.

§ 65. Geschlossene Heissluftmaschinen ohne Regenerator.

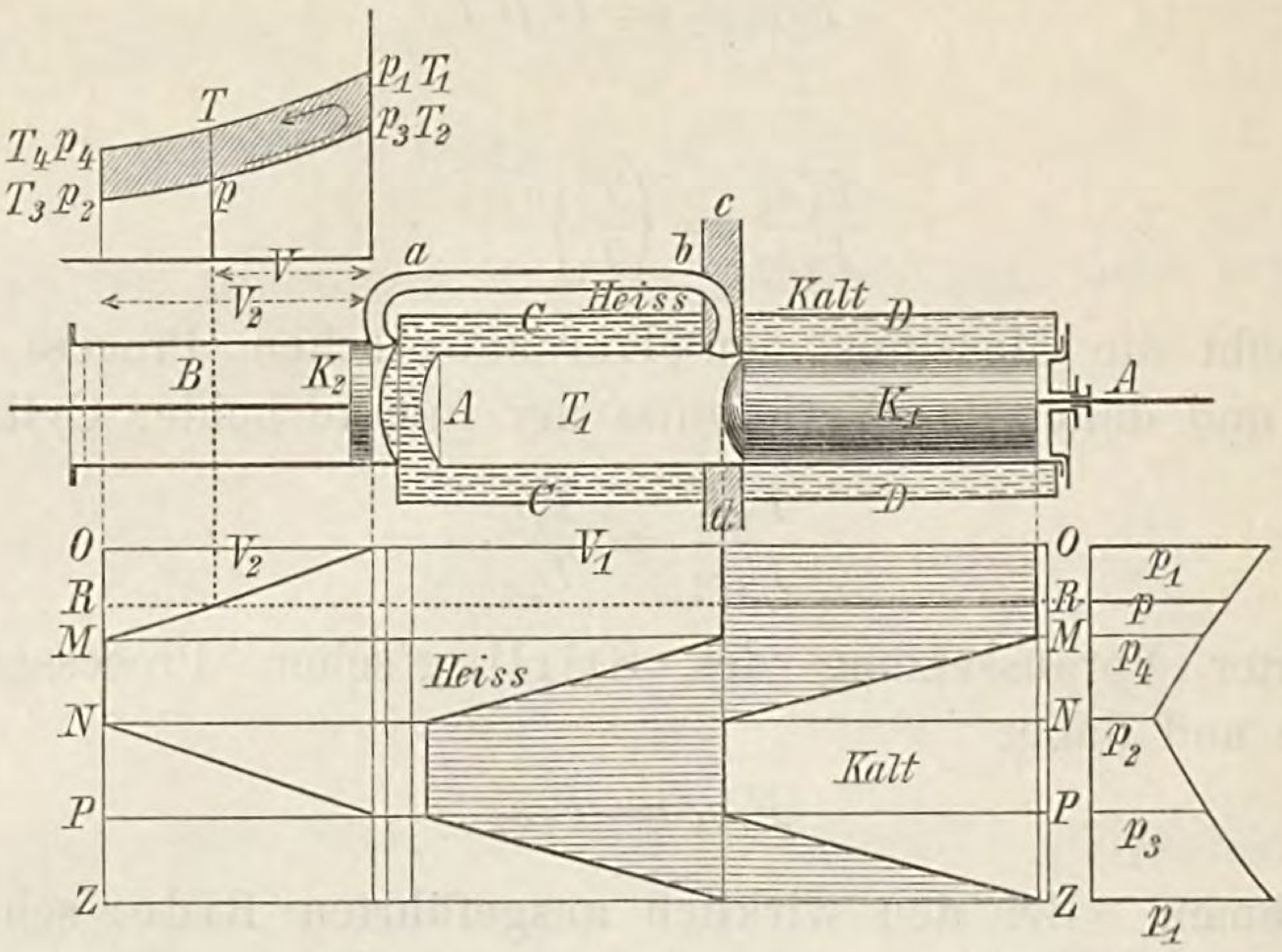
Dritte Anordnung (System Laubereau-Schwartzkopff).

Ein an beiden Enden geschlossener Cylinder AA (siehe schematische Fig. 55 a. f. S.) ist aussen durch die Scheidewand cd in zwei Hälften getheilt; die linke Hälfte ist von einem Mantel C umgeben, durch welchen der Heizkörper hindurchströmt, die rechte Hälfte ist umgeben von dem Mantel D, in welchem der Kühlkörper (kaltes Wasser) circulirt.

Im Cylinder befindet sich ein Kolben K_1, der Verdränger,

dessen Länge gleich der halben Cylinderlänge ist; steht der Kolben rechts am Ende (wie in der Figur), so befindet sich die ganze eingeschlossene Luft links vom Verdränger und hat dabei die höchste Temperatur T_1; würde der Verdränger K_1 an das linke Ende geschoben werden, so wird die ganze Luft durch den ringförmigen Raum zwischen Verdrängerumfang und Cylinderoberfläche nach rechts geschoben, wo sie nun auf die untere Temperaturgrenze T_2 gebracht wird. Durch entsprechende Wärme-Mittheilung bez. -Entziehung von Seiten der Mantelflüssigkeiten soll die

Fig. 55.



eingeschlossene Luft, wo auch der Verdränger steht, links desselben die Temperatur T_1 und rechts desselben die Temperatur T_2 haben.

Links vom Cylinder AA befinde sich nun ein zweiter Cylinder B, der Arbeitscylinder, in welchem sich der Kolben K_2, der Arbeitskolben, bewegt; dieser Cylinder sei links offen, sodass links auf dem Kolben K_2 der Atmosphärendruck ruht, sei dagegen rechts vom Kolben K_2 durch das Rohr ab mit dem Cylinder AA verbunden; das Rohr münde in diesen Cylinder in der Mitte seiner Länge ein.

Das Spiel dieser Maschine (der Normalprocess der Laubereau-Schwartzkopff-Maschine) ist nun folgendes, wenn bei den Betrachtungen der untere Theil der Fig. 55, das Kolbendiagramm,

und der obere Theil links, das entsprechende Indicatordiagramm, mit herangezogen und die Zeit eines Spieles durch die verticale Strecke OZ gegeben und in vier Theile getheilt wird.

Anfangs sollen, wie die Figur zeigt, beide Kolben am rechten Ende ihres Hubes stehen; das ganze in der Maschine eingeschlossene Luftgewicht G befindet sich (vom schädlichen Raume abgesehen) hierbei im heissen Raume vom Volumen V_1 und der höchsten Pressung p_1.

Im ersten Zeittheile OM wird der Verdränger K_1 festgehalten und der Kolben K_2 von rechts nach links geschoben, die Luft expandirt hierbei vom Volumen V_1 des heissen Raumes auf das Volumen $V_1 + V_2$, und zwar findet die Expansion hierbei im heissen Raume bei constanter Temperatur T_1 unter Wärmeaufnahme, im Arbeitscylinder aber ohne Aufnahme und Abgabe von Wärme statt. Hier liegt der als Specialfall c der Aufgabe 2 in § 39 S. 205 behandelte Fall vor, es folgt daher nach Gl. (65) S. 205 die Gleichung der Druckcurve $p_1 p p_4$ (Fig. 55)

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\varkappa V_1}{\varkappa V_1 + V}\right)^{\varkappa} \tag{83}$$

und daher der Enddruck p_4 der Expansion im Arbeitscylinder

$$p_4 = p_1 \left(\frac{\varkappa V_1}{\varkappa V_1 + V_2}\right)^{\varkappa}. \tag{84}$$

Die Arbeit L_1, welche hierbei auf den Arbeitskolben übertragen wird, ist:

$$L_1 = \int_0^{V_2} p dV = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} V_1 p_1 \left[1 - \left(\frac{\varkappa V_1}{\varkappa V_1 + V_2}\right)^{\varkappa - 1}\right] \tag{85}$$

oder mit Benutzung von Gl. (84):

$$L_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} [\varkappa V_1 (p_1 - p_4) - V_2 p_4]. \tag{85a}$$

Die Endtemperatur T_4 im Arbeitscylinder findet sich aus der Beziehung

$$G = \frac{V_1 p_1}{B T_1} = \frac{V_1 p_4}{B T_1} + \frac{V_2 p_4}{B T_4}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{V_2 p_4}{V_1 (p_1 - p_4)}. \tag{86}$$

Die Wärmemenge Q_1' endlich, welche im ersten Zeittheile dem heissen Raume zuzuführen ist, findet sich nach Gl. (64) S. 205:

$$Q_1' = A V_1 (p_1 - p_4) \ . \tag{87}$$

Vorgänge im zweiten Zeitintervall MN (Fig. 55): Der Arbeitskolben K_2 wird am linken Hubende festgehalten und der Verdränger K_1 von rechts nach links geschoben; das Gesammtvolumen $V_1 + V_2$ der eingeschlossenen Luft bleibt hierbei constant und aus dem heissen Raume wird sämmtliche Luft verdrängt; Arbeit wird hierbei weder gewonnen, noch verbraucht, der Druck sinkt aber von p_4 auf p_2 und die Temperatur der Luft im Arbeitscylinder von T_4 auf T_3.

Hierbei ist:

$$B G = \frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_1 p_2}{T_2} + \frac{V_2 p_2}{T_3} \ ,$$

woraus sich bestimmt

$$T_3 = \frac{V_2 T_1}{V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} - \frac{T_1}{T_2}\right)} \ . \tag{88}$$

Während der Bewegung des Verdrängers ist hierbei die Luft auf drei Räume vertheilt; das Gesammtvolumen $V_1 + V_2$ ist unveränderlich und daher findet sich die Wärmemenge dQ, welche im Zeitpunkte R (Fig. 55) allen drei Räumen gemeinschaftlich zugeführt wird, nach Gl. (46) S. 189

$$d Q = \frac{A(V_1 + V_2)}{\varkappa - 1} dp \ ,$$

oder wenn man integrirt und bedenkt, dass im ganzen Zeittheile MN dem Arbeitscylinder Wärme weder zu- noch abgeleitet wird, sowie annimmt, dass Q_1'' und Q_2' die Wärmemengen sind, die bez. dem heissen und dem kalten Raume zugeführt werden:

$$Q_1'' + Q_2' = \frac{1}{\varkappa - 1} A (V_1 + V_2)(p_2 - p_4) \ . \tag{89}$$

Die Summe der beiden Wärmemengen wäre hiernach bestimmbar; was aber die Bestimmung der einzelnen Wärmemengen Q_1'' und Q_2' anbelangt, so stösst man hier auf ein Problem, das zu einer wesentlichen Erweiterung der oben in § 38 entwickelten

Theorie der Verdrängerwirkung führen würde; in Anbetracht der untergeordneten Bedeutung der vorliegenden besondern Aufgabe soll unten nach Vorführung der Untersuchung des ganzen Processes nur eine näherungsweise Bestimmung beider Wärmemengen erfolgen.

Im dritten Zeitabschnitte NP (Fig. 55) wird der Verdränger K_1 am linken Ende seines Hubes festgehalten und der Arbeitskolben K_2 von links nach rechts geschoben, daher die im Arbeitscylinder B enthaltene Luft vollständig in den kalten Raum gebracht. Dabei wächst der Druck nach der Curve $p_2 p_3$ und es wird eine gewisse Compressionsarbeit L_2 verbraucht.

Bezeichnet man die veränderlichen Werthe von Druck und Temperatur mit p und T und bedenkt man, dass hier der Cylinder B der Abflussraum ist und diesem während des Hinausdrängens der Luft keine Wärme zugeführt wird, so hat man in Gl. (47) S. 192 $dQ_x = 0$ und T statt T_x zu setzen und erhält daher durch Integration

$$\frac{T}{T_3} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{90}$$

und

$$\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}, \tag{91}$$

woraus sich ermittelt, wie im Arbeitscylinder sich die Temperatur mit dem Drucke ändert und welcher Druck p_3 am Ende vorliegt.

Ist V das Luftvolumen im Arbeitscylinder im Augenblicke, wo daselbst der Druck p herrscht, so besteht die Beziehung

$$B\,G = \frac{Vp}{T} + \frac{V_1 p}{T_2} = \frac{V_1 p_3}{T_2}\,.$$

Die Verbindung mit den vorhergehenden beiden Gleichungen ergiebt dann die Gleichung der Compressionscurve $p_2 p_3$ (Fig. 55)

$$V\left(\frac{p}{p_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} + V_1\left(\frac{p}{p_3}\right) = V_1 \tag{92}$$

und dann folgt, wie sich leicht übersieht, die Compressionsarbeit:

$$L_2 = \int_0^{V_2} p\,d\,V$$

$$= V_1 p_3 \left[\frac{1}{\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)\right] \cdot \quad (93)$$

Weiter folgt die Wärmemenge Q_2'', welche hierbei dem kalten Raume zuzuführen ist, weil dem Arbeitscylinder während der Compression Wärme nicht mitgetheilt wird, nach Gl. (46) S. 189, nämlich:

$$d\,Q = \frac{A}{\varkappa - 1}\,(V dp + \varkappa p\,dV) = \frac{A}{\varkappa - 1}\,d\,(Vp) - A p dV$$

und integrirt:

$$Q_2'' = \frac{A}{\varkappa - 1}\,[V_1 p_3 - (V_1 + V_2) p_2] - A L_2 \;. \quad (94)$$

Endlich im vierten Zeitabschnitte PZ (Fig. 55) wird der Arbeitskolben K_2 festgehalten und der Verdränger K_1 von links nach rechts geschoben.

Der Druck wächst hierbei von p_3 auf p_1, und zwar besteht die Beziehung

$$B\,G = \frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_1 p_3}{T_2} \;,$$

nach welcher

$$p_3 = \frac{T_2}{T_1} p_1 \;. \quad (95)$$

Das Gesammtvolumen ist constant, die äussere Arbeit Null, und die Wärmemenge, welche beiden Räumen zuzuführen ist, folgt aus Gl. (46) S. 189

$$Q_1''' + Q_2''' = \frac{A\,V_1}{\varkappa - 1}\,(p - p_3) \;. \quad (96)$$

Der kalte Raum ist hier der Abflussraum, daher die demselben mitzutheilende Wärme nach den Sätzen auf S. 199

$$Q_2''' = \frac{A\,V_1}{\lambda - 1}\,(p_1 - p_3) - \frac{A\,V_1 p_1}{\lambda - 1}\,\text{logn}\,\frac{p_1}{p_3} \;, \quad (97)$$

wenn man wieder das Temperaturverhältniss $T_1 : T_2$ mit λ bezeichnet; die Wärmemenge Q_1''', welche hierbei dem heissen

Raume zuzuführen ist, findet sich dann aus der Verbindung der Gln. (96) und (97).

Nun ist nur noch die Frage unentschieden, welche bei Gl. (89) S. 326 hervorgehoben worden ist.

Da im zweiten Zeitabschnitte MN (Fig. 55) der heisse Raum der Abflussraum ist, so lässt sich die Wärmemenge Q_1'' näherungsweise durch Gl. (52a) S. 199 ausdrücken, nämlich

$$dQ_1'' = -AVdp\ ,$$

wenn V das augenblickliche Volumen des heissen Raumes bedeutet; während des Zeitabschnittes MN sinkt im Arbeitscylinder die Temperatur von T_4 auf T_3; nimmt man hierfür eine gewisse constante mittlere Temperatur T_0 an, so besteht für den Zeitpunkt R die Beziehung

$$BG = \frac{V_2 p}{T_0} + \frac{Vp}{T_1} + \frac{(V_1 - V)p}{T_2} = \frac{V_1 p_1}{T_1}\ .$$

Setzt man in dieser Formel

$$\frac{T_1}{T_2} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_0} = \lambda_0\ ,$$

so bestimmt sich

$$(\lambda - 1)\, V = \lambda_0 V_2 + \lambda V_1 - \frac{V_1 p_1}{p}\ .$$

Die Substitution in vorstehende Differentialformel und die darauf folgende Integration giebt dann als Näherungsausdruck die Wärmemenge Q_1'', welche im zweiten Zeitabschnitte dem heissen Raume zuzuführen ist,

$$Q_1'' = \frac{A(\lambda_0 V_2 + \lambda V_1)}{\lambda - 1}(p_4 - p_2) - \frac{AV_1 p_1}{\lambda - 1} \operatorname{logn} \frac{p_4}{p_2} \qquad (98)$$

und daher wäre dann nach Gl. (89) auch die Wärmemenge Q_2' bestimmt, welche in dem angenommenen Zeitraume dem k a l t e n Raume zuzuführen ist.

Nun sind alle einzelnen Formeln in folgender Weise zusammenzufassen. Zunächst ergiebt sich die Arbeit L, welche bei dieser Maschine pro Spiel gewonnen wird, $L = L_1 - L_2$, wobei die Gln. (85a) und (93) in Anwendung kommen, dann wäre weiter die Wärmemenge Q_1, welche dem h e i s s e n Raume bei einem Spiele z u z u f ü h r e n ist:

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' + Q_1'''$$

und die Wärmemenge, die dem kalten Raume mitzutheilen ist:

$$Q_2 = Q_2' + Q_2'' + Q_2''' \ .$$

Der letztere Werth erscheint natürlich negativ und ergiebt durch Vorzeichenwechsel die Wärmemenge, welche der Kühlkörper dem kalten Raume pro Spiel zu entziehen hat.

Die einzelnen Glieder der rechten Seite vorstehender Gleichungen sind oben gegeben und die Substitution giebt dann auch ganz richtig die Beziehung $AL = Q_1 - Q_2$, wie es sein muss; die Substitution giebt aber sehr complicirte Ausdrücke, deren Aufführung daher hier unterbleiben mag; das Gegebene lässt ja alle einzelnen Phasen des Normalprocesses einer Laubereau-Schwartzkopff'schen Maschine verfolgen.

Ich habe nicht unterlassen wollen, der Vollständigkeit wegen die Untersuchung dieser Maschine hier mit einzufügen, wenn die Maschine auch einen Nachtheil zeigt, der sofort in die Augen springt und der darin besteht, dass die heisse Luft bei ihrer Expansion in den Arbeitscylinder auf den Arbeitskolben wirkt, während es sonst als Regel gelten muss, die auch bei den Anordnungen von Rider und Lehmann befolgt ist, dass der Arbeitskolben dem Drucke der kalten Luft ausgesetzt wird.

Die Maschine ist aber in der von Schwartzkopff angewandten Construction schön durchdacht und ist von Tresca*) ausführlichen Versuchen unterworfen worden; überdies sind neuerdings wieder Vorschläge in der Construction von Heissluftmaschinen aufgetaucht, die im Princip auf die Anordnung von Laubereau-Schwartzkopff zurücklaufen; auch dadurch mag es gerechtfertigt werden, dass hier diese Anordnung näherer Untersuchung unterworfen worden ist.

Numerisches Beispiel. Bei einer Maschine der vorliegenden Art seien folgende Verhältnisswerthe gegeben:

$$\frac{T_1}{T_2} = \lambda = 2 \ ; \ \frac{p_1}{p_2} = 4 \ ; \ \frac{V_1}{V_2} = 1{,}25 \ .$$

Dann findet sich (Fig. 55) nach Gl. (84) und (95)

*) Tresca; Annales du Conservatoire des arts et métiers, t. IV p. 113. — Delabar, Dingler's polytechn. Journal 1864. Bd. 172. S. 81.

$$\frac{p_4}{p_1} = 2{,}1224 \quad \text{und} \quad \frac{p_3}{p_2} = 2\ .$$

Ferner nach Gln. (86) und (88)

$$\frac{T_4}{T_1} = 0{,}9044\ ,\quad \frac{T_3}{T_1} = 0{,}4000\ .$$

Die Expansions- und Compressionsarbeit nach Gln. (85a) und (93)

$$L_1 = 2{,}8946\ V_2 p_2\ ;\quad L_2 = 1{,}4457\ V_2 p_2$$

und daher die Arbeit der Maschine pro Spiel

$$L = L_1 - L_2 = 1{,}4489\ .\ V_2 p_2\ .$$

Ferner ergeben sich die einzelnen Wärmemengen

$Q_1' \ = 2{,}3470\, A\, V_2 p_2$, Gl. (87) ,

$Q_1'' \ = 0{,}7269\, A\, V_2 p_2$, Gl. (98) ,

$Q_1''' = 7{,}0631\, A\, V_2 p_2$, Gl. (96) und (97) ,

$Q_2' \ = -\ 6{,}8864\, A\, V_2 p_2$, Gl. (89) und (98) ,

$Q_2'' \ = -\ 0{,}8360\, A\, V_2 p_2$, Gl. (94) ,

$Q_2'' = -\ 0{,}9657\, A\, V_2 p_2$, Gl. (97) .

Hiernach geben die ersten drei Werthe die ganze Wärmemenge Q_1, welche pro Spiel dem heissen Raume zuzuführen ist:

$$Q_1 = 10{,}1370\, A V_2 p_2\ .$$

Die drei letzten Werthe geben die Wärmemenge Q_2, welche dem kalten Raume pro Spiel zu entziehen ist:

$$Q_2 = 8{,}6881\, A\, V_2 p_2\ .$$

Am Ende der Expansion im Arbeitscylinder herrscht daselbst eine Temperatur T_3, die noch unter der Temperatur T_2 im kalten Raume liegt und zwar ist hier $T_1 = 0{,}8\ T_2$, in diesem Cylinder findet also während der Expansion eine sehr bedeutende Temperatursenkung statt.

Angenommen weiter, es arbeite die Maschine zwischen den Pressungen von 2 und 0,5 Atmosphären, es wäre demnach $p_2 = 0{,}5\ .\ 10\,333$ kg und der Durchmesser des Arbeitscylinders $d = 0{,}5$ m, der Hub $s = 0{,}40$ m, so berechnet sich

$$A\, V_2 p_2 = 0{,}9570\ .$$

Hieraus folgen pro Spiel der Maschine die indicirte Arbeit

$$L = 588 \text{ mkg}$$

und die entsprechenden Wärmemengen

$$Q_1 = 9{,}701 \quad \text{und} \quad Q_2 = 8{,}314 \text{ cal.}$$

Macht die Maschine in der Minute $u = 36$ Umdrehungen (Spiele), so ist die (indicirte) Arbeit in Pferdestärken

$$L = \frac{Lu}{60 . 75} = 4{,}70 \text{ Pferde.}$$

Würde das Kühlwasser sich um 15° C. erwärmen, so wären in der Minute 20 kg Wasser erforderlich, also stündlich 1200 l.

Die Tresca'schen Versuche*) an einer Maschine der hier angenommenen Dimensionen ergaben nun freilich Resultate, die von den vorstehenden Rechnungswerthen bedeutend abweichen; die indicirte Arbeit ergab sich nur etwa $\frac{4}{10}$ der hier berechneten und die effective am Brems gemessene Leistung nur ohngefähr 0,8 Pferdestärken; die Indicatordiagramme zeigen auch eine ganz andere als die in Fig. 55 angedeutete Form. Es war allerdings die grösste Pressung 1,45 und die kleinste 0,85 Atmosphären anstatt, wie hier angenommen 2 und 0,5 Atmosphären.

Die Abweichung hat ihren Grund darin, dass sich der Process der wirklich ausgeführten Maschine viel zu wenig dem Normalprocess anschliesst; man darf wohl sagen, dass es überhaupt nicht empfehlenswerth ist, den Arbeitscylinder vom Heiz- und Abkühlraume zu trennen, dass demnach die Rider'sche und Lehmann'sche Anordnung vorzuziehen ist, auch schon deshalb, weil hier die Anwendung des Regenerators ohne Schwierigkeit erfolgen kann.

§ 66. Geschlossene Heissluftmaschine mit Regenerator.

Erste Anordnung (System Rider).

Die hier in Fig. 56a gegebene schematische Darstellung der Maschine unterscheidet sich von der Fig. 51 nur dadurch, dass zwischen den beiden Cylindern A und B der Regenerator R eingeschaltet ist, dessen Inneres mit den beiden Räumen A und B in freier Verbindung steht. Das Kolbendiagramm Fig. 56b, das Kolbenkraftdiagramm Fig. 56d und die Indicatordiagramme Fig. 56c beider Cylinder unterscheiden sich in ihrer allgemeinen Gestaltung nicht von den in Fig. 51 angenommenen Diagrammen.

Der Kreisprocess, den die vorliegende Maschine ausführen soll, sei durch das Diagramm Fig. 56e vorgeschrieben und zwar finde derselbe wieder zwischen zwei Isothermen $T_1 T_1$

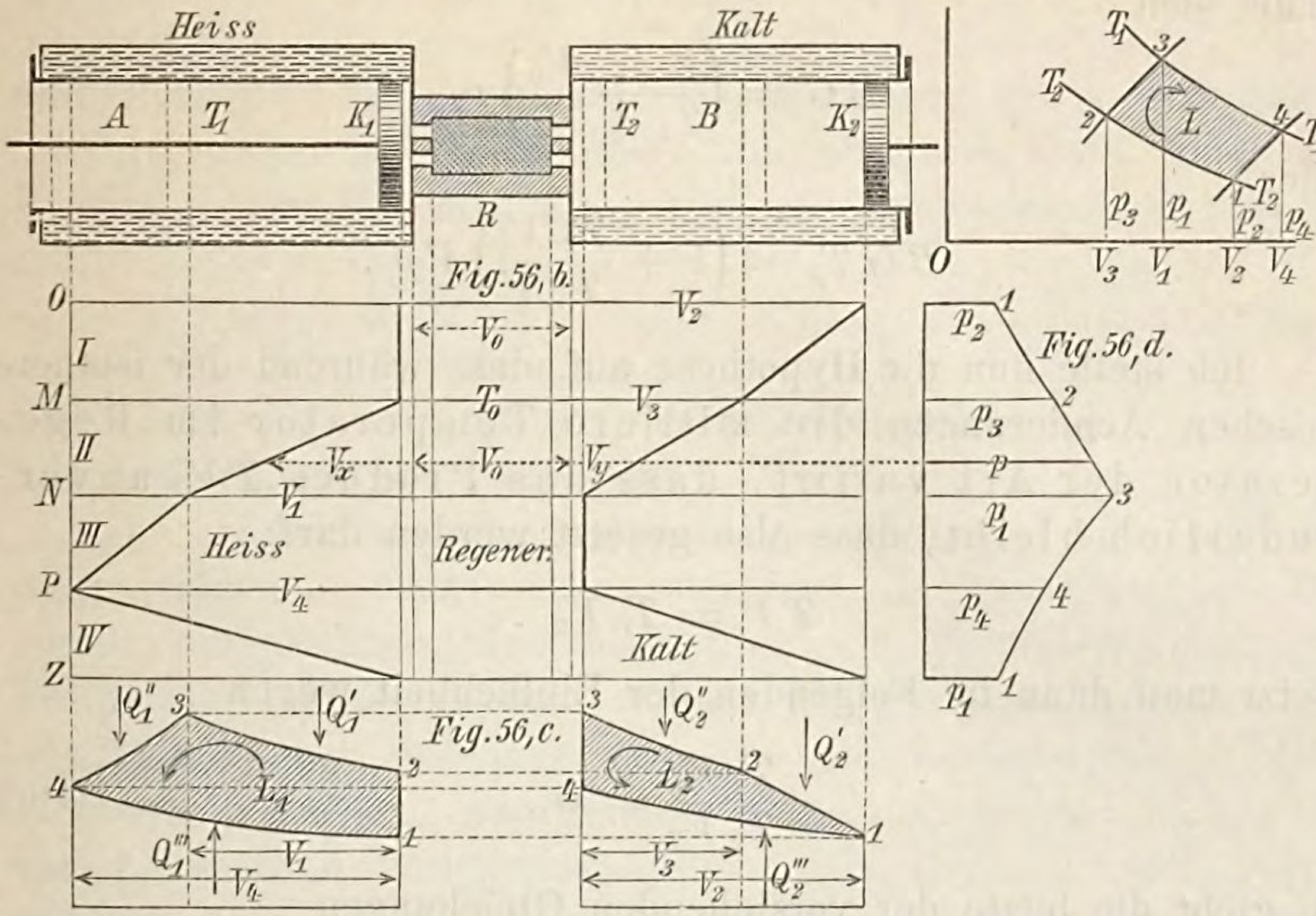
*) Vergl. Citat S. 330.

und $T_2 T_2$ und zwei polytropischen Curven $T_2 T_1$ und $T_2 T_1$, die das Gesetz

$$p\,V^n = \text{Const.}$$

befolgen, statt, wobei V das jeweilige Volumen der Luft im heissen und kalten Raume zusammengenommen (mit Ausschluss des Volumens V_0 der Luft im Regenerator) bedeuten mag.

Fig. 56 *a*. Fig. 56 *e*.



Für die vier Eckpunkte des Kreisprocesses gelten daher die Beziehungen:

$$p_3\,V_3{}^n = p_1\,V_1{}^n \quad \text{und} \quad p_4\,V_4{}^n = p_2\,V_2{}^n,$$

woraus sich auch ableitet

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{V_3\,p_3}{V_1\,p_1} \quad \text{und} \quad \left(\frac{p_4}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{V_4\,p_4}{V_2\,p_2}. \qquad (99)$$

Was nun den Verlauf der beiden Isothermen betrifft, so findet sich für den Punkt 1 der ersten Isotherme $T_2 T_2$ die Gleichung

$$B\,G = \left(\frac{V_2}{T_2} + \frac{V_0}{T_0}\right) p_2$$

oder

$$B G T_2 = \left(1 + \frac{T_2}{T_0} \frac{V_0}{V_2}\right) V_2 p_2 \,,$$

wenn T_0 die mittlere Temperatur im Regenerator (in dem oben angedeuteten Sinne) in diesem Augenblicke ist.

Für irgend einen andern Punkt derselben Isotherme, für welchen V das augenblickliche Volumen und p der Druck ist, sowie T die zugehörige mittlere Temperatur im Regenerator, findet sich

$$B G = \left(\frac{V}{T_2} + \frac{V_0}{T}\right) p_2$$

oder

$$B G T_2 = \left(1 + \frac{T_2}{T} \frac{V_0}{V}\right) V p \,.$$

Ich stelle nun die Hypothese auf, dass während der isothermischen Aenderungen die mittlere Temperatur im Regenerator der Art variirt, dass das Product $T V$ unveränderlich bleibt, dass also gesetzt werden darf:

$$T V = T_0 V_2 \,.$$

Setzt man dann im Folgenden der Einfachheit wegen

$$\frac{T_2 V_0}{T_0 V_2} = m \,, \tag{100}$$

so giebt die letzte der vorstehenden Gleichungen

$$B G T_2 = (1 + m) V p \,.$$

Auf demselben Wege folgt für irgend einen Punkt der zweiten Isothermen $T_1 T_1$, wenn man das Verhältniss $T_1 : T_2$ der Grenztemperaturen wieder mit λ bezeichnet,

$$B G T_1 = (1 + \lambda m) V p \,.$$

Für die vier Eckpunkte des in Fig. 56e vorausgesetzten Kreisprocesses folgen dann die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} B G T_2 &= (1 + m) V_2 p_2 = (1 + m) V_3 p_3 \\ \text{und} \quad \lambda B G T_2 &= (1 + \lambda m) V_1 p_1 = (1 + \lambda m) V_4 p_4 \end{aligned}\right\} \,. \tag{101}$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$V_3 p_3 = V_2 p_2 \quad \text{und} \quad V_4 p_4 = V_1 p_1 \tag{102}$$

und in Verbindung mit Gl. (99)

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_4}{p_2} \quad \text{und} \quad \frac{V_1}{V_3} = \frac{V_4}{V_2} \cdot \tag{103}$$

Betrachtet man die Grenzpressungen p_1 und p_2 als gegeben, ebenso λ und den Werth m nach Gl. (100), so findet sich nach dieser Gleichung

$$V_1 = \frac{(1+m)\lambda}{1+m\lambda} \cdot \frac{p_2}{p_1} V_2 \,, \tag{104}$$

und es ermitteln sich dann, wenn der Exponent n der polytropischen Curve gegeben ist, nach den Gln. (99) und (102) auch die Werthe V_3 und V_4, p_3 und p_4, und zwar, wie leicht zu verfolgen:

$$\frac{V_4}{V_2} = \left[\frac{1+m\lambda}{\lambda(1+m)}\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{p_4}{p_2} = \left[\frac{\lambda(1+m)}{1+m\lambda}\right]^{\frac{n}{n-1}} \cdot \tag{104a}$$

Hierbei ist V_4 das Volumen des heissen Cylinders: V_3 und p_3 finden sich nach den Gln. (103).

Die Anwendung der entwickelten Formeln, wie auch der weiter folgenden Sätze, setzt allerdings die Zuverlässigkeit der vorhin aufgestellten Hypothese über die Veränderlichkeit der Temperatur im Regenerator voraus; die gemachte Annahme erscheint mir aber durchaus zulässig; die Veränderlichkeit fällt immer nach der zu erwartenden Seite und bewegt sich auch immer zwischen verhältnissmässig engen Grenzen, weil jederzeit nur ein Theil der in der Maschine eingeschlossenen Luft den Regenerator erfüllt. Man muss auch zu einer Hypothese seine Zuflucht nehmen, denn eine genaue, an die Thatsachen sich anschliessende Theorie des Regenerators dürfte kaum möglich sein. Auf den ersten Augenblick erscheint die Annahme viel näher liegend, dass die mittlere Temperatur im Regenerator während des ganzen Verlaufes des Processes als constant angesehen werden dürfe und diese Annahme ist in der That auch von Gustav Schmidt*), Slaby**) und Schöttler***) gemacht worden;

*) Gustav Schmidt, Theorie der geschlossenen calorischen Maschinen. Civilingenieur Bd. 8. 1862. S. 285.

**) Slaby, Beiträge zur Theorie der geschlossenen Luftmaschinen. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses. Berlin 1878.

***) Schöttler, Ueber die Heissluftmaschine von Rider. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. 1881. Bd. 25. S. 633.

wenn man aber diese Hypothese an der Hand der Sätze näher prüft, die oben auf S. 186 bis 212 über die Wirkung des Verdrängers abgeleitet worden sind, so ergiebt sich das absurde Resultat, dass der Regenerator bei einem Spiele der Maschine mehr Wärme an die durchströmende Luft abgiebt, als er in der gleichen Zeit in dem betreffenden Theile eines Spieles aufgenommen, also zur Wiederbenutzung aufgespeichert hatte. Die genannten Autoren konnten die Unzulässigkeit ihrer Hypothese nicht erkennen, da sie sich nur auf die Bestimmung der Maschinenarbeit und Untersuchung der Indicatordiagramme beschränkten, gerade den wichtigsten Theil der Frage aber, nämlich die Bestimmung der Wärmemengen, die der Maschine pro Spiel zu- bez. abgeleitet werden müssen, ausser Betracht lassen mussten, weil bis dahin die Verdrängerwirkung noch keiner nähern Prüfung unterworfen worden war.

Unter Hinweis auf die Darlegungen in § 38 S. 186 kann nun aber an die Untersuchung des Processes herangetreten werden, welchen die in Fig. 56 S. 333 angenommene Maschinenanordnung ausführt; dabei soll jedoch die Voraussetzung gemacht werden, dass die aus dem Regenerator kommende Luft jederzeit diejenige Temperatur dort erlangt hat, welche in dem Raume herrscht, in welchen die Luft *eintritt*.

a) Vorgänge im ersten Zeitabschnitte (I) Fig. 56. Der Kolben K_1 steht fest und der Kolben K_2 wird von rechts nach links geschoben; in dem Augenblicke, wo sich das Volumen des kalten Raumes von V_2 auf V vermindert hat und der Druck p ist, besteht die Beziehung

$$B\,G\,T_2 = (1 + m)\,V p\,,$$

welche auf S. 334 gegeben wurde. Die Arbeit L_2' im ganzen Zeitabschnitte I findet sich daher durch Integration der Gleichung $dL_2' = p\,d\,V$ unter Benutzung vorstehender Formel:

$$L_2' = -\frac{B\,G\,T_2}{1+m}\,\mathrm{logn}\,\frac{p_3}{p_2}\,. \tag{105}$$

Die Wärmemenge Q_2', welche hierbei dem kalten Raume B zuzuführen ist, ergiebt sich, weil dieser hier der Abflussraum ist und ein Theil der Luft in den Regenerator gedrängt wird, nach Gl. (47a) S. 192, da hier noch $T_x = T_2$ constant ist, durch Integration der Formel

$$dQ_2' = -AVdp = -Ad(Vp) + ApdV,$$

daher

$$Q_2' = AL_2' + AV_2p_2 - AV_3p_3. \qquad (106)$$

b) Vorgänge im zweiten Zeitabschnitte (II). Der Kolben K_2 geht vollends an das linke Hubende und der Kolben K_1 im heissen Raume legt den Raum V_1 zurück; dabei wird die Luft durch den Regenerator hindurch aus dem kalten nach dem heissen Raume verdrängt.

In einem gewissen Moment, wo das Volumen der Luft im heissen Raume V_x und im kalten Raume V_y beträgt und die augenblickliche mittlere Temperatur im Regenerator T ist, bestimmt sich der Druck p aus der Beziehung

$$BG = \left(\frac{V_x}{T_1} + \frac{V_y}{T_2} + \frac{V_0}{T}\right)p.$$

Setzt man $V_x + V_y = V$ und unserer Hypothese entsprechend $VT = V_2T_0$, so folgt unter Benutzung von Gl. (100)

$$V_x - \frac{\lambda(1+m)}{\lambda-1}V = -\frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{BGT_2}{p}$$

und hieraus, wenn man differentiirt und mit p multiplicirt,

$$pdV_x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}BGT_2\frac{dp}{p} + \frac{\lambda(1+m)}{\lambda-1}pdV.$$

Nun ist aber allgemein für die polytropische Curve (S. 145)

$$pdV = -\frac{1}{n-1}d(Vp)$$

und da überdies

$$pdV_y = pdV - pdV_x$$

ist, so ergiebt sich:

$$pdV_x = -\frac{\lambda}{\lambda-1}BGT_2\frac{dp}{p} - \frac{\lambda(1+m)}{(\lambda-1)(n-1)}d(Vp) \qquad (107\,a)$$

und

$$pdV_y = +\frac{\lambda}{\lambda-1}BGT_2\frac{dp}{p} + \frac{1+m\lambda}{(\lambda-1)(n-1)}d(Vp). \qquad (108\,a)$$

Die Integration der erstern Gleichung giebt die Arbeit L_1'

und die der andern Gleichung die Arbeit L_2'', welche bez. im heissen und im kalten Raume gewonnen wird:

$$L_1' = -\frac{\lambda}{\lambda - 1} B G T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} - \frac{\lambda(1 + m)}{(\lambda - 1)(n - 1)} (V_1 p_1 - V_3 p_3) \quad (107)$$

$$L_2'' = +\frac{\lambda}{\lambda - 1} B G T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_3} + \frac{1 + m\lambda}{(\lambda - 1)(n - 1)} (V_1 p_1 - V_3 p_3). \quad (108)$$

Der heisse Raum ist hier der Zuflussraum, für welchen bezüglich der mitzutheilenden Wärme dQ' die Gl. (48a) S. 192 gültig ist, wobei dort $T_x = T_y = T_1$ zu setzen ist, weil die aus dem Regenerator kommende Luft schon die Temperatur T_1 besitzt; es ist daher

$$dQ' = -A V_x dp = -A d(V_x p) + A p dV_x\,. \quad (109\text{a})$$

Die Wärmemenge dQ'' für den Abflussraum ist nach Gl. (47a) S. 192

$$dQ'' = -A V_y dp = -A d(V_y p) + A p dV_y\,. \quad (110\text{a})$$

Die Integration der ersten Gleichung giebt die Wärmemenge Q_1' für den heissen Raum und die der zweiten Gleichung die Wärmemenge Q_2'', welche dem kalten Raume zuzuführen ist:

$$Q_1' = A L_1' - A V_1 p_1 \quad (109)$$

und

$$Q_2'' = A L_2'' + A V_3 p_3\,. \quad (110)$$

c) *Vorgänge im dritten Zeitabschnitte (III)* Fig. 56 S. 333. Hier bleibt der Kolben K_2 am linken Ende seines Hubes stehen und der Kolben K_1 geht vollends an das linke Hubende.

Ist p der Druck und V das veränderliche Volumen des heissen Raumes, so gilt nach S. 334 die Beziehung

$$\lambda B G T_2 = (1 + \lambda m) V p\,.$$

Die gewonnene Arbeit L_1'' findet man durch Integration der Gleichung für $p dV$ und die Wärmemenge Q_1'' durch Integration des Ausdruckes

$$-A V dp = -A d(Vp) + A p dV\,.$$

Unter Benutzung vorstehender Beziehung folgt dann:

$$L_1'' = \frac{\lambda}{1 + \lambda m} B G T_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4} \quad (111)$$

und

$$Q_1'' = A L_1'' + A(V_1 p_1 - V_4 p_4)\ . \qquad (112)$$

d) Vorgänge im vierten Zeitabschnitte (IV) Fig. 56. Beide Kolben gehen vom linken zum rechten Hubende zurück; die Arbeitsquantitäten bestimmen sich hier, wie leicht einzusehen, durch Integration der beiden Gln. (107 a) und (108 a). Man erhält die Arbeit L_1''' im heissen Raume

$$L_1''' = -\frac{\lambda}{\lambda - 1} B G T_2 \operatorname{logn} \frac{p_2}{p_4} - \frac{\lambda(1+m)}{(\lambda-1)(n-1)}(V_2 p_2 - V_4 p_4), \quad (113)$$

und die Arbeit L_2''' im kalten Raume:

$$L_2''' = +\frac{\lambda}{\lambda - 1} B G T_2 \operatorname{logn} \frac{p_2}{p_4} + \frac{1 + m\lambda}{(\lambda-1)(n-1)}(V_2 p_2 - V_4 p_4), \quad (114)$$

und endlich bestimmen sich die Wärmemengen Q_1''' und Q_2''' durch Integration der Gln. (109 a) und (110 a)

$$Q_1''' = A L_1''' + A V_4 p_4 \qquad (115)$$

und

$$Q_2''' = A L_2''' - A V_2 p_2\ . \qquad (116)$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln, die je nach dem angenommenen Werthe von n noch unendlich viele Einzelfälle umschliessen, lassen sich nun die Hauptfragen beantworten.

Die ganze Arbeit L_1, die bei einem Spiele im heissen Cylinder gewonnen wird, findet sich durch den Ausdruck

$$L_1 = L_1' + L_1'' + L_1''',$$

und die Arbeit L_2, welche im kalten Cylinder verbraucht wird, durch

$$L_2 = L_2' + L_2'' + L_2'''\ .$$

Benutzt man in der vorletzten Gleichung die Gln. (107), (111) und (113) und in der letzten (105), (108) und (114) und berücksichtigt dann noch die Beziehungen Gln. (101) bis (104) S. 334, so erhält man die merkwürdig einfachen Formeln:

$$L_1 = V_1 p_1 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4}$$

und

$$L_2 = V_2 p_2 \operatorname{logn} \frac{p_3}{p_2}\ .$$

Verwendet man noch Gl. (104) und beachtet dann die Beziehung $p_3 p_4 = p_1 p_2$ nach Gl. (103), so ist auch:

$$L_1 = \frac{\lambda(1+m)}{1+\lambda m} \cdot V_2 p_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4}, \tag{117}$$

$$L_2 = V_2 p_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4}. \tag{118}$$

Die Differenz beider Werthe giebt die Arbeit L der Maschine pro Spiel

$$L = \frac{\lambda - 1}{1+\lambda m} V_2 p_2 \operatorname{logn} \frac{p_1}{p_4}, \tag{119}$$

in welchen Formeln p_4 durch Gl. (104a), nämlich

$$p_4 = p_2 \left(\frac{\lambda(1+m)}{1+\lambda m}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{120}$$

bestimmt und die Hülfsgrösse m nach Gl. (100) zu wählen ist.

Was nun die wichtige Frage nach den Wärmemengen betrifft, so ermittelt sich die Wärmequantität Q_1, welche dem heissen Raume pro Spiel mitzutheilen ist, durch den Ausdruck

$$Q_1 = Q_1' + Q_1'' + Q_1'''$$

und die Wärmemenge Q_2, welche dem kalten Raume zu entziehen ist, durch

$$Q_2 = Q_2' + Q_2'' + Q_2''',$$

und wenn man hier im ersten Ausdrucke die Gln. (109), (112) und (115), sowie im letzten die Gln. (106), (110) und (116) benutzt, so ergeben sich die überraschend einfachen Sätze

$$Q_1 = A L_1 \quad \text{und} \quad Q_2 = A L_2, \tag{121}$$

wobei L_1 und L_2 nach Gln. (117) und (118) bestimmt sind. Aus dem Vorstehenden finden sich folgende Verhältnisse

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\lambda(1+m)}{1+\lambda m}; \quad \frac{L_1}{L} = \frac{\lambda(1+m)}{\lambda - 1}; \quad \frac{L_2}{L} = \frac{1+\lambda m}{\lambda - 1} \tag{122}$$

und

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{1+\lambda m}{\lambda(1+m)}, \tag{123}$$

sowie

$$\frac{AL}{Q_1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda(1+m)}. \tag{124}$$

Würde dieselbe Wärmemenge Q_1 durch eine theoretisch vollkommene Maschine verwerthet, so wäre die Arbeit L_m nach der Gleichung

$$\frac{A L_m}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

zu beurtheilen: durch Division der letzten beiden Formeln folgt demnach für die hier untersuchte Heissluftmaschine der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L}{L_m} = \frac{1}{1 + m} \cdot \qquad (125)$$

Die Grösse m ist nach Gl. (100) dem Luftinhalte V_0 des Regenerators direct proportional: wäre daher die metallische Füllung oder das Drahtgeflecht im Regenerator so dicht, dass man den Luftinhalt V_0 des Regenerators als sehr klein vernachlässigen dürfte, so wäre in allen vorstehenden Formeln $m = 0$ zu setzen; dann ergeben sich aber genau dieselben Formeln, die früher bei der Betrachtung des rein theoretischen Processes auf S. 267 gefunden worden sind; die Heissluftmaschine mit Regenerator von der angenommenen Anordnung nähert sich also in ihrer Wirkung um so mehr der vollkommenen Maschine, je kleiner das im Regenerator abgesperrte Luftvolumen V_0 ist; man erkennt daraus, dass dieses Luftvolumen, wie das auch von vorn herein zu erwarten stand, genau die Wirkung eines schädlichen Raumes hat und dass bei einer gewissen Grösse desselben der ganze Vortheil des Regenerators verschwindet.

Es ergeben sich daher die praktischen Regeln:

1) Die Heissluftmaschinen jederzeit mit einem Regenerator zu versehen,
2) den freien (Luft-)Raum V_0 des Regenerators im Verhältniss zum Inhalte der Cylinder möglichst klein zu machen.

Da aber die vorausgesetzte Regeneratorwirkung ein gewisses und wohl nicht zu kleines Volumen der Metallfüllung fordert, so muss man auf möglichste Verminderung der Zwischenräume Bedacht nehmen. Bestimmte Erfahrungen liegen hierüber noch nicht vor, da gerade diejenigen Systeme von Heissluftmaschinen, die einige Verbreitung gefunden haben, mit Ausnahme der Maschine von Rider, gar keinen Regenerator besitzen. Ueber Beobachtungen am

Regenerator von Heissluftmaschinen sind mir nur einige Bemerkungen von Combes (Moniteur industriel 1853 Nr. 1788) bekannt geworden, wonach Versuche in Havre den Widerstand, welchen das Drahtgeflecht im Regenerator dem Luftdurchgange entgegenstellte, ausserordentlich gering ergaben und die Wirkung des Regenerators eine fast vollkommene gewesen sein soll. Die durchgehende kalte Luft sei fast vollständig im Regenerator auf die obere Temperatur gebracht worden und ebenso habe die Luft beim Rückgange ihre Wärme wieder vollständig an den Regenerator zurückgegeben, wobei die Maschine bis zu 50 Spiele pro Minute gemacht habe.

Die oben vorgeführten theoretischen Untersuchungen dürften für die Ansicht sprechen, dass in der Ausführung von Heissluftmaschinen mit Regenerator doch sicher noch Erfolge zu erwarten stehen. Es wird daher zweckmässig sein, im Folgenden die gewonnenen Sätze an numerischen Beispielen noch näher zu erläutern.

§ 67. Geschlossene Heissluftmaschine mit Regenerator. Zweite Anordnung.

Bevor auf die soeben erwähnte specielle Untersuchung eingegangen wird, mag erst noch eine Maschinenanordnung besprochen werden, durch welche genau derselbe Process ausgeführt werden kann, der vorhin in Fig. 56 S. 333 den Betrachtungen zu Grunde gelegt worden ist.

Die nebenstehende Figur 57 giebt die schematische Darstellung der betreffenden Maschine, die, wie man erkennt, mit der Lehmann'schen Maschine, Fig. 52 S. 311, identisch ist, nur mit der Erweiterung, dass hier der Verdränger K_1 hohl ist und in der mit Drahtgeflecht ausgefüllten Höhlung den Regenerator R enthält, durch welchen die Luft, da das Innere des Regenerators mit beiden Seiten des Cylinders in freier Verbindung steht, beim Verschieben des Verdrängers hindurchstreicht.

Ueber den Arbeitsprocess der Maschine und die Kolbenbewegung wäre hier nur zu wiederholen, was bereits in § 62 bei Betrachtung von Fig. 52 S. 311 erwähnt worden ist. Der Gedanke, den Regenerator in das Innere des Verdrängers zu legen, rührt von Dr. Robert Stirling her; die von ihm (1832) vorgeschlagene Maschine hatte aber einen besonderen Arbeitscylinder,

wie die Maschine von Laubereau-Schwartzkopff (Fig. 55 S. 324); die letztere ist daher im Princip mit der Stirling-schen Maschine identisch, nur mit dem Unterschiede, dass bei ihr der Regenerator weggelassen worden ist.*)

Die hier in Fig. 57 skizzirte Maschine ist meines Wissens noch nicht ausgeführt worden; liegt in der Einfügung des Regenerators eine Verbesserung, was wie oben bereits bewiesen,

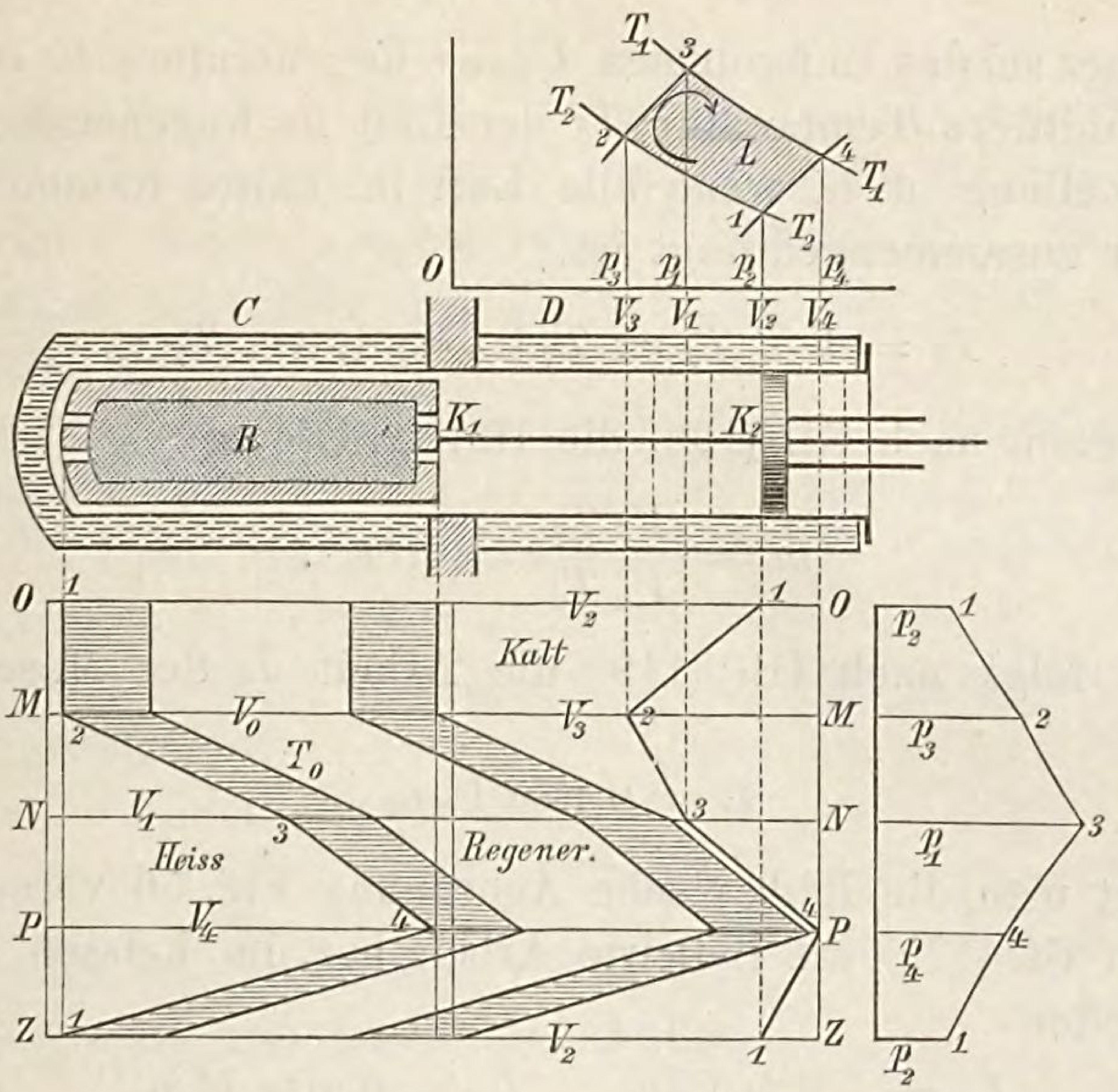


Fig. 57.

wirklich im hohen Maasse der Fall ist, so wäre der Versuch der praktischen Ausführung derselben zu empfehlen.

Es mag nun auf die angezeigte Specialuntersuchung näher eingegangen werden; die Rechnungsergebnisse gelten gleichzeitig für beide Maschinenanordnungen Fig. 56 und 57.

Specialfall 1. Eine Heissluftmaschine mit Regenerator von der Anordnung Fig. 56 oder Fig. 57 soll den Ericsson'schen Process ausführen, es soll also der in Fig. 53 S. 319 gegebene Kreisprocess zu Grunde gelegt werden. Hier verlaufen in den Indicatordiagrammen der Fig. 56 und 57 die mit 1 — 4

*) Vergl. Civilingenieur Bd. 1. 1854. S. 92. Taf. 11. Fig. 1.

und 2—3 bezeichneten Curvenstrecken horizontal geradlinig; es ist daher

$$p_3 = p_1 \quad \text{und} \quad p_4 = p_2 \quad \text{und} \quad n = 0$$

zu setzen.

Bezüglich der Grenzwerthe der Temperaturen und der Pressungen sollen folgende Werthe vorausgesetzt werden:

$$\lambda = \frac{T_1}{T_2} = 2 \quad \text{und} \quad \frac{p_1}{p_2} = 2{,}5 \ .$$

Ferner sei das Luftvolumen V_0 des Regenerators $V_0 = 0{,}7 \,.\, V_2$ und die mittlere Temperatur T_0 der Luft im Regenerator bei der Anfangsstellung, d. h. wenn alle Luft im kalten Raume und Regenerator zusammengedrängt ist,

$$T_0 = \sqrt{T_1 T_2} = T_2 \sqrt{\lambda} = 1{,}414 \,.\, T_2 \ ;$$

es folgt dann nach Gl. (100) die Hülfsgrösse m

$$m = \frac{V_0 T_2}{V_2 T_0} = 0{,}495 \ .$$

Nun folgt nach Gl. (119) die Arbeit L der Maschine pro Spiel

$$L = 0{,}4600 \ V_2 p_2 \ .$$

Setzt man die Rider'sche Anordnung Fig. 56 voraus, so ist nach den Gl. (122) die indicirte Arbeit bez. im heissen und kalten Cylinder

$$L_1 = 1{,}3754 \ V_2 p_2 \ ; \quad L_2 = 0{,}9154 \ V_2 p_2 \ .$$

Setzt man den untern Druck $p_2 = 10\,333$, also eine Atmosphäre, voraus, so folgt

$$L = 4753 \ V_2$$

und die Wärmemengen pro Spiel:

$$Q_1 = 33{,}518 \ V_2 \quad \text{und} \quad Q_2 = 22{,}301 \ V_2 \ .$$

Der Wirkungsgrad dieser Maschine ist nach Gl. (125)

$$\eta = 0{,}669 \ .$$

Ferner findet sich nach den Gln. (104) und (102)

$$V_1 = 0{,}6010 \ V_2 \ ; \quad V_3 = 0{,}4000 \ V_2 \quad \text{und} \quad V_4 = 1{,}5025 \ V_2 \ .$$

Haben beide Kolben den gleichen Querschnitt F und ist s_1 der Hub des Kolbens im heissen Raume, und s_2 bei der Rider-schen Anordnung Fig. 56 der Hub des Kolbens im kalten Raume, so ist wegen $V_4 = Fs_1$ und $V_2 = Fs_2$ nach Vorstehendem

$$s_2 = 0{,}665\, s_1 \ .$$

Bei der Lehmann'schen Anordnung (Fig. 57) ist das Volumen, welches der Kolben im kalten Raume beschreibt (Arbeitskolben) $Fs_2 = V_4 - V_3 = 1{,}1025\, V_2$, woraus folgen würde

$$s_2 = 0{,}734 \,.\, s_1 \ .$$

Dieselbe Maschine würde, wenn sie keinen Regenerator besässe, nach den Gln. (65) und (76) S. 313 u. S. 317 bei gleichem Werthe von λ und $p_1 : p_2$ nur einen Wirkungsgrad $\eta = 0{,}347$ ergeben, sodass also hier der Vortheil des Regenerators messbar und deutlich hervortritt.

Specialfall 2. Eine Heissluftmaschine mit Regenerator von der Anordnung Fig. 56 und 57 soll den Stirling'schen Process ausführen, es soll also der in Fig. 54 S. 321 angegebene Kreisprocess zu Grunde gelegt werden; hier ist $V_3 = V_1$, $V_4 = V_2$ und $n = \infty$ zu setzen und aus den Gln. (102) ergeben sich die Zwischenpressungen:

$$p_3 = \frac{V_2}{V_1} p_2 \quad \text{und} \quad p_4 = \frac{V_1}{V_2} p_1$$

und V_1 folgt wiederum nach Gl. (104).

Nimmt man, wie im vorigen Falle,

$$\lambda = 2 \ ; \ \frac{p_1}{p_2} = 2{,}5 \quad \text{und} \quad m = 0{,}495 \ ,$$

so ist für den vorliegenden Kreisprocess wieder

$$V_1 = 0{,}6010 \,.\, V_2$$

und ebenso finden sich auch die Arbeitsquantitäten L_1, L_2 und L, sowie die Wärmemengen Q_1 und Q_2, wie auch der Wirkungsgrad von gleicher Grösse. Die Zwischenpressungen ergeben sich

$$p_3 = 1{,}664 \,.\, p_2 \quad \text{und} \quad p_4 = 1{,}502 \,.\, p_2 \ .$$

Setzt man beide Kolben vom gleichen Querschnitte F voraus und ist s_1 der Hub des Kolbens im heissen Raume und s_2 der

des Kolbens im kalten Raume, so ist bei der Rider'schen Anordnung, weil V_4 und V_2 gleich gross sind und beide Werthe die Räume darstellen, welche die Kolben pro Spiel zurücklegen:

$$s_2 = s_1 \; .$$

Liegt dagegen die Lehmann'sche Anordnung Fig. 57 zu Grunde, so ist der Raum, welchen der Arbeitskolben pro Schub beschreibt,

$$Fs_2 = V_4 - V_3 \; ,$$

woraus

$$s_2 = 0{,}299 \, . \, s_1$$

folgt.

Die praktischen Ausführungen der Rider'schen Maschine zeigen in der That nahezu $V_4 = V_2$ und $s_2 = s_1$; sie würde also den Stirling'schen Process ausführen, wenn ihre Kolbenbewegung die in Fig. 56 vorausgesetzte wäre.

Würde für eine solche Maschine der Durchmesser beider Kolben $d = 250$ mm und der Hub beider Kolben $s_1 = s_2 = 300$ mm betragen, wären ferner die Grenzpressungen $p_2 = 10\,333$ kg und $p_1 = 2{,}5 \, . \, p_2 = 25\,833$ kg und würde die Maschine in der Minute $u = 140$ Spiele (Umdrehungen) machen, so bestände, wenn N die indicirte Arbeit in Pferdestärken bedeutet, die Beziehung

$$60 \, . \, 75 \, . \, N = Lu$$

und daher, wenn man nach dem vorigen Beispiele $L = 4753 \; V_2$ benutzt und

$$V_2 = \frac{\pi d^2}{4} s_2 = 0{,}014726 \text{ cbm}$$

substituirt, die Arbeit der Maschine in Pferdestärken

$$N = 2{,}177 \; .$$

Die Wärmemengen pro Spiel ergeben sich aus den Rechnungsresultaten des vorigen Beispieles

$$Q_1 = 0{,}4936 \text{ cal.} \quad \text{und} \quad Q_2 = 0{,}3285 \text{ cal.}$$

Die Wärmemenge, welche daher stündlich dem kalten Raume zu entziehen wäre, findet sich $60 \, . \, Q_2 u$ und daher die Kühlwassermenge stündlich, wenn sich dieselbe um 10° C. erwärmt:

276 kg .

Die gefundenen Werthe sind natürlich theoretische, da sie unter Vernachlässigung der schädlichen Räume und aller andern Arbeitsverluste und unter Annahme vollständiger Wirkung des Regenerators gefunden worden sind.

§ 68. Luftmaschinen mit Regenerator und continuirlicher durch Kurbeln erzeugter Kolbenbewegung.

Die Art und Weise der Kolbenbewegung, wie sie bei den Untersuchungen vorausgesetzt worden ist, denen die Figuren 51 bis 57 zu Grunde gelegt wurden, ermöglichte bei ein und derselben Maschinenanordnung die verschiedensten Processe, je nach der Wahl der betreffenden polytropischen Curve; die angenommene Kolbenbewegung kommt aber bei den wirklich ausgeführten Maschinen nicht zur Anwendung; statt einer ruckweisen, discontinuirlichen Bewegung benutzt man Bewegungen, wie sie durch Kurbeln unter Umständen in Verbindung mit Hebelübertragung erzielt werden. Es mögen daher die Heissluftmaschinen, und zwar die Rider'sche und Lehmann'sche Maschine noch näherer Betrachtung unterworfen werden unter der Voraussetzung, dass sie mit dem Regenerator versehen sind und dass jeder der beiden Kolben durch eine Kurbel bewegt wird, wobei aber der Einfachheit wegen angenommen werde, dass sehr lange Kurbelstangen vorliegen.

Zuerst die Rider'sche Maschine.

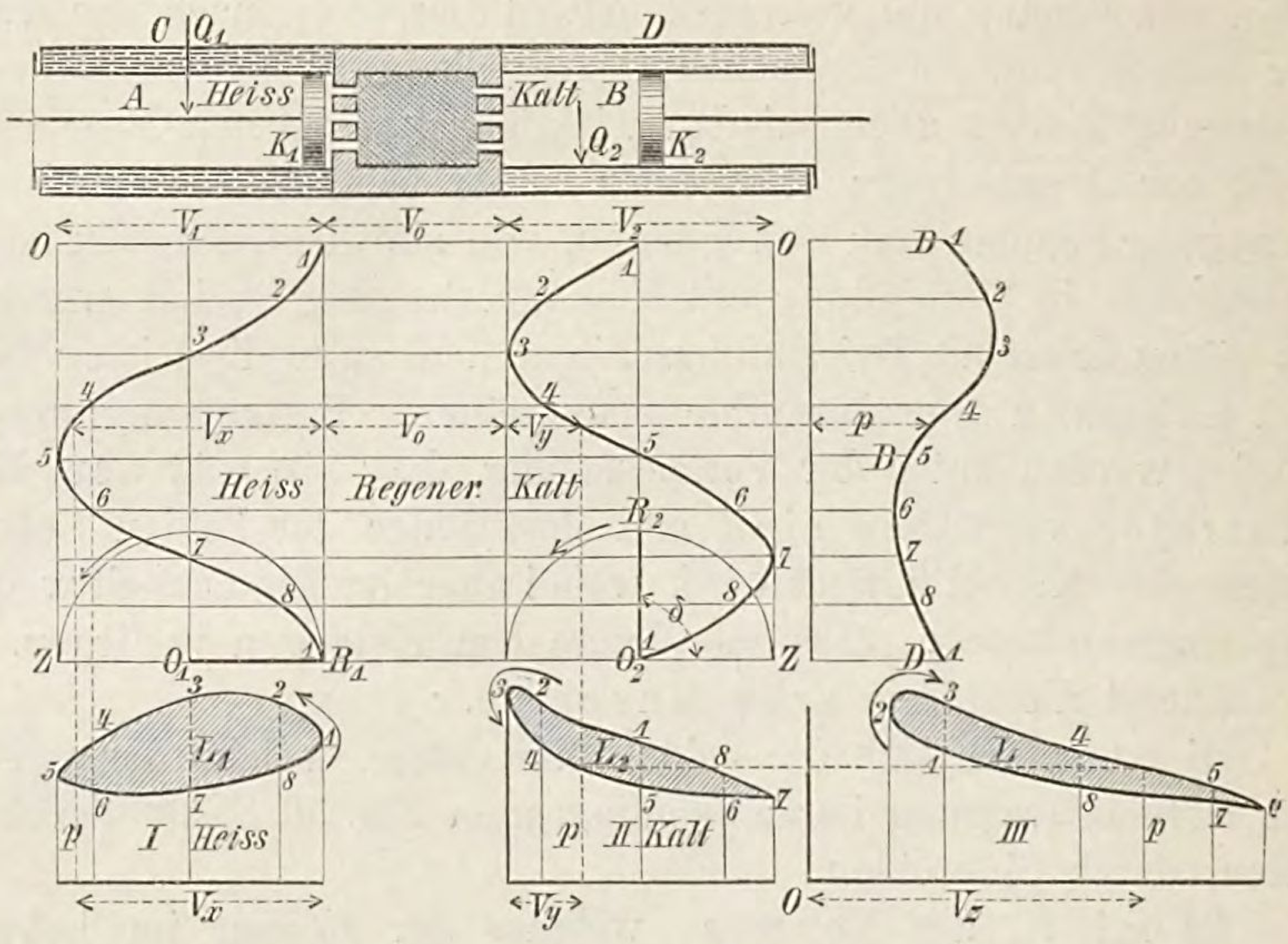
Hier ersetzen sich die beiden Linienzüge, welche das Gesetz der Kolbenbewegung im Kolbendiagramm Fig. 56 S. 333 bezeichneten, durch Sinusoiden.

Es sei V_1 das Volumen, welches der Kolben im heissen Raume beschreibt, V_2 das für den Kolben im kalten Raume und V_0 das Luftvolumen im Regenerator. Trägt man (Fig. 58) a. f. S. die Werthe V_1, V_0 und V_2 auf einer gerade Linie als Längen neben einander auf und beschreibt aus den Halbirungspunkten O_1 und O_2 der Längen V_1 und V_2 die angegebenen Halbkreise mit den Radien $O_1 R_1 = \frac{1}{2} V_1$ und $O_2 R_2 = \frac{1}{2} V_2$, so können diese Halbmesser als die entsprechenden Kurbelradien angesehen werden.

Steht der Kolben im heissen Raume im Anfange am rechten Hubende, so steht seine Kurbel $O_1 R_1$ im rechten todten Punkte; in diesem Augenblicke mag aber die Kurbel $O R_2$ des Kolbens im kalten Raume schon um einen gegebenen Winkel δ (in der

Figur ist $\delta = 90^\circ$ angenommen worden) von ihrem rechten todten Punkte abstehen; kurz gesagt, es sei δ Voreilwinkel der Kurbel $O_2 R_2$ gegen die Kurbel $O R_1$, wobei die Bewegungsrichtung beider Kurbeln durch die angegebenen Pfeile bestimmt sein soll. An Stelle der Zeit für ein volles Spiel und für einen Theil desselben kann man nun aber auf der Verticalen OZ den Drehwinkel ω einsetzen, um welchen sich beide Kurbeln von ihrer Anfangslage aus gedreht haben; für die volle Umdrehung ist $2\pi = OZ$ für ω zu setzen.

Fig. 58.



Jetzt hat es nun keine Schwierigkeiten, für irgend einen Drehwinkel ω der Kurbeln das zugehörige Volumen V_x der Luft im heissen Raume und das augenblickliche Volumen V_y der Luft im kalten Raume zu bestimmen; man erhält ohne Weiteres:

$$V_x = \tfrac{1}{2}\, V_1 (1 - \cos \omega) \tag{126}$$

und

$$V_y = \tfrac{1}{2}\, V_2 [1 + \cos (\omega + \delta)] \tag{127}$$

und hiernach das dem Drehwinkel ω entsprechende Gesammt-

volumen der Luft in der Maschine, das mit V_z bezeichnet werden mag, $V_z = V_0 + V_x + V_y$.

Ist nun wieder G das Gewicht der in der Maschine eingeschlossenen Luft, T_1 die Temperatur im heissen Raume, T_2 die im kalten und T die augenblickliche mittlere Temperatur im Regenerator im oben gegebenen Sinne, so besteht wieder die Beziehung

$$B\,G = \left(\frac{V_x}{T_1} + \frac{V_y}{T_2} + \frac{V_0}{T}\right) p\,,$$

wobei p der augenblickliche Luftdruck ist.

Bezeichnet man wieder das Temperaturverhältniss $T_1 : T_2$ mit λ und setzt man $V = V_x + V_y$, so folgt:

$$B\,G\,T_2 = \left[\frac{V_x}{\lambda} + V_y + \frac{V_0\,T_2}{V\,T}\,(V_x + V_y)\right] p\,. \qquad (128)$$

Ich gehe nun auch hier von der Hypothese aus, dass sich die mittlere Temperatur im Regenerator nach dem Gesetze $V\,T =$ Const. ändere und daher

$$\frac{V_0\,T_2}{V\,T} = m$$

gesetzt werden dürfe, wobei m für die betreffende Maschine als eine gegebene constante Grösse angesehen werden kann, die sich genau genug dadurch bestimmt, dass man dem mittlern Werthe von V_z entsprechend die mittlere Temperatur $\sqrt{T_1\,T_2} = T_2\sqrt{\lambda}$ annimmt; es wäre daher nach den Gln. (126) und (127)

$$V\,T = \left(V_0 + \frac{V_1 + V_2}{2}\right) T_2\sqrt{\lambda}$$

anzunehmen und damit m bestimmt.

Aus Gl. (128) ergiebt sich nun

$$\frac{\lambda\,B\,G\,T_2}{p} = (1 + m\lambda)\,V_x + \lambda(1 + m)\,V_y\,. \qquad (129)$$

Differentiirt man diesen Ausdruck und multiplicirt ihn dann auf beiden Seiten mit p, so folgt

$$-\,\lambda\,B\,G\,T_2\,\frac{dp}{p} = (1 + m\lambda)\,p\,dV_x + \lambda(1 + m)\,p\,dV_y\,.$$

Man integrirt den Ausdruck für eine volle Umdrehung und setzt

$$L_1 = \int p\, dV_x \quad \text{und} \quad L_2 = \int p\, dV_y\,,$$

wobei L_1 die im heissen und L_2 die im kalten Cylinder gewonnene Arbeit darstellt, Werthe, die übrigens durch die Indicatordiagramme I und II Fig. 58 gegeben sind. Da für die beiden Integrationsgrenzen der Druck ein und denselben Werth hat, so folgt aus der letzten Gleichung auf voriger Seite

$$(1 + m\lambda) L_1 + \lambda (1 + m) L_2 = 0\,.$$

Weiterhin ist aber die ganze Arbeit L, welche durch die Maschine pro Umdrehung gewonnen wird,

$$L = L_1 + L_2\,.$$

Die Verbindung beider Formeln ergiebt dann auch

$$L_1 = \frac{\lambda(1 + m)}{\lambda - 1} L \quad \text{und} \quad L_2 = -\frac{1 + m\lambda}{\lambda - 1} L\,. \tag{130}$$

Ist daher von den drei Arbeitswerthen nur einer bekannt, so bestimmen sich sogleich auch die beiden andern.

Bei Heissluftmaschinen ist die Arbeit L positiv, d. h. man gewinnt Arbeit, daher wird durch den Kolben im heissen Raume immer Arbeit gewonnen, während der Kolben im kalten Raume die Arbeit L_2 verbraucht.

Was nun die Wärmemenge dQ betrifft, die beispielsweise dem heissen Raume mitzutheilen ist, so findet sich diese durch Gl. (47 a) S. 192, falls dieser Raum der Abflussraum wäre, andernfalls durch Gl. (48 a) S. 192. Da nun aber anzunehmen ist, dass die Luft aus dem Regenerator mit derjenigen Temperatur eintritt, die im Zuflussraume vorliegt, also in der letztern Gleichung $T_x = T_y$ zu setzen ist, so fällt das Glied $c_p (T_y - T_x) d G_y$ fort und beide Gleichungen (47 a) und (48 a) werden identisch, der Unterschied zwischen Zu- und Abflussraum verschwindet also, sobald ein Regenerator vorhanden ist.

Die Wärmemenge Q_1, welche dem heissen Raume zuzuführen ist, folgt hiernach durch Integration der Gleichung

$$-A V_x dp = -A d(V_x p) + A p\, dV_x$$

und die Wärmemenge Q_2 für den kalten Raum durch Integration von

$$-AV_y dp = -Vd(V_y p) + Ap\,dV_y\,.$$

Nun sind aber für eine volle Umdrehung die Anfangs- und Endwerthe der Producte $V_x p$ und $V_y p$ dieselben, daher folgen die beiden Wärmemengen pro Umdrehung:

$$Q_1 = AL_1 = \frac{\lambda(1+m)}{\lambda-1}AL \tag{131}$$

und

$$Q_2 = AL_2 = -\frac{1+m\lambda}{\lambda-1}AL\,. \tag{132}$$

Es lassen sich daher beide Wärmemengen direct aus den Indicatordiagrammen beider Cylinder bestimmen, immer vorausgesetzt, dass ein Regenerator vorhanden ist.

Man erkennt, dass die vorstehenden Sätze vollständig mit denen übereinstimmen, welche bereits auf S. 340 gefunden wurden; ein sehr wichtiges Resultat, das noch näher zu besprechen sein wird.

Nur eine Frage ist noch zu erledigen, nämlich die Bestimmung wenigstens einer der drei Arbeitsquantitäten L, L_1 oder L_2.

Zu diesem Zwecke muss erst ermittelt werden, nach welchem Gesetze der Druck p mit dem Kurbeldrehwinkel ω variirt; benutzt man die Gln. (126) und (127) in Gl. (129) so folgt:

$$\frac{2\lambda BGT_2}{p} = (1+m\lambda)V_1(1-\cos\omega) + (1+m)V_2(1+\cos(\omega+\delta))\,.$$

Setzt man nun zur Vereinfachung

$$\frac{1+m\lambda}{\lambda(1+m)}\frac{V_1}{V_2} = a\,, \tag{133}$$

so schreibt sich auch:

$$\frac{2\lambda BGT_2}{p(1+m)\lambda V_2(1+a)} = 1 - \left(\frac{a-\cos\delta}{a+1}\cos\omega + \frac{\sin\delta}{a+1}\sin\omega\right)\,.$$

Führt man weiter die Hülfsgrössen c, r und α nach folgender Zusammenstellung ein:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\lambda B G T_2}{(1+m)\lambda V_2(1+a)} &= c\\ \frac{a-\cos\delta}{a+1} &= r\cos\alpha\\ \frac{\sin\delta}{a+1} &= r\sin\alpha\ ,\end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

so folgt endlich

$$p = \frac{c}{1 - r\cos(\omega - \alpha)}\ , \qquad (135)$$

wonach sich, da vorstehende Formel die Polargleichung einer Ellipse aus dem Brennpunkte ist, der Druck p sehr leicht auch auf constructivem Wege für verschiedene Drehwinkel ω bestimmen und dann im Kolbenkraftdiagramm der Fig. 58 durch die Curve DDD nach seinem Aenderungsgesetze vor Augen führen lässt.

Sehr einfach gestaltet sich die Sache, wenn man sich den grössten und kleinsten Druck im Verlaufe des Processes, nämlich p_1 und p_2 als gegeben denkt; nach Gl. (135) liegt der erstere Werth für $\omega = \alpha$ vor und der andere für $\omega = 180^\circ + \alpha$; es ist daher

$$p_1 = \frac{c}{1-r} \quad \text{und} \quad p_2 = \frac{c}{1+r}$$

und durch Verbindung dieser Gleichungen folgt:

$$r = \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \quad \text{und} \quad c = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}\ , \qquad (136)$$

während die Verbindung der zweiten und dritten der Gln. (134) für den Hülfswinkel α ergiebt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\delta}{a - \cos\delta}\ . \qquad (137)$$

Nun kann an die Bestimmung eines der drei Arbeitswerthe L_1, L_2 oder L gegangen werden; es möge die Arbeit L_1 pro Umdrehung am heissen Cylinder ermittelt werden (Fig. 58). Der Druck p ändert sich mit dem Drehwinkel ω im ersten Halbkreise nach Gl. (135); im zweiten Halbkreise dagegen ergiebt sich, wenn ω vom zweiten todten Punkte ab von Neuem gezählt wird, der Druck p achn der Formel:

$$p = \frac{c}{1 + r\cos(\omega - \alpha)} \cdot$$

Differentiirt man Gl. (126), so folgt die Arbeit L' (Expansionsarbeit) im ersten Halbkreise

$$L' = -\frac{V_1 c}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos\omega)}{1 - r\cos(\omega - \alpha)};$$

und die Arbeit L'', die Compressionsarbeit, im zweiten Halbkreise

$$L'' = +\frac{V_1 c}{2}\int_0^\pi \frac{d(\cos\omega)}{1 + r\cos(\omega - \alpha)}.$$

Führt man die angedeuteten Integrationen aus, so findet sich auf einigen Umwegen die Arbeit L_1 pro Umdrehung im heissen Raume, wegen $L_1 = L' - L''$,

$$L_1 = \pi\frac{V_1 c}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} - 1\right]\sin\alpha,$$

oder, wenn man die Beziehungen (136) benutzt,

$$L_1 = \pi\sqrt{p_1 p_2}\,\frac{\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}} \cdot V_1 \sin\alpha.$$

Benutzt man weiterhin die dritte der Gln. (134) sowie Gl. (133) und die erste der Gln. (130), so ergiebt sich die Arbeit L der Maschine pro Umdrehung:

$$L = \pi \cdot \frac{(\lambda - 1)V_1 V_2 p_2}{(1 + m\lambda)V_1 + \lambda(1 + m)V_2} \cdot \frac{\varphi(\varphi^2 + 1)}{(\varphi + 1)^2} \cdot \sin\delta, \quad (138)$$

wobei

$$\varphi = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \quad (139)$$

zu setzen ist.

Bemerkenswerth ist noch, dass die Rechnung für den mittleren Werth der Ordinate DDD der Curve des Kolbendiagrammes in Fig. 58 auf den einfachen Ausdruck $\sqrt{p_1 p_2}$ führt.

Mit Vorstehendem ist nun Alles gegeben, was zur Beurtheilung einer Rider'schen Maschine mit Regenerator erforderlich

ist. Denn ist nach Gl. (138) die Maschinenarbeit L gegeben, so finden sich dann auch nach den Gln. (131) und (132) die beiden Wärmemengen Q_1 und Q_2.

Aus Gl. (138) ersieht man übrigens, dass die Arbeit L unter sonst gleichen Umständen um so grösser ist, je grösser der Voreilwinkel δ gewählt wird; man wird daher die Kurbel des kalten Cylinders am besten mit $\delta = 90^0$ der Kurbel des heissen Cylinders vorausgehen lassen. Würde die Kurbel nachlaufen, was hier in Fig. 58 z. B. der Fall wäre, wenn die Maschine in entgegengesetzter Richtung umliefe, so wäre $\sin\delta$ und demnach auch L negativ. Die Maschine verwandelt sich dann einfach in eine Arbeitsmaschine und zwar, wie später noch näher besprochen werden wird, in eine geschlossene Kaltluftmaschine.

Beispiel. Setzt man im vorliegenden Falle, wie in dem Beispiel auf S. 344,

$$\lambda = 2\ ;\quad \frac{p_1}{p_2} = 2{,}5\ ;\quad m = 0{,}495;\quad V_1 = V_2 \quad \text{und} \quad \delta = 90^\circ,$$

so folgt nach Gl. (138) die Arbeit pro Umdrehung:

$$L = 0{,}5239\ V_2 p_2\ ,$$

oder, wenn man den untern Druck p_2 zu einer Atmosphäre ($p_2 = 10333$ kg) annimmt,

$$L = 5413\ .\ V_2\ .$$

Setzt man beide Kolben von gleichem Durchmesser $d = 250$ mm und von gleichem Hube $s_1 = s_2 = 300$ mm voraus, so ist das Volumen eines Cylinders

$$V_2 = 0{,}014726 \text{ cbm},$$

und daher die Arbeit pro Umdrehung

$$L = 79{,}71 \text{ mkg},$$

oder bei $n = 140$ Umdrehungen pro Minute

$$N = 2{,}48 \text{ Pferde}.$$

Die Wärmemengen pro Umdrehung betragen nach den Gln. (131) und (132)

$$Q_1 = 0{,}5621 \text{ cal.} \quad \text{und} \quad Q_2 = -\,0{,}3741 \text{ cal.}$$

Die Wärmemenge, welche stündlich in den heissen Cylinder einzuführen ist, findet sich 1904 cal. und die Wärmemenge, welche, in gleichem Maasse gemessen, dem kalten Cylinder zu entziehen ist: 1267 cal. Erwärmt sich das Kühlwasser um 10° C., so ist die Kühlwassermenge stündlich pro Pferdestärke: 126,7 kg. Das Verhältniss L_1 und L_2 der Arbeitsquantitäten beider Cylinder berechnet sich für vorliegendes Beispiel nach den Gln. (130)

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\lambda\,(1 + m)}{1 + m\lambda} = 1{,}50$$

und im gleichen Verhältniss stehen auch die Wärmemengen Q_1 und Q_2.

Leider liegen keine Versuche vor, die einen Vergleich mit den Rechnungsresultaten zulassen, wenigstens geben dieselben keinen Aufschluss über den wirklichen Luftraum V_0 des Regenerators und über das Temperaturverhältniss λ. Einige Versuche von Schöttler*) an einer Rider'schen Maschine ergaben für das Verhältniss $L_1 : L_2$ zwischen 2,16 und 2,40 liegende Werthe, wonach dann aber für diese Versuchsmaschine λ beträchtlich grösser als 2 gesetzt werden müsste. Auffällig ungünstig ergeben die Schöttler-schen Versuche das Verhältniss der effectiven (mittelst Brems gemessenen) zur indicirten Arbeit; das Verhältniss stellt sich im Mittel 0,42 heraus, ist also etwa die Hälfte von dem, welches sich bei Dampfmaschinen ergiebt. Es wird künftigen Versuchen zur Entscheidung überlassen werden müssen, welche Correctionen an den oben entwickelten Formeln, die ohne Rücksicht auf schädlichen Raum und unter Annahme vollständiger Wirkung des Regenerators abgeleitet wurden, anzubringen sind, um die Uebereinstimmung zwischen Rechnungs- und Versuchsresultaten herbeizuführen.

In welcher Weise aus der Druckcurve DD (dem Kolbenkraftdiagramme) in Fig. 58 S. 348 die beiden dem heissen und dem kalten Cylinder entsprechenden Indicatordiagramme I und II gezeichnet werden können, ist direct aus der Figur ersichtlich; es lassen sich aber beide Diagramme durch ein drittes Diagramm (III), welches ich das resultirende Indicatordiagramm der Rider'schen Maschine nenne, vereinigt zur Darstellung bringen; man erhält dasselbe, wenn man von einem Punkte O aus (Fig. 58 III) als Abscisse den Werth $V_z = V_0 + V_x + V_y$ und p als Ordinate aufträgt. Unter Benutzung der Gln. (126) und (127) S. 348 ergiebt sich

$$V_z = V_0 + \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{1}{2}\left[(V_1 - V_2 \cos\delta)\cos\omega + V_2 \sin\delta \sin\omega\right], \quad (140)$$

wobei V_z das augenblickliche Gesammtvolumen der Luft in der Maschine beim Drucke p darstellt.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} V_1 - V_2 \cos\delta &= V \cos\delta_0 \\ V_2 \sin\delta &= V \sin\delta_0 \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

wobei V und δ_0 constante Grössen sind, deren Bedeutung sogleich hervortreten wird, so folgt aus der Verbindung:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos\delta} \quad (142)$$

und

*) Vergl. Citat S. 353.

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{V_2 \sin \delta}{V_1 - V_2 \cos \delta}, \tag{143}$$

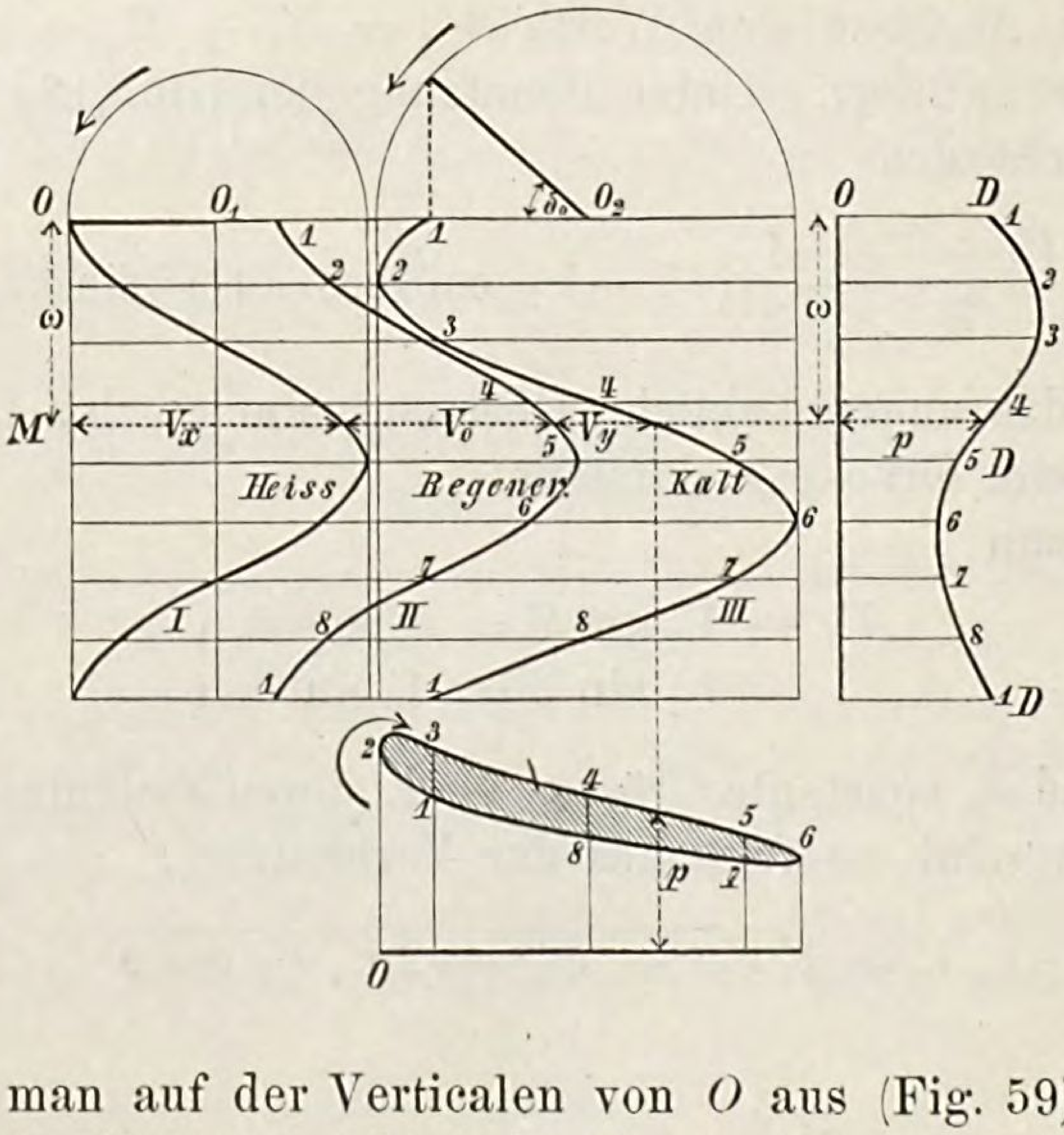
daher aus Gl. (140)

$$V_z = V_0 + \frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{1}{2} V \cos(\delta_0 - \omega) . \tag{140a}$$

Die Formel führt für V_z auf ein Minimum bez. Maximum für $\omega = \delta_0$ und $\omega = \delta_0 - \pi$; die Differenz der beiden eminenten Werthe ist V; es stellt daher dieser durch Gl. (142) bestimmte Werth den Raum dar, den der Kolben pro Schub zurücklegen müsste, wenn der ganze durch das Diagramm III Fig. 58 dargestellte Process nur in einem Cylinder stattfände.

Diese Bemerkung führt sofort auf die Betrachtung, dass man genau denselben Process, der im Vorstehenden für eine Ridersche Maschine entwickelt wurde, auch mit der Lehmann'schen Anordnung ausführen kann und dass genau dieselben Formeln gültig sind, sobald man sich die Lehmann'sche Maschine mit einem Regenerator versehen denkt und die eingeführte Bezeichnung, wie folgt, benutzt.

Fig. 59.



Trägt man auf der Verticalen von O aus (Fig. 59) den Drehwinkel ω als Abscisse OM auf und von M aus nach rechts die

Ordinaten V_x, $V_x + V_0$ und $V_x + V_0 + V_y$, wobei V_x und V_y nach Gln. (126) und (127) S. 348 berechnet werden, so erhält man drei Curven; die ersten beiden Curven I und II geben den Weg des Verdrängers (Kolbendiagramm) pro Umdrehung und die Curve III giebt das Wegdiagramm für den Arbeitskolben. (Vergl. Fig. 57 S. 343.) Ist ebenso die Druckcurve DD als Function von ω gezeichnet, so finden sich, wie sofort aus den Andeutungen in Fig. 59 ersichtlich ist, die einzelnen Punkte des Indicatordiagrammes, welches mit dem Diagramme III in Fig. 58 identisch ist und welches bei der Lehmann'schen Maschine direct mittelst eines Indicators gewonnen wird.

Ist für die Rider'sche Maschine V_1, V_2 und δ gegeben, so finden sich V und δ_0 für die Lehmann'sche Maschine, welche denselben Process ausführen soll, sofort durch Gl. (142) und (143).

Wäre beispielsweise $V_1 = V_2$ und $\delta = 90^\circ$, so müsste bei der Lehmann'schen Maschine der Raum V, welchen der Arbeitskolben beschreibt, $V = V_1 \sqrt{2}$ sein und die Kurbel dieses Kolbens um den Winkel $\delta_0 = 45^\circ$ der Kurbel des Verdrängers nachlaufen.

Wären dagegen für die Lehmann'sche Maschine (einen Regenerator vorausgesetzt) V_1, V und δ_0 gegeben, so würde man nach den Gln. (141) V_2 und δ berechnen; man findet

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + V^2 - 2\,V V_1 \cos\delta_0}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{V \sin\delta_0}{V_1 - V\cos\delta_0}$$

und hat damit gewissermassen die Lehmann'sche Maschine auf die Rider'sche zurückgeführt; man kann nun ihre Arbeit durch Gl. (138) bestimmen, sowie auch die übrigen Grössen nach den dort entwickelten Formeln ermitteln.

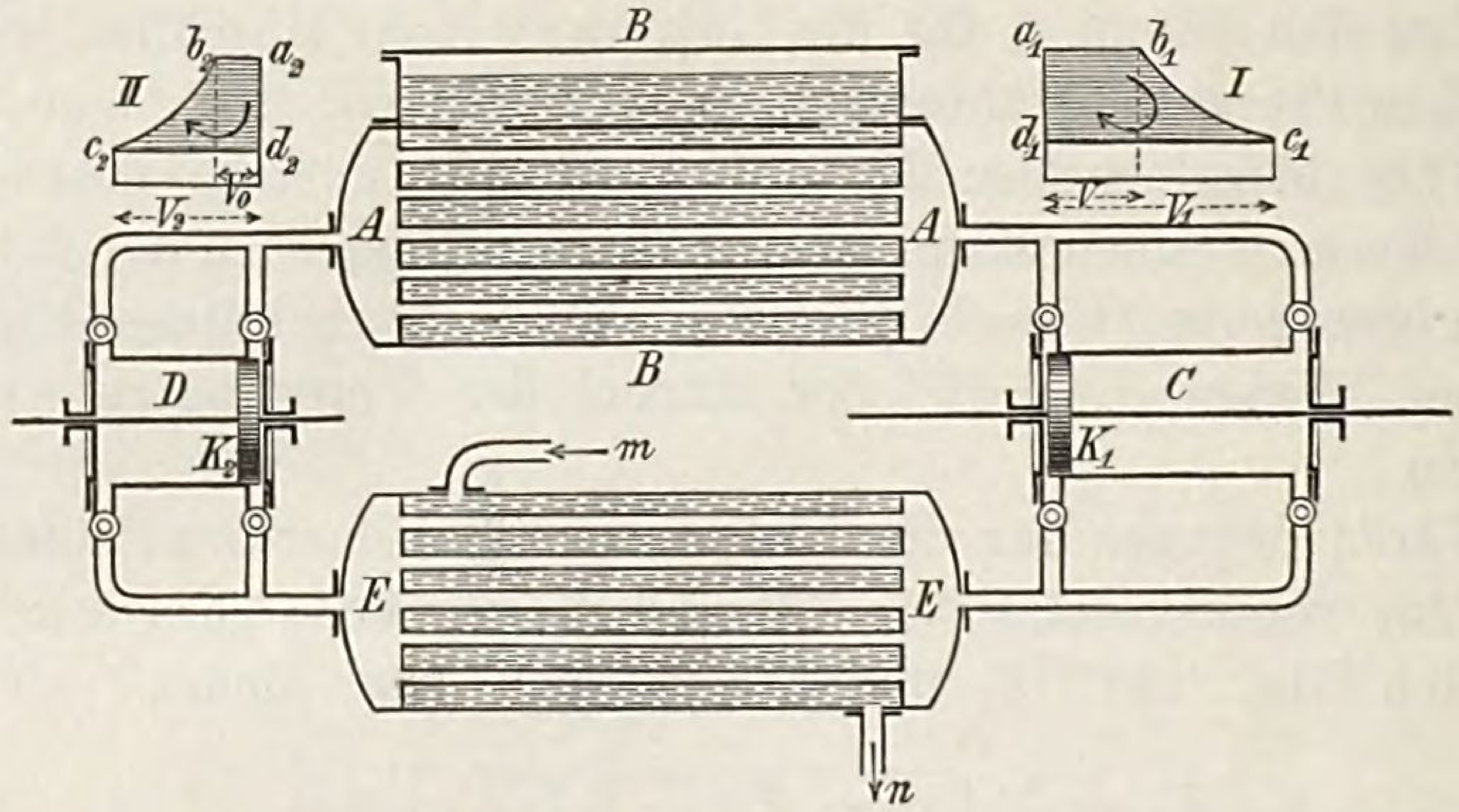
§ 69. Geschlossene Heissluftmaschine von Ericsson.

Als Abschluss der vorstehenden Untersuchungen mag noch einer Maschinenanordnung eine kurze Betrachtung gewidmet werden, welche Ericsson bereits 1833 in Vorschlag gebracht hat, die aber wenig bekannt geworden ist und auch keine Verbreitung gefunden hat; viel später, erst nach dem Jahre 1850, wurde der

Name des genialen Mannes unter den Ingenieuren allgemein bekannt durch die Erfindung von zwei andern Heissluftmaschinen, die aber offene Luftmaschinen sind. Wenn hier auf die ältere Idee von Ericsson zurückgegangen wird, so geschieht es, weil die betreffende Maschine vom theoretischen Standpunkte aus als Grundform aller calorischen Maschinen, diese Bezeichnung im weitesten Sinne des Wortes genommen, angesehen werden kann, wie ich schon früher gezeigt habe*).

In einem Röhrenkessel *AA* (Fig. 60) befinde sich Luft vom Drucke p_1; derselbe sei von einem Gefässe *B* umgeben, in welchem

Fig. 60.



sich Flüssigkeit von höherer Temperatur befindet, welche continuirlich Wärme an die im Kessel befindliche Luft liefert; die Flüssigkeit mag die Heizflüssigkeit genannt werden und kann unter Umständen auch in Feuergasen bestehen, d. h. in von einer Feuerungsanlage herrührenden Verbrennungsproducten von hoher Temperatur. Ein zweiter Röhrenkessel *EE* bilde, während der Kessel *AA* den Heizapparat darstellt, den Kühlapparat; die durch denselben strömende Luft werde durch einen Kühlkörper (Kühlwasser), welcher die Röhren umspült (bei *m* zu- und bei *n* abströmt), abgekühlt.

Die beiden Cylinder *C* und *D*, in welchen sich die Kolben K_1 und K_2 bewegen, stehen durch Luftkanäle, die mit Steuerungs-

*) Zur Theorie der Kaltdampfmaschinen. Civilingenieur Bd. 27. 1881. S. 449.

mechanismen (Hähne, Ventile oder Schieber) versehen sind, mit den beiden Apparaten A und E solcher Art in Verbindung, wie es aus der Betrachtung der Fig. 60 hervorgeht. Während im Heizapparate der Druck p_1 ist, soll der im Kühlapparate herrschende Druck mit p_2 bezeichnet werden; die Inhalte beider Räume sollen den Cylinderinhalten gegenüber aber so gross sein, dass die Pressungen daselbst während des Spieles der Maschine, das sogleich näher erläutert werden wird, als nahezu unveränderlich angesehen werden können.

Der Kolben K_1 im Cylinder C stehe am linken Ende und es trete nun, während der Kolben den Raum $a_1 b_1 = V$ zurücklegt, das Luftgewicht G kg aus dem Kessel A mit dem Drucke p_1 und der Temperatur T_1 in den Cylinder ein. Am Ende des Kolbenweges V werde die Verbindung mit dem Kessel aufgehoben und die Luft expandire jetzt nach der Druckcurve $b_1 c_1$ vom Volumen V auf das Volumen V_1; der Druck sinke von p_1 auf p_2 und die Temperatur T_1 auf den Werth T_3. Jetzt werde der Raum links vom Kolben K_1 mit dem Innern des Kühlapparates EE in Verbindung gesetzt und die Luft aus dem Raume V_1, auf dem Wege $c_1 d_1$, unter constantem Drucke p_2 durch den Kühlapparat hindurch nach dem zweiten Cylinder D geschoben, wo die Luft den Kolben K_2 auf dem Wege $d_2 c_2$ durch den Raum V_2 unter constantem Drucke p_2 bewegt; beim Durchgange durch den Kühlapparat wird die Temperatur der Luft von T_3 auf T_2 herabgebracht; unter Abschluss des Cylinders D vom Kühlapparate E wird nun weiter die Luft auf dem Wege $c_2 b_2$ soweit comprimirt, bis der Druck von p_2 wieder auf p_1 gestiegen ist und dann dieselbe mit constantem Drucke p_1 in den Heizapparat AA zurückgeschoben; bei der Compression nimmt das Volumen von V_2 auf V_0 ab und die Temperatur von T_2 auf T zu.

Die schraffirten Flächen der beiden Indicatordiagramme werden hierbei in der Richtung der angegebenen Pfeile umfahren. Das Diagramm rechts giebt die Arbeit L_1, welche im Cylinder C, dem Arbeits- oder Expansionscylinder pro Schub gewonnen wird und die Fläche des Diagrammes links ergiebt die Arbeit L_2, die im Cylinder D, dem Speise- oder Compressionscylinder, aufzuwenden ist.

Die Arbeit (indicirt) L der Maschine pro Schub ergiebt sich dann aus der Differenz $L_1 - L_2$.

Da pro Schub das Luftgewicht G vom Compressionscylinder D mit der Temperatur T in den Heizapparat tritt und diesen beim Uebergange nach dem Expansionscylinder C mit der Temperatur T_1 verlässt, so ist die in den Heizapparat tretende Wärmemenge Q_1

$$Q_1 = c_p G (T_1 - T) \;. \tag{144}$$

Beim Rückgange der Kolben wird dieselbe Luftmenge mit der Temperatur T_3 in den Kühlapparat geschoben und verlässt diesen mit der Temperatur T_2, es ist daher die Wärmemenge Q_2, welche pro Schub der Luft durch den Kühlkörper entzogen wird,

$$Q_2 = c_p G (T_3 - T_2) \;. \tag{145}$$

Die Expansion nach der Curve $b_1 c_1$ und die Compression nach der Curve $c_2 b_2$ geschieht, theoretisch genommen, adiabatisch; setzt man, um bis zu gewissem Grade dem Einflusse der Cylinderwandungen Rechnung zu tragen, polytropische Zustandsänderung voraus, indem man n statt $\varkappa$ substituirt, $n < \varkappa$ und diesen Werth als bekannt annimmt, so besteht die Beziehung:

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{T}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{146}$$

und weiterhin, wenn man für die Volumina, welche das Luftgewicht G in den Hauptpunkten des Kreisprocesses nacheinander einnimmt, die Angaben der Fig. 60 benutzt:

$$B G = \frac{V p_1}{T_1} = \frac{V_1 p_2}{T_3} = \frac{V_2 p_2}{T_2} = \frac{V_0 p_1}{T} \,. \tag{147}$$

Die Arbeit L_1, die im Expansionscylinder C gewonnen wird, setzt sich zusammen aus der Arbeit $V p_1$ beim Eintritte, der Arbeit $V_1 p_2$ beim Austritte und nach Gl. (7b) S. 145 der Expansionsarbeit

$$\frac{1}{n-1} (V p_1 - V_1 p_2) \;,$$

wonach folgt

$$L_1 = \frac{n}{n-1} (V p_1 - V_1 p_2) \;,$$

oder unter Benutzung der Beziehungen (147)

$$L_1 = \frac{n}{n-1} B G (T_1 - T_3) \ . \tag{148}$$

Auf gleichem Wege folgt die Arbeit L_2, welche im Compressionscylinder D aufzuwenden ist,

$$L_2 = \frac{n}{n-1} B G (T - T_2) \tag{149}$$

und hiernach die Arbeit L der Maschine pro Schub, wenn man T_3 durch Gl. (146) eliminirt und die Constante B nach den Gln. (54) S. 128 ersetzt:

$$L = c_p \frac{n(\varkappa - 1)}{\varkappa(n-1)} \frac{G}{A T} (T_1 - T)(T - T_2) \ . \tag{150}$$

Ist die Maschine doppelt wirkend und macht dieselbe u Umdrehungen pro Minute, so ist die indicirte Arbeit N in Pferdestärken

$$N = \frac{L u}{30.75} \ , \tag{151}$$

und damit die Theorie der Maschine gewonnen.

Bei einer neu zu berechnenden Maschine werden als gegeben anzusehen sein: die Arbeit N und die Umdrehungszahl u, die obere und untere Temperaturgrenze, nämlich die Temperatur T_1, mit der die Luft aus dem Heizapparate, und die Temperatur T_2, mit der sie aus dem Kühlapparate tritt; ferner die Grenzpressungen p_1 und p_2, sowie der Exponent n.

Es bestimmen sich dann nach den Gln. (146) die Zwischentemperaturen T und T_3 und ermittelt sich aus der Verbindung der Gln. (150) und (151) das Luftgewicht G, welches pro Schub die Maschine durchströmt; damit ist dann auch die Unterlage gewonnen, um nach den Gln. (144) und (145) die Wärmemengen Q_1 und Q_2, sowie nach Gl. (147) die Volumina V_1, V_2, V und V_0 zu bestimmen; aus den letztern Grössen leiten sich die Cylinderdimensionen ab.

Die Maschine führt übrigens genau den Process aus, der bereits in § 55 S. 269 im Allgemeinen und unter Zugrundelegung von Fig. 42 S. 270 speciell besprochen wurde. Ihr Wirkungsgrad ist nach der dort abgeleiteten Formel (38 b) zu beurtheilen; die Maschine führt, da sie keinen Regenerator besitzt, einen unvollkommenen Process aus; es wäre aber leicht, wie es auch

seiner Zeit von Ericsson vorgeschlagen wurde, durch Einschaltung eines Regenerators den Process zu verbessern. Der Regenerator müsste so angeordnet werden, dass die Luft ihn beim Uebertritte aus dem Expansionscylinder *C* nach dem Kühlapparate *E* durchstreicht und ihn dann beim Uebertritte aus dem Compressionscylinder *D* nach dem Heizapparate *A* in entgegengesetzter Richtung passirt.

Nach den früheren Darlegungen wäre es nicht schwierig, die Wirkung des Regenerators unter den angegebenen Voraussetzungen näher zu verfolgen, auch die Theorie der vorliegenden Maschine unter Berücksichtigung der schädlichen Räume und unter der Annahme unvollständiger Expansion zu erweitern; doch mag davon abgesehen werden, da die Maschine, die wie erwähnt Ericsson schon vor mehr als 50 Jahren vorschlug, keine Verwendung gefunden hat.

Einen Vortheil würde diese Maschine vor denen bieten, die oben ausführlich behandelt worden sind: sie giebt nämlich die Möglichkeit, grössere Heiz- resp. Abkühlungsflächen in Anwendung bringen zu können, deren Mangel wohl wesentlich die Schuld tragen mag, dass die Maschinen von Lehmann, Rider, Lauberau-Schwartzkopff, mit und ohne Regenerator, sich keinen allgemeinen Eingang haben verschaffen können *).

*) Napier und Rankine haben die grosse Bedeutung, welche in der möglichsten Vergrösserung der Heiz- und Kühlfläche liegt, zuerst klar erkannt; ihre patentirte Heissluftmaschine (Mechanic's Magazine, 1854, Nr. 1628; Dingler's polytechnisches Journal [Bd. 135. 1855. S. 241) ist als eine wesentlich verbesserte Stirling'sche Maschine anzusehen; sie ist, wie diese, doppelt wirkend und mit Regenerator versehen; der Arbeitscylinder ist, wie bei der Lauberau-Schwartzkopff-Maschine vom Verdrängercylinder getrennt, nur dass bei letzterer der Regenerator weggelassen wurde und die Maschine einfach wirkend hergestellt worden ist, Abänderungen, die beide als Rückschritte anzusehen sein dürften. Die Maschine von Napier und Rankine hat keine Verbreitung gefunden; man wird aber wohl, vielleicht zuerst durch ihre Umkehrung und ihre Verwandlung in eine geschlossene Kaltluftmaschine, auf die Verwendung ihres Haupttheiles zurückkommen, nämlich auf die Anwendung eines mit Regenerator versehenen Verdrängerkolbens, der auf beiden Seiten mit einer Reihe von cylindrischen Metallstangen versehen ist, die kolbenartig in am äussern Ende verschlossene Röhren zum Verdrängen der Luft eintreten. Die Röhren der einen Seite sind vom Heizkörper, die der andern vom Kühlkörper umströmt.

Gewöhnlich macht man allen Heissluftmaschinen den Vorwurf, dass ihre Dimensionen im Verhältniss zu ihrer Leistung viel zu gross ausfallen und dass in dieser Beziehung die Dampfmaschinen weitaus vorzuziehen seien. Dieser Vergleich ist aber nicht vollkommen zutreffend, weil man dabei den Raum ausser Betracht fallen lässt, welchen bei Dampfmaschinen die Heiz- und Dampfkesselanlage beansprucht.

Eine aufmerksame Verfolgung der im ganzen vorstehenden Abschnitte entwickelten Sätze muss wohl die Ansicht bestärken, dass die Heissluftmaschinen für geringe Arbeitsleistungen, also für den kleineren Gewerbebetrieb, denn doch die Dampfmaschinen ersetzen könnten, weil, sofern sie mit dem Regenerator versehen sind, der von ihnen ausgeführte Process dem der Dampfmaschine keineswegs nachsteht, ja ihn übertrifft, da man ihn zwischen weitern Temperaturgrenzen ausführen kann. Grössere Cylinderdimensionen könnte man wohl mit in den Kauf nehmen und solche dadurch herabzuziehen suchen, dass man rasch laufende Maschinen construirt und wenn möglich den untern Grenzwerth p_2 des Druckes wesentlich grösser, als den atmosphärischen Druck, also Hochdruck anwendet; alle Leistungsformeln, welche für die im Vorstehenden behandelten Maschinen entwickelt wurden, zeigen, dass unter sonst gleichen Verhältnissen die indicirte Arbeit dem Drucke p_2 direct proportional ist.

Freilich tritt hier wieder der Umstand erschwerend hervor, dass die Luftverluste mit der Druckerhöhung zunehmen.

Die auffällig geringe Anzahl von Brems- und Indicatorversuchen*), deren Resultate allerdings wenig ermunternd für die Einführung und weitere Beachtung der Heissluftmaschinen gewirkt haben dürften, erscheint jedenfalls noch nicht hinreichend, ein endgültiges Urtheil abzugeben.

b) Offene Heissluftmaschinen.

§ 70. Maschinen mit und ohne Regenerator.

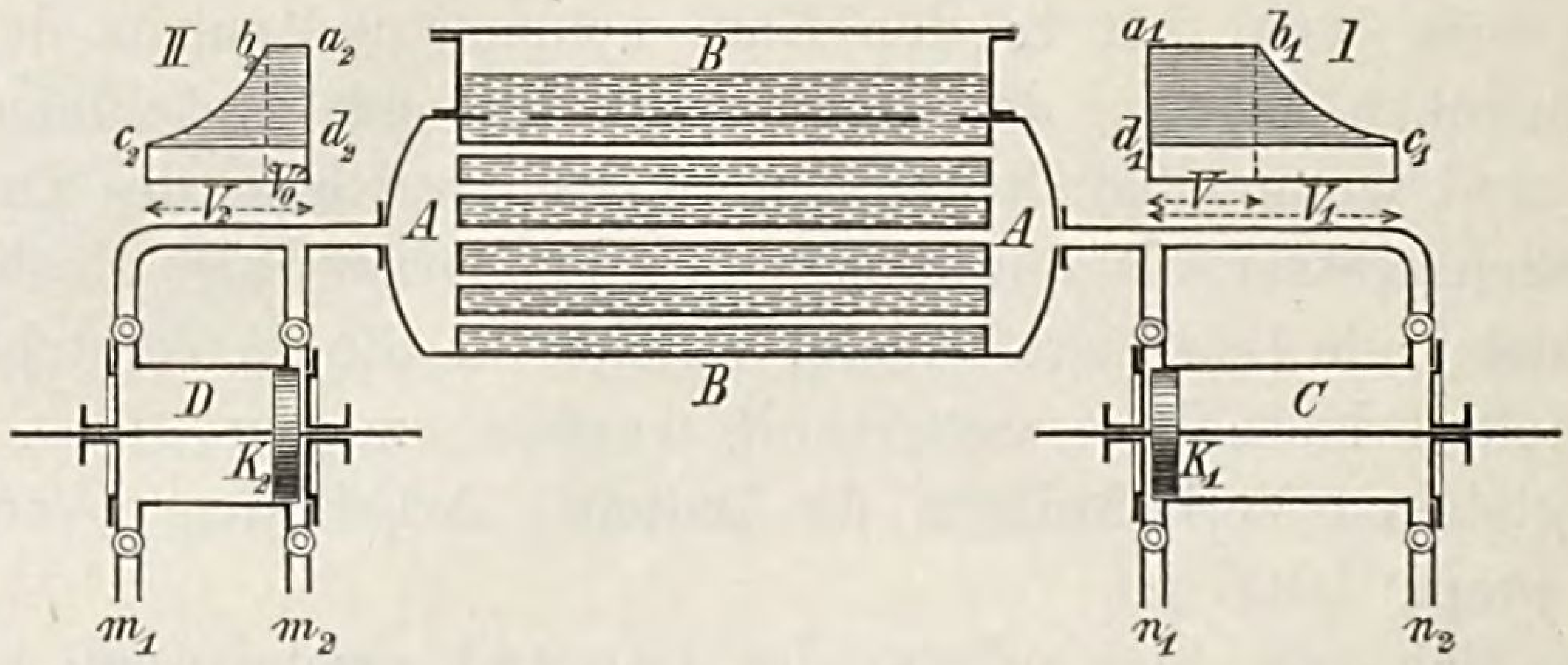
Die **offene** Maschine schöpft bei jedem Spiele ein neues Cylindervolumen äussere atmosphärische Luft und stösst dasselbe am Ende des Kreisprocesses wieder aus.

*) Versuche von Slaby, Schöttler. (Vergl. Citate S. 335.)

Fig. 61 giebt die schematische Darstellung einer solchen Maschine ohne Regenerator und erscheint direct aus Fig. 60 S. 358 hervorgegangen, durch Weglassung des mit EE bezeichneten Kühlapparates. Die Eintrittskanäle $m_1 m_2$ des Compressionscylinders D und die Austrittskanäle $n_1 n_2$ Fig. 61 des Expansionscylinders C münden direct in die freie Atmosphäre.

Geht der Kolben K_2 im Cylinder D von rechts nach links, so saugt er durch den Kanal m_2 äussere atmosphärische Luft vom Drucke p_2 und der Temperatur T_2 an; beim Kolbenrückgange wird dann die Luft nach der Druckcurve $c_2 b_2$ des Indicatordiagrammes II vom Volumen V_2 auf das Volumen V_0 und vom Drucke p_2 auf den Druck p_1 comprimirt und mit der dabei er-

Fig. 61.



langten Temperatur T unter constantem Druck p_1 in den Heizapparat gedrückt. Von hier aus tritt sie, von T auf T_1 erhitzt, mit dem Drucke p_1 in den Expansionscylinder C, wobei ihr Volumen von $V_0 = a_2 b_2$ auf $V = a_1 b_1$ zugenommen hat. Im Cylinder C expandirt sie jetzt nach der Curve $b_1 c_1$ des Indicatordiagrammes I auf den atmosphärischen Druck p_2 und wird nun auf dem Wege $c_1 d_1$ durch den Austrittskanal n_1 mit constantem Drucke p_2 und der Temperatur T_3, die sie bei der Expansion im Punkte c_1 erlangt hatte, ins Freie geschoben. Die Maschine ist doppelt wirkend gedacht; beim Rückgange der Kolben tritt die Luft durch den Kanal m_1 ein und durch den Kanal n_2 aus.

Die Theorie ist vollständig wieder durch die Formeln (144) bis (151) auf S. 360 gegeben, freilich unter denselben Einschränkungen wie dort; der ganze Unterschied liegt nur darin, dass bei der

offenen Maschine der untere Druck p_2 der atmosphärische ist, während derselbe bei der geschlossenen Maschine grösser oder kleiner sein kann. Die Temperaturgrenzen T_1 und T_2 werden bei der offenen, wie bei der geschlossenen Maschine zu wählen sein. Die Maschine lässt sich, wie es auch von Ericsson vorgeschlagen wurde, mit einem Regenerator versehen; die aus dem Expansionscylinder C kommende Luft wäre durch denselben ins Freie zu führen und der Compressionscylinder D hätte dann frische atmosphärische Luft, auf dem umgekehrten Wege durch den Regenerator herbeigeführt, anzusaugen.

Die allgemeiner bekannt gewordenen Ericsson'schen Maschinen, sowie die Maschinenanordnungen von Johnson*) und Wilcox**) sind dem hier besprochenen Systeme offener Maschinen zuzuzählen.

B. Kaltluftmaschinen.

a) Geschlossene Kaltluftmaschinen.

§ 71. Umkehrung der Ericsson'schen geschlossenen Heissluftmaschine.

Jede Heissluftmaschine, welche Anordnung einer solchen auch vorliegt, lässt sich, wie bereits früher angedeutet worden ist, durch Umkehrung des Processes in eine Kaltluftmaschine, eine Kälteerzeugungs-Maschine, umwandeln. Man kann auch hier geschlossene und offene Maschinen unterscheiden, von denen aber nur die der letzteren Art zur Zeit eine grössere Verbreitung gefunden haben.

Den Maschinen zur Kälteerzeugung und Eisbereitung steht ohne allen Zweifel noch eine grosse Zukunft bevor; wenn nun auch wohl zu erwarten ist, dass später allgemein diejenigen Maschinen Verwendung finden werden, die an Stelle der atmosphärischen Luft Dämpfe (von Ammoniak, Kohlensäure etc.) verwenden, Maschinen, die ich als Kaltdampfmaschinen bezeichnet habe und auf die unten zurückzukommen sein wird, so erscheint es doch angezeigt, hier näher auch auf die Kaltluftmaschinen einzugehen,

*) Dingler's polytech. Journal. 1865. Bd. 178. S. 417.
**) Ebendaselbst 1863. Bd. 170. S. 312.

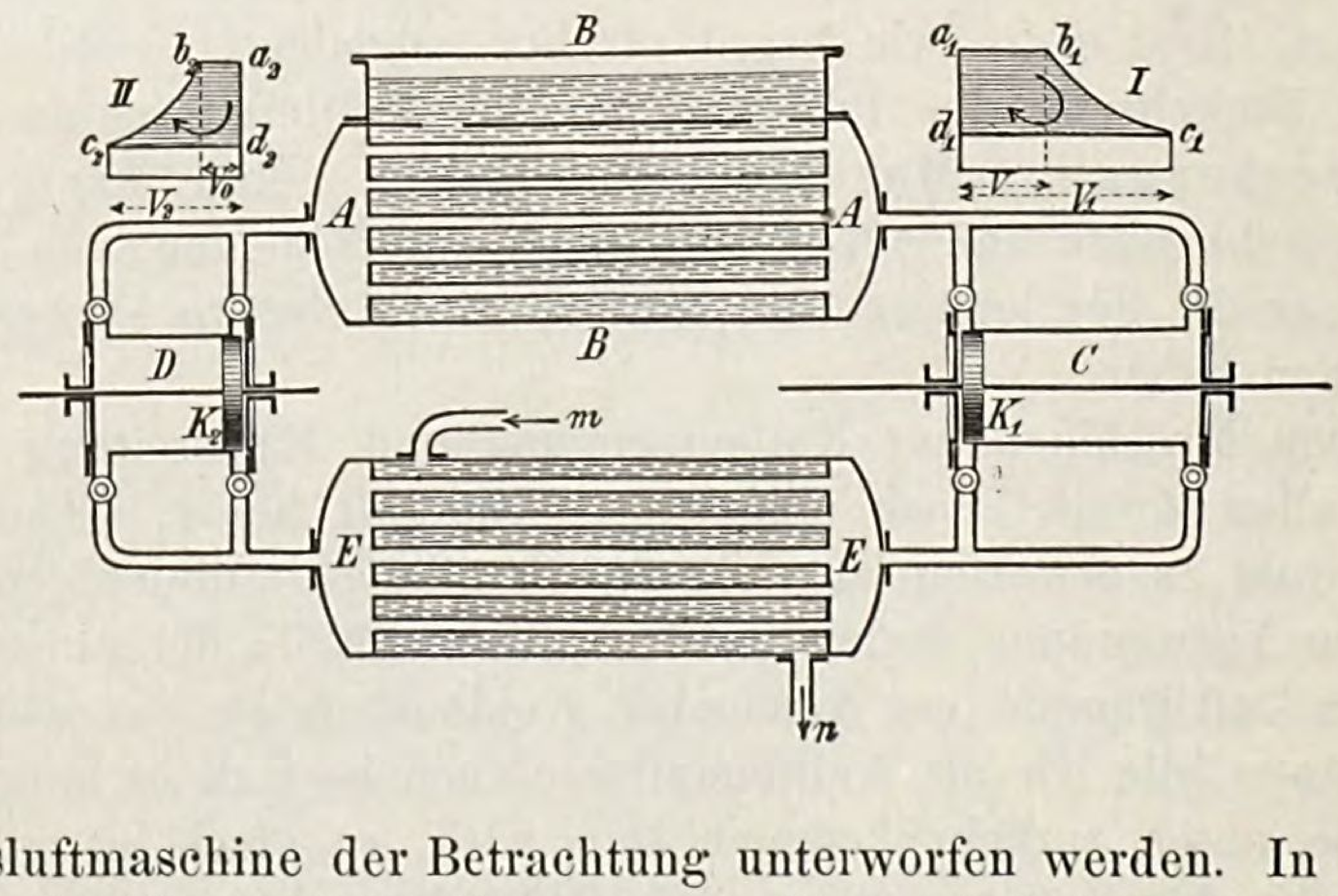
da dieselben vielfach zur Kühlung von Räumen, insbesondere solcher, welche zur Aufbewahrung von Fleisch dienen, benutzt werden. In der englischen Marine sind diese Maschinen beim Fleischtransport auf Schiffen vielfach in Anwendung und zwar immer als offene Maschinen.

Die Kaltluftmaschinen in geschlossener Form sind nicht in Gebrauch, meines Wissens nach liegt bezüglich der Construction einer solchen nur ein Vorschlag vor und zwar von Kirk.

Kirk benutzte die Umkehrung einer Stirling'schen Maschine mit Regenerator, deren Anordnung aus der schematischen Figur 55 S. 324 erkennbar wird, wenn man sich dort den Verdränger K_1 im Innern mit einem Regenerator versehen denkt; eine derartige Maschine soll durch eine Betriebskraft von einer Pferdestärke in 24 Stunden 212 Pfund Avoir du poids Eis erzeugt haben, was stündlich pro Pferdestärke 4 kg Eis entsprechen würde, eine Leistung, die allerdings sehr gering ist, da man bei den neueren Linde'schen Ammoniak-Kaltdampfmaschinen stündlich 25 kg Eis pro Pferdestärke (effectiv) rechnet.

Es möge zur nähern Untersuchung einer geschlossenen Kaltluftmaschine die Umkehrung der in Fig. 60 S. 358 skizzirten

Fig. 62.



Heissluftmaschine der Betrachtung unterworfen werden. In obenstehender Figur 62 ist die genannte Figur wiederholt abgedruckt, die beiden Indicatordiagramme I und II sollen aber durch die Diagramme III und IV der Fig. 62a a. f. S. ersetzt werden,

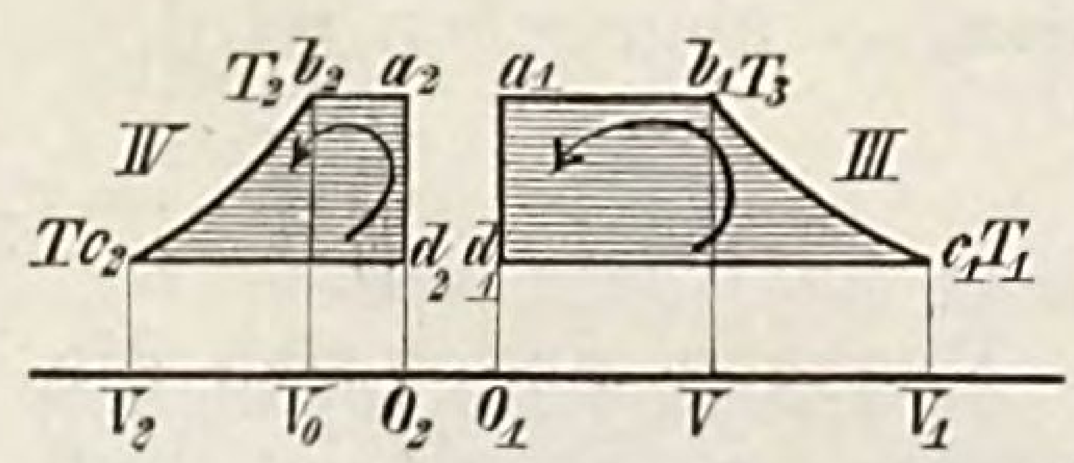
in welche für die Temperaturen die Bezeichnungen eingetragen sind, die im Folgenden den Berechnungen zu Grunde gelegt werden sollen.

Man denke sich im Röhrenkessel AA Luft von Drucke p_1 und von einer Temperatur T_1 eingeschlossen, welche unter 0° C. beträgt; der Kessel ist von dem Gehäuse B umgeben, in welchem sich als Heizflüssigkeit eine Kochsalz- oder Chlorcalciumlösung befindet, die nicht zum Gefrieren gelangt, obgleich sie ebenfalls unter 0° C. abgekühlt ist.

Die Temperatur dieser Lösung sei aber etwas höher, als die der Luft im Kessel AA, die Salzlösung erscheint demnach als Heizflüssigkeit.

Wird durch den continuirlichen Process der Maschine die Temperatur der Luft im Heizapparat AA auf dem niedrigen Werthe erhalten, so wird damit der Salzlösung continuirlich Wärme entzogen; man kann daher, sofern in die Salzlösung Blechzellen mit Süsswasser eintauchen, das Wasser in den Zellen zum Gefrieren bringen oder man kann die abgekühlte Lösung auch in Leitungen nach Orten führen, wo eine Kühlung erfolgen soll und die erwärmte Lösung zu erneuter Abkühlung nach dem Gehäuse B zurückleiten.

Fig. 62 *a*.



Zur Darlegung des Processes der Maschine denke man sich nun den Kolben K_1 im Cylinder C von links nach rechts gehend und den Raum links von demselben mit dem Kesselraume in Verbindung stehend; dabei wird, wenn der Kesselraum gross genug vorausgesetzt wird, die Luft vom Kolben K_1 mit constantem Drucke p_1 angesaugt; die Temperatur, mit welcher die Luft aus dem Kessel tritt, sei T_1; am Ende des Kolbenhubes finde der Abschluss statt und nun werde die Luft im Cylinder C nach der Druckcurve $c_1 b_1$ (Diagramm III Fig. 62a) comprimirt; das Volumen vermindere sich dabei von V_1 auf V, der Druck erhöhe sich von p_1 auf p_2 und ebenso wachse die Temperatur von T_1 auf T_3.

Jetzt werde die Luft auf dem Wege $b_1 a_1$ mit constantem Drucke p_2 durch den Kühlapparat EE hindurch nach dem

zweiten Cylinder D geschoben, wo sich dieselbe auf dem Wege $a_2 b_2 = V_0$ (Diagramm IV Fig. 62a) mit constantem Drucke p_2 durch Zurückschieben des Kolbens K_2 Raum macht; beim Durchgang durch den Kühlapparat, in welchem die Kühlung durch kaltes Wasser erfolgt, welches bei m ein- und bei n (Fig. 62) austritt, nachdem es die Röhren des Kühlapparates umströmte, werde die Luft von T_3 auf T_2 abgekühlt und expandire nun im Cylinder D, abgeschlossen vom Kühlgefässe, nach der Curve $b_2 c_2$ (Diagramm IV), soweit bis der Druck wieder auf den Werth p_1 im Heizapparate gesunken ist, um nun mit constantem Drucke p_1 auf dem Wege $c_2 d_2$ in den Raum AA zurückgeschoben zu werden. Bei der Expansion sinke die Temperatur von T_2 auf T, das Volumen wachse von V_0 auf V_2.

Nimmt man an, dass bei jedem Kolbenschube G kg Luft dem Heizapparate auf der einen Seite vom Cylinder C entzogen und auf der andern Seite vom Cylinder D zugeführt werden, so ist die Wärmemenge Q_1, welche von der Salzlösung an die Luft im Kessel A abgegeben wird,

$$Q_1 = c_p G (T_1 - T) \,. \qquad (1)$$

Dagegen findet sich die Wärmemenge Q_2, welche im Kühlapparate pro Schub der Luft entzogen wird,

$$Q_2 = c_p G (T_3 - T_2) \,. \qquad (2)$$

Setzt man weiter voraus, dass die beiden Curven $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ adiabatische Linien seien, so besteht zwischen den Pressungen und Temperaturen die bekannte Beziehung

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \qquad (3)$$

und weiterhin erhält man das Volumen der Luft in den einzelnen Hauptpunkten des Kreisprocesses nach den Angaben in Fig. 62a aus den Gleichungen

$$B G = \frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V p_2}{T_3} = \frac{V_0 p_2}{T_2} = \frac{V_2 p_1}{T} \,. \qquad (4)$$

Die Arbeit L_1, welche im Cylinder C, der hier als Compressionscylinder auftritt, pro Schub verbraucht wird, findet

sich auf demselben Wege, welcher bei der Ableitung der Gln. (148) und (149) auf S. 361 eingeschlagen worden ist:

$$L_1 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} B G (T_3 - T_1) \; . \tag{5}$$

Dagegen ist die Arbeit L_2, welche im Cylinder D, hier dem Expansionscylinder, pro Schub gewonnen wird,

$$L_2 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} B G (T_2 - T) \; . \tag{6}$$

Die Differenz beider Arbeitsquantitäten giebt die Betriebsarbeit L der Maschine pro Schub, die indicirte Arbeit, theoretisch genommen, wenn man noch die Beziehung (54) auf S. 128 benutzt,

$$A L = c_p G [(T_3 - T_1) - (T_2 - T)]$$

oder, wenn T_3 durch Gl. (3) eliminirt wird,

$$L = \frac{c_p G}{A T} (T_2 - T)(T_1 - T) \; . \tag{7}$$

Diese Gleichung ist mit Gl. (150) auf S. 361 identisch, wenn man dort bei der Heissluftmaschine auch adiabatische Expansion und Compression, also $n = \varkappa$ voraussetzt; die Arbeitsmenge L erscheint nur mit entgegengesetztem Zeichen, wie es sein muss, denn bei der Heissluftmaschine wird die Arbeit L gewonnen, bei der Kaltluftmaschine als Betriebsarbeit verbraucht.

Dividirt man Gl. (7) durch Gl. (1), so erhält man die einfache Beziehung

$$\frac{A L}{Q_1} = \frac{T_2 - T}{T} \; . \tag{8}$$

Da das Kühlwasser die atmosphärische Temperatur hat, so wird die Temperatur T_2 nur wenig grösser als diese anzunehmen sein; die vorstehende Gleichung lehrt daher, dass bei einem bestimmten Werthe von Q_1 die Arbeit L um so grösser ausfällt, je weiter man mit der Temperatur T herabgeht; da nun dieser Werth die niedrigste Temperatur darstellt, die überhaupt im Process vorkommt, so wäre als Regel zu befolgen, mit der untern Grenze der Temperatur nicht weiter herabzugehen, als es der beabsichtigte Kühlprocess gerade nothwendig erscheinen lässt.

Bei der Construction von Kälteerzeugungsmaschinen sieht man die Wärmemenge als gegeben an, welche der Salzlösung in der Zeiteinheit, der Secunde, Minute oder Stunde, continuirlich entzogen werden soll. Nimmt man die Secunde als Einheit und bezeichnet man mit Q_s die betreffende Wärmemenge, so ergiebt die Gl. (8) die theoretische (indicirte) Betriebsarbeit L_s auf die Secunde bezogen, wenn man Q_1 durch Q_s ersetzt:

$$L_s = \frac{Q_s}{A\,T}(T_2 - T), \tag{9}$$

oder wenn man die Arbeit in Pferdestärken N ausdrückt, die Maschine als doppelt wirkend und u Umdrehungen pro Minute voraussetzt:

$$N = \frac{Q_s}{75\,.\,A\,T}(T_2 - T)\;. \tag{10}$$

Bestimmt man aus der ersten der Gln. (4), nämlich

$$A\,B\,G = \frac{A\,V_1\,p_1}{T_1}\,,$$

den Werth von G und substituirt man denselben in Gl. (7), so ergiebt sich

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,\frac{(T_2 - T)(T_1 - T)}{T\,T_1}\,V_1\,p_1$$

und daher folgt, weil

$$L = 30 \cdot 75 \cdot \frac{N}{u}$$

ist, zur Berechnung des Volumens V_1 des Compressionscylinders C die Formel:

$$V_1\,p_1 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot 30 \cdot 75 \cdot \frac{T\,T_1}{(T_2 - T)(T_1 - T)} \cdot \frac{N}{u}\;. \tag{11}$$

Aus den Gln. (4) folgt dann weiter das Volumen V_2 des Expansionscylinders

$$V_2 = \frac{T}{T_1}\,V_1\;. \tag{12}$$

Das Compressionsverhältniss im Cylinder C und das Expansionsverhältniss im Cylinder D folgt aus denselben Gleichungen:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{V_0}{V_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T}\;. \tag{13}$$

Numerisches Beispiel. Bei einer geschlossenen Kaltluftmaschine der vorgelegten Art soll zum Zwecke der Eiserzeugung die Salzlösung im Gehäuse B (Fig. 62 S. 366) continuirlich auf — 10° bis — 15° C. erhalten werden.

Wird angenommen, dass die Luft aus dem Heizapparate A mit der Temperatur $T_1 = 258°$ (— 15° C.) vom Compressionscylinder angesaugt wird, dass ferner die Luft mit der Temperatur $T_2 = 293°$ (+ 20° C.) aus dem Kühlapparate nach dem Expansionscylinder tritt und der Druck p_2 im letztern $p_2 = 3p_1$, also das Dreifache vom Drucke p_1 im Heizapparate beträgt, so berechnet sich nach Gl. (3)

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T} = 1{,}3764 \; .$$

Hiernach folgt die Temperatur am Ende der Compression im Compressionscylinder $T_3 = 355{,}1°$ (+ 82,1° C.) und die Temperatur am Ende der Expansion im Expansionscylinder $T = 212{,}9°$ (— 60,1° C.).

Aus Gl. (10) ergiebt sich

$$N = 2{,}1279 \, . \, Q_s$$

und aus Gl. (11)

$$V_1 p_1 = 994{,}4 \, . \, \frac{N}{u} \; .$$

Um aus 1 kg Wasser von 0° C. Eis von 0° C. zu erzeugen, muss demselben eine Wärmemenge von 79 Calorien entzogen werden; hat das Wasser die Temperatur $t°$ C. und soll daraus Eis von — $t_0°$ C. erzeugt werden, so ist dem Wasser nach bekannten physikalischen Sätzen die Wärmemenge $79 + t + c t_0$ zu entziehen, wobei c die specifische Wärme des Eises ist, die $c = 0{,}5$ beträgt. Setzt man im Mittel $t = 15°$ und $t_0 = — 8°$, damit das Eis möglichst fest werde, so erhält man rund 100 Calorien; man kann daher in der Praxis annehmen, dass man einem Kilogramm Wasser von gewöhnlicher atmosphärischer Temperatur 100 Calorien Wärme entziehen muss, um daraus gutes Eis zu bilden.

Wenn nun die vorliegende Maschine stündlich 250 kg Eis liefern sollte, so müssten der Salzlösung stündlich 25 000 Calorien Wärme entzogen werden, es wäre daher $Q_s = \frac{25\,000}{3600}$ und nach der vorletzten Gleichung:

$$N = 14{,}78 \text{ Pferdestärken} \; .$$

Mit Rücksicht auf die in den vorstehenden Rechnungen vernachlässigten Widerstände müsste man zur Ermittelung der wirklichen Betriebsarbeit, doch wohl 25 % zuschlagen; wird diese Kaltluftmaschine durch eine Dampfmaschine betrieben, so müsste diese daher eine effective Arbeit von etwa 18,5 Pferdestärken abgeben.

Macht die angenommene Maschine $u = 50$ Umdrehungen pro Minute und beträgt der untere Grenzwerth des Druckes eine Atmosphäre, ist also $p_1 = 10\,333$ kg, so ergiebt die zweite der vorstehenden Formeln den Cubikinhalt des Compressionscylinders

$$V_1 = 0{,}02845 \text{ cbm} \; ,$$

während sich der Cubikinhalt des Expansionscylinders nach Gl. (12) zu

$$V_2 = 0{,}02348 \text{ cbm}$$

herausstellt; bei der praktischen Ausführung würden beide Werthe etwas grösser anzunehmen sein. Aus der Division von Gln. (2) und (1) S. 368 folgt

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T} = 1{,}377 .$$

Bezieht man Q_1 auf die Secunde und setzt man daher den oben gegebenen Werth ein, so folgt für die Wärmemenge, welche in der Secunde der Luft im Kühlapparate entzogen werden muss,

$$Q_2 = 9{,}562 \text{ cal.}$$

Würde das Kühlwasser sich beim Durchgange durch den Kühlapparat um 5° C. erwärmen, so wäre pro Secunde 1,912 kg, also stündlich 6883 kg oder 6,883 hl Kühlwasser erforderlich.

Eine geschlossene Kaltluftmaschine der im Vorstehenden behandelten Art ist bis jetzt weder ausgeführt noch in Vorschlag gebracht worden: die Rechnungsergebnisse des numerischen Beispieles erscheinen nicht ungünstig, soweit die erforderlichen Dimensionen der beiden Cylinder in Frage kommen; was freilich die erforderliche Grösse der Heizfläche im Erhitzer AA und der Kühlfläche im Kühlapparate EE Fig. 62 S. 366 betrifft, so müssten erst noch besondere Beobachtungen gemacht werden. In einer Beziehung tritt aber ein Uebelstand hervor, die Betriebsarbeit fällt nämlich ziemlich beträchtlich aus; so würde z. B. eine mit Ammoniakdämpfen arbeitende Kaltdampfmaschine (Linde's System), auf deren Besprechung später eingegangen werden wird, bei derselben Stärke der Eisproduction, wie die vorhin berechnete Luftmaschine nur die Hälfte der Betriebsarbeit erfordern. Die Differenz hat ihren Grund in dem Umstande, dass man bei Luftmaschinen der angenommenen Art mit der untern Temperaturgrenze sehr weit herabgehen muss, um nicht ganz unförmliche Maschinendimensionen zu erhalten; günstiger stellen sich die Rechnungsresultate, wenn man nicht Eisproduction, sondern nur die Herstellung kalter, in Circulation zu versetzender Salzlösung ins Auge fasst, weil im letztern Falle die Abkühlung nicht so weit getrieben zu werden braucht.

Nicht ohne Wichtigkeit für den Vergleich mit den später zu behandelnden Kaltdampfmaschinen ist noch folgende Bemerkung.

Würde man den Expansionscylinder D (Fig. 62 S. 366) ganz fortfallen und die Luft direct aus dem Kühlapparate, wo sie ja

unter höherm Drucke steht, direct durch ein mit Regulirventil versehenes Verbindungsrohr in den Heizapparat zurückströmen lassen, so würde die Luft in den letztern mit der Temperatur T, welche der untern Grenze entspricht, eintreten, mit derselben Temperatur, mit der sie bei unserer Maschine durch den Expansionscylinder eingeführt wird. Hier würde aber doch ein grosser Unterschied vorliegen. Setzt man, wie zulässig ist, voraus, dass das Ausströmen aus dem Kühler unter constantem Drucke p_2 in den Heizapparat unter constantem Gegendrucke p_1 stattfindet und bezeichnet man mit w die Geschwindigkeit, mit der die Luft in den Heizapparat eintritt, so besteht theoretisch (vergl. S. 228, Gl. 21 a) ohne Rücksicht auf die Widerstände die Beziehung

$$A G \frac{w^2}{2g} = c_p G (T_2 - T) \quad . \tag{14}$$

Durch Vergleich mit Gl. (6) S. 369, die sich auf dieselbe Form bringen lässt, ergiebt sich

$$A G \frac{w^2}{2g} = A L_2 \, ,$$

wonach also die Indicatorfläche IV Fig. 62a S. 367 auch die Arbeit ausdrückt, welche in den G kg Luft, die pro Schub eintreten, in Form von kinetischer Energie enthalten ist. Nun breitet sich aber die Luft unter constantem Drucke p_1 von der Eintrittsmündung ab im Heizapparate aus und geht zur Ruhe über, wobei sich die kinetische Energie in Wärme umwandelt.

Ist T' die Temperatur der Luft nach der Ausbreitung, so besteht die Beziehung

$$A G \frac{w^2}{2g} = c_p G (T' - T) \, ,$$

und aus der Verbindung mit Gl. (14) folgt daher das Resultat $T' = T_2$.

Wollte man also die Luft nicht unter Vermittlung des Speise- oder Expansionscylinders D, sondern direct in den Erhitzungsapparat zurückführen, so wäre die Maschine ganz wirkungslos, weil daselbst eine Temperatur T' sich einstellen würde, die mit der Temperatur T_2 identisch wäre, welche die Luft im Kühlapparate angenommen hat. Der Expansionscylinder bildet also einen nothwendigen und wesentlichen Theil der Kaltluft-

maschine der angenommenen Art. Ganz anders liegen in dieser Beziehung die Verhältnisse bei den geschlossenen Kaltdampfmaschinen, die, wie noch gezeigt werden soll, genau dieselbe Anordnung haben, bei denen aber ohne wesentliche Beeinträchtigung des Processes der Expansionscylinder in der That weggelassen wird.

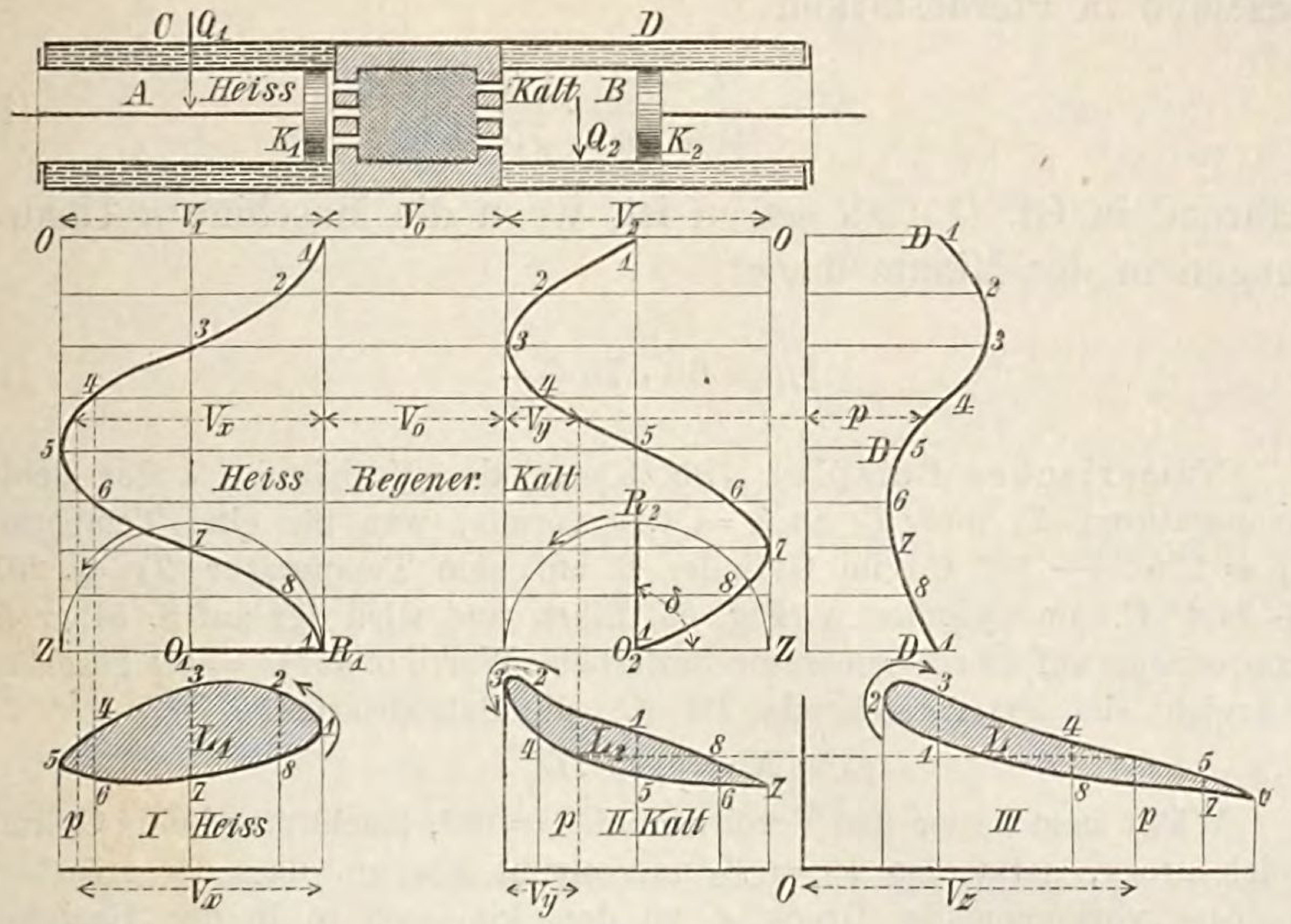
Eine nähere Ueberlegung ergiebt weiterhin, dass bei den geschlossenen Kaltluftmaschinen die Anwendung eines Regenerators ebenso empfehlenswerth ist, wie bei den Heissluftmaschinen; wie erwähnt, hat Kirk vorgeschlagen, die Stirling'sche Maschine durch Umkehrung in eine geschlossene Kaltluftmaschine zu verwandeln; es scheint mir aber für eine solche Umkehrung die Rider'sche Maschine auch in constructiver Beziehung besser geeignet, da man bei einer solchen vielleicht am leichtesten Heiz- und Kühlfläche auf diejenige Weise vergrössern könnte, wie es von Napier und Rankine bei ihrer Heissluftmaschine geschehen ist.

§ 72. Umkehrung der Rider'schen geschlossenen Heissluftmaschine.

In Fig. 63 a. f. S. ist die, eine Rider'sche Maschine darstellende schematische Abbildung Fig. 58 S. 348 wiederholt abgedruckt. Denkt man sich jetzt aber den Mantel D des Cylinders B von einer kalten Salzlösung umspült und den Mantel C des Cylinders A vom Kühlwasser durchströmt, so hat man sich nun einfach die in der Figur gezeichneten Pfeile sämmtlich umgekehrt zu denken; die Luft im Cylinder B von der untern Temperaturgrenze T_2 nimmt pro Spiel oder Umdrehung (die Maschine ist einfach wirkend) die Wärmemenge Q_2 auf und giebt im Cylinder A die Wärmemenge Q_1 bei der höhern Temperatur T_1 an das Kühlwasser ab. Das Indicatordiagramm I des Cylinders A repräsentirt jetzt verbrauchte und das Diagramm II des Cylinders B gewonnene Arbeit, die Differenz beider Arbeitsquantitäten, die auch durch das resultirende Diagramm III dargestellt wird, ist die theoretische (indicirte) Betriebsarbeit L der jetzt vorliegenden Kaltluftmaschine. Die Maschine läuft übrigens in der gleichen Richtung um, wie es früher unter der Annahme vorausgesetzt wurde, dass man es mit der Heissluft-

maschine zu thun habe; die Kurbel des Kolbens K_2 eilt auch hier der Kurbel des Kolbens K_1 um den Winkel δ (in der Figur $\delta = 90^\circ$ gesetzt) vor.

Fig. 63.



Es gelten nun auch weiter sämmtliche auf S. 348 bis S. 354 entwickelten Formeln mit dem einzigen Unterschiede, dass die Wärmemengen Q_1 und Q_2, sowie die Arbeitsquantitäten L_1, L_2 und L mit entgegengesetzten Zeichen auftreten; es kann daher ganz einfach, was die Bezeichnung in den Formeln und die Theorie der Maschine betrifft, auf die angezogene Stelle verwiesen werden.

Die Betriebsarbeit pro Umdrehung ist nach Gl. (13) S. 353

$$L = \pi \frac{(\lambda - 1)\, V_1\, V_2\, p_2}{(1 + m\lambda)\, V_1 + \lambda\, (1 + m)\, V_2} \cdot \frac{\varphi\, (\varphi^2 + 1)}{(\varphi + 1)^2} \sin \delta\,; \qquad (15)$$

die Wärmemenge Q_2, welche der Salzlösung pro Umdrehung entzogen wird, ist nach Gl. (132) S. 351

$$Q_2 = \frac{1 + m\lambda}{\lambda - 1} \cdot AL \qquad (16)$$

und die Wärmemenge, welche in der gleichen Zeit vom Kühlwasser aufzunehmen ist, folgt nach Gl. (131) S. 351

$$Q_1 = \frac{\lambda(1+m)}{\lambda - 1} A L . \tag{17}$$

Bezieht man in Gl. (16) die Wärmemenge Q_2 auf die Secunde und bezeichnet sie mit Q_s, so findet sich die Betriebsarbeit der Maschine in Pferdestärken

$$N = \frac{\lambda - 1}{1 + m\lambda} \cdot \frac{Q_s}{75\, A}, \tag{18}$$

während in Gl. (15) zu setzen ist, wenn die Maschine u Umdrehungen in der Minute macht,

$$L = 60 \cdot 75 \cdot \frac{N}{u} \cdot \tag{19}$$

Numerisches Beispiel. Setzt man das Verhältniss λ der beiden Temperaturen T_1 und T_2 zu $\lambda = 1{,}25$ voraus, was für eine Temperatur $T_2 = 238°$ (— 35° C.) im Cylinder B auf eine Temperatur $T_1 = 297{,}5$ (+ 24,5° C.) im Cylinder A (Fig. 63) führt, und wird der auf S. 349 näher besprochene auf den Regenerator bezügliche Werth m auf $m = 0{,}5$ geschätzt, so ergiebt sich aus vorstehender Gl. (18) die Betriebsarbeit

$$N = 0{,}870 \,.\, Q_s \,.$$

Wählt man ferner den Voreilwinkel $\delta = 90°$, macht man beide Cylinder gleich gross, setzt also $V_1 = V_2$ und nimmt man an, dass der grösste im Processe vorkommende Druck p_1 zu dem kleinsten p_2 in der Beziehung $p_1 = 2{,}5\, p_2$ steht, so giebt die Verbindung der vorstehenden Gleichung (15) und (19), weil hier (vergl. S. 353)

$$\varphi = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = 1{,}5811$$

zu setzen ist:

$$V_2 p_2 = 24\,143 \,.\, \frac{N}{u} \,.$$

Sollte die Maschine stündlich der Salzlösung 25000 Cal. Wärme entziehen, so wäre die theoretische Betriebsarbeit nach vorstehender Formel für N

$$N = 6{,}04 \text{ Pferdestärken.}$$

Beträgt der untere Werth des Druckes eine Atmosphäre, ist also $p_2 = 10\,333$ kg und macht die Maschine $u = 50$ Umdrehungen pro Minute, so folgt nach der letzten der vorstehenden Formeln der Cubikinhalt, den die beiden Cylinder erhalten müssten,

$$V_1 = V_2 = 0{,}2822 \text{ cbm.}$$

Dividirt man Gl. (17) durch Gl. (16) so folgt

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\lambda\,(1+m)}{1 + m\,\lambda} = 1{,}154 \,.$$

Bezieht man beide Wärmemengen auf die Secunde, so ist für vorliegenden Fall die Wärmemenge, welche das Kühlwasser der Luft in der Secunde zu entziehen hat: 8,014 cal. oder stündlich 28850 cal.

Die Betriebsarbeit für diese Maschine erscheint bedeutend kleiner, als die, welche für die Maschine des vorhergehenden Beispieles auf S. 371 gefunden worden ist; es liegt dies in der Anwendung des Regenerators und in dem Umstande, dass die untere Temperaturgrenze weniger tief vorausgesetzt worden ist; die Cylinderdimensionen fallen allerdings weit grösser aus, dafür ist aber die Maschine einfach wirkend und es liegt weder ein besonderer Heiz- noch Kühlapparat vor.

Wenn nun auch den, den Rechnungen zu Grunde gelegten Annahmen noch gewisse Unsicherheiten anhaften, die erst durch das Experiment und die Erfahrungen an wirklich ausgeführten Maschinen beseitigt werden können, so erscheint es doch höchst wahrscheinlich, dass die Construction von geschlossenen Kaltluftmaschinen der oben behandelten Art von Erfolg begleitet sein dürfte. Die Ingenieure sollten daher der Frage näher treten; die Kälteerzeugungsmaschinen werden ohne Zweifel noch eine grosse Verbreitung finden und zwar nicht für technische Zwecke allein, sondern auch zur Kühlung von Wohnräumen in heissen Ländern; denn mit der Kühlung der Luft in den Wohnräumen durch Rohrsysteme, in welchen kalte Flüssigkeit circulirt, ist zugleich ein Niederschlagen der in der atmosphärischen Luft enthaltenen Feuchtigkeit auf den Rohrwandungen verbunden und dieser Niederschlag enthält erfahrungsgemäss, worauf Linde zuerst aufmerksam gemacht hat, unter Umständen grosse Mengen absorbirter Kohlensäure. Mit der Kühlung der Luft ist daher zugleich eine Luftreinigung verbunden, die in tropischen Ländern für den Aufenthalt in den Wohnräumen in hygienischer Beziehung von grosser Bedeutung sein dürfte.

b) Offene Kaltluftmaschine.

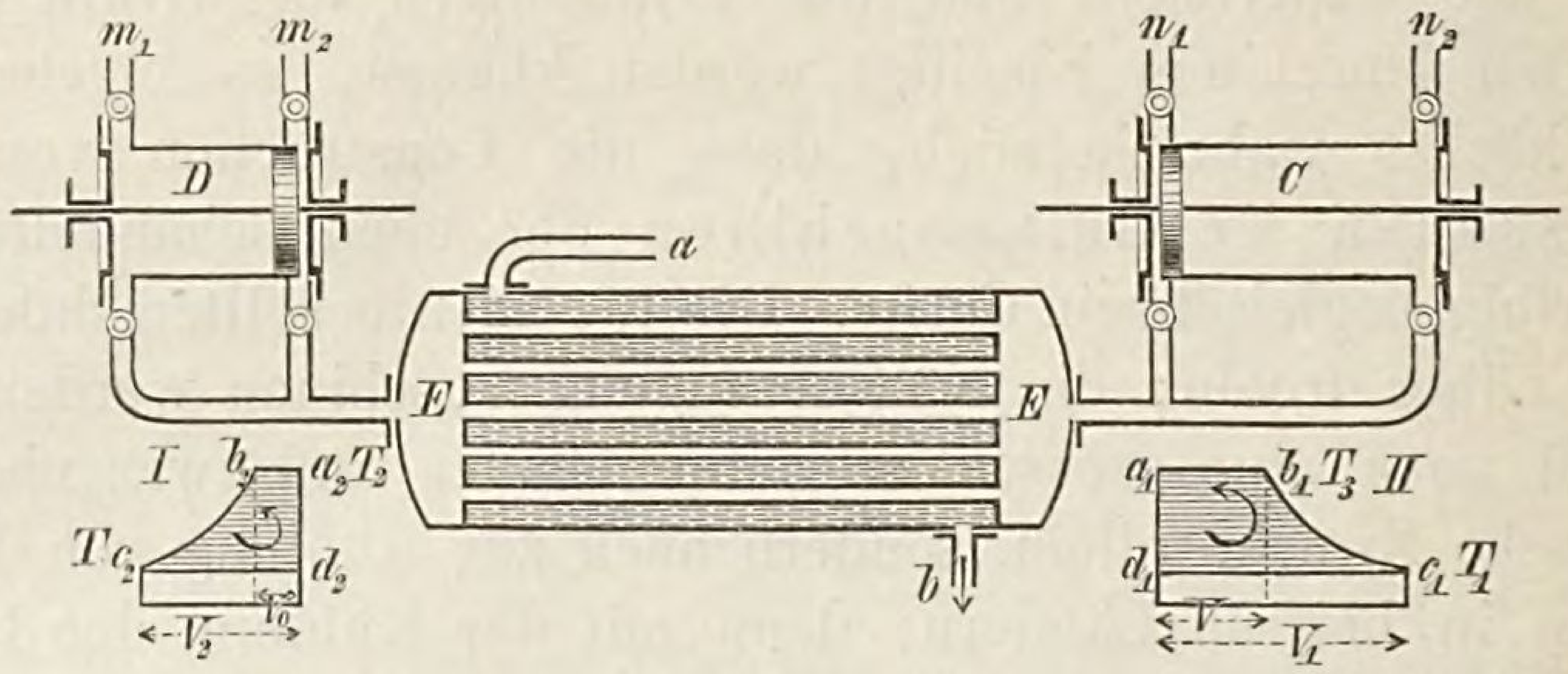
§ 73. Umkehrung der Ericsson'schen geschlossenen Heissluftmaschine unter Weglassung des Heizapparates.

Denkt man sich in der schematischen Darstellung der geschlossenen Heissluftmaschine Fig. 60 S. 358 den Heizapparat AA mit seinem Mantel weggelassen und führt man die Um-

kehrung des dort besprochenen Processes aus, so entsteht die offene Kaltluftmaschine, wie sie bis jetzt schon vielfach ausgeführt wurde und wie sie in untenstehender Figur 64 schematisch zur Darstellung gebracht ist.

C ist wieder der Compressionscylinder, der hier aber durch die Kanäle n_1 n_2 abwechselnd die äussere atmosphärische Luft ansaugt, comprimirt und durch den Kühlapparat *EE* hindurch nach dem Expansionscylinder *D* drückt, woselbst die abgekühlte Luft von der obern Druckgrenze p_2 wieder auf den atmosphärischen Druck p_1 expandirt und mit dem constanten Drucke p_1 durch die Kanäle m_1 m_2 aus dem Cylinder herausgeschoben wird;

Fig. 64.



die beiden Kanäle m_1 und m_2 vereinigen sich zu einem Kanale, durch welchen die gekühlte Luft nach dem Raume geführt wird, in welchem die Kühlung erfolgen soll. Die Kühlung der in der Maschine durch die Compression erhitzten Luft erfolgt im Kühlapparate *EE* durch kaltes Wasser, welches bei *a* zu- und durch das Rohr *b* abfliesst. Von den beiden Indicatordiagrammen I und II gilt das erstere für den Expansions-, das andere für den Compressionscylinder.

Die Theorie dieser Maschine ist einfach und vollständig in den Formeln enthalten, welche für die geschlossene Maschine auf S. 368 bis 370 entwickelt worden sind.

Der ganze Unterschied liegt nur darin, dass die Werthe des Druckes p_1 und der Temperatur T_1 bei der offenen Maschine denen der äussern Atmosphäre entsprechen, es erscheint daher unnöthig, den Process an dieser Maschine noch an numerischen Rechnungen zu erläutern.

Bei den praktischen Ausführungen stösst man aber trotz der grossen Einfachheit dieser Maschinen auf eine eigenthümliche Schwierigkeit, welche die Ursache ist, dass diese im Principe längst bekannten Maschinen sich nur schwer und erst in neuester Zeit Eingang verschaffen konnten*). Da die äussere atmosphärische Luft immer mehr oder weniger Wasserdampf enthält, so findet im Expansionscylinder Bildung von Schnee statt und zwar, da continuirlich neue Luftmengen durch die Maschine getrieben werden, in solchen Mengen, dass die Luftkanäle sich nach kurzer Zeit mit Schnee verstopfen; weiterhin wirkt bei Anwendung von hohem Drucke, also starker Compression im Compressionscylinder, die damit verbundene starke Temperaturerhöhung ungünstig auf die Dichtungen. Man hat schon längst den letztern Uebelstand dadurch zu beseitigen gesucht, dass man kaltes Wasser in den Compressionscylinder einspritzte, wodurch die Feuchtigkeit der in den Expansionscylinder tretenden Luft aber erhöht und die Schneebildung nur verstärkt wird. Wenn man nun auch auf constructivem Wege wenigstens die Verstopfung der Canäle, etwa durch Einschaltung besonderer Schneekammern, verhindern könnte, so wäre doch damit nichts gewonnen, da die Leistung der Maschine durch die Schneebildung an sich schon ausserordentlich herabgezogen wird.

In neuester Zeit haben auf Schiffen und in grossen Schlächtereien zum Zwecke der Fleischkühlung die offenen Luftmaschinen von Bell-Coleman grössere Verbreitung gefunden. Bei diesen Maschinen wird Wasser in den Compressionscylinder gespritzt, von diesem aus tritt die Luft in den Kühlraum, wo die Abkühlung durch weitere Wassereinspritzungen (nicht durch Oberflächenkühlung) erfolgt, aus diesem Raume tritt die Luft in den obern Theil eines thurmartigen Gefässes, in welchem sie durch Gitterwerk hindurch nach unten strömend, das mechanisch beigemischte Wasser absetzen soll; von hier tritt die Luft durch eine Leitung, die durch den Raum hindurchgeführt wird, welcher eben durch die Maschine gekühlt werden soll, nach dem Expansionscylinder. Der ganzen Anordnung liegt der richtige Gedanke zu Grunde, dem Expansionscylinder die Luft schon möglichst ab-

*) Die erste offene Kaltluftmaschine ist von dem Amerikaner Gorrie construirt worden.

gekühlt zuzuführen, da ja der Feuchtigkeitsgehalt der Luft um so geringer ist, je niedriger ihre Temperatur ist. Die ganze Manipulation geschieht aber auf Kosten der beabsichtigten Leistung der Maschine und daher ist es sehr fraglich, ob nicht die Unterdrückung des Schneeniederschlags, der übrigens auf diesem Wege nicht einmal vollständig beseitigt wird, nicht zu theuer erkauft ist*). Bei den Kaltdampfmaschinen fallen alle diese Schwierigkeiten fort; leider fehlt es noch gänzlich an experimentellen Vergleichsresultaten. Die Versuche dürfen sich natürlich nicht auf die kühlende Wirkung der beiden Maschinengattungen allein erstrecken, sondern die zu entscheidende Frage liegt in der Grösse der Betriebsarbeit, welche beide Maschinenarten bei gleicher Kälteerzeugung fordern. Man kann kaum zweifeln, dass der Vergleich zu Ungunsten der offenen Kaltluftmaschinen ausfallen wird; anders aber liegen zweifellos die Verhältnisse bei den geschlossenen Kaltluftmaschinen, da bei diesen nur der durch die Undichtheiten entstehende Luftverlust durch Einführung neuer Luft gedeckt werden muss und diese künstlich vorher getrocknet werden könnte. Schon Kirk brachte für seine Maschine ein mit Chlorcalciumlösung gefülltes Gefäss zu diesem Zwecke in Vorschlag. In der Lehre von den Dämpfen, unten, wird die Schneebildung nähere Besprechung finden.

II. Theorie der Feuerluftmaschinen.

§ 74. Vorbemerkungen.

Bei den Heissluftmaschinen, die im Obigen ausführlicher besprochen worden sind, erleidet das in der Maschine eingeschlossene Luftquantum, der vermittelnde Körper des ausgeführten Kreisprocesses, nur Aenderungen nach Druck, Volumen und Temperatur; bei den betreffenden Untersuchungen wurde dabei stillschweigend, bei der Ableitung der denselben zu Grunde gelegten Fundamentalgleichungen der Thermodynamik aber ausdrücklich die Voraussetzung gemacht, dass im Verlaufe des Processes der

*) Beschreibungen und Abbildungen von Kaltluftmaschinen finden sich in einem Aufsatze von R. Schöttler »Neuere Kältemaschinen«, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Jahrg. 1884. S. 130, 697, 722, 738.

vermittelnde Körper keine chemischen Aenderungen erleide und dass bei der Beurtheilung der Art und der Güte des Arbeitsprocesses einfach nur diejenige Wärmemenge in Betracht gezogen werde, welche in das Innere der Maschine tritt und hier den vermittelnden Körper zur Ausführung eines Kreisprocesses befähigt.

Eine Erweiterung der Frage tritt aber hervor, wenn man zugleich auch die Erzeugung der zum Betriebe einer calorischen Maschine erforderlichen Wärmemenge ins Auge fasst. Auf dem Roste des Verbrennungsraumes einer Heissluftmaschine oder einer Dampfmaschine wird das Brennmaterial unter Zuführung atmosphärischer Luft verbrannt und die aus der Verbrennung hervorgehenden Feuergase erscheinen hier nur als Träger der aus dem Brennstoffe gewonnenen Wärme; beim Hinstreichen an Gefäss-(Kessel-)Wandungen geben sie einen entsprechenden Theil an den vermittelnden Körper im Innern der Maschine ab, einen Theil nehmen sie mit sich fort.

Bei der Beurtheilung der Güte einer calorischen Maschine ist es nun offenbar richtiger, die gewonnene Arbeit zu vergleichen mit der gesammten Wärmemenge, welche in gleicher Zeit durch die Verbrennung des Brennstoffes auf dem Roste frei wird, oder, was noch einfacher ist, die gewonnene Arbeit ohne Weiteres mit dem Gewichte des verbrauchten Brennstoffes in Beziehung zu bringen.

Die letztere Methode der Beurtheilung ist in der Praxis auch vielfach in Gebrauch. Bezeichnet B_h die Brennstoffmenge stündlich in Kilogrammen und N_e die effective, N_i die indicirte Arbeit der Maschine in Pferdestärken gemessen, so ergiebt sich zum Zwecke der Vergleichung in dem Verhältnisse $B_h : N_e$ oder auch $B_h : N_i$ allerdings ein einfaches Mittel, sich einen allgemeinen Einblick zu verschaffen; bei einer in Betrieb befindlichen Maschine lässt sich die Brennstoffmenge B_h leicht beobachten, ebenso lässt sich mit Hülfe des Bremsdynamometers die effective Arbeit N_e oder mit Hülfe von Indicatordiagrammen die indicirte Arbeit N_i ermitteln. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse, wenn es darauf ankommt, auf dem Wege der Rechnung für eine neu zu construirende Maschine den einen oder den andern dieser Verhältnisswerthe zu bestimmen; hier stösst man, wenn man sich nicht mit rohen Schätzungen begnügen will, auf

Schwierigkeiten eigenthümlicher Art, die noch keineswegs zu überwinden sind.

Von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus liegt hier die hochwichtige Aufgabe vor, für diese Verhältnisse analytische Ausdrücke abzuleiten, aus denen man Schlüsse ziehen kann, in welcher Weise der ganze Verbrennungsprocess zu führen wäre und welcher Arbeitsprocess bei der eigentlichen Maschine vorliegen müsste, um das Maximum der im Brennmateriale zur Verfügung stehenden Arbeitsquantität zu gewinnen: diese Arbeitsmenge ist nicht, wie noch vielfach angenommen wird, einfach und allein durch die sogenannte Heizkraft d. h. die Wärmemenge bestimmt, welche bei der Verbrennung des Brennstoffes frei wird und die für verschiedene Brennmaterialien auf dem Versuchswege ermittelt worden ist; vielmehr kommt hier eine Grösse in Betracht, die im Weiteren als der »Arbeitswerth des Brennstoffes« bezeichnet werden mag und auf deren Bestimmung noch näher einzutreten sein wird.

Bei den hierher gehörenden Betrachtungen ist es zweckmässig, wie dies übrigens schon früher angedeutet wurde, zwei Classen von calorischen Maschinen zu unterscheiden.

Findet der Verbrennungsprocess im Innern der Maschine statt, so dass der Heizkörper (die aus der Verbrennung hervorgehenden Feuergase) zugleich den vermittelnden Körper des ausgeführten Arbeits- bez. Kreisprocesses bildet, so tritt eine Maschinenanordnung hervor, die allgemein als »Feuerluftmaschine« bezeichnet werden soll.

Wenn dagegen der Heizkörper (die Feuergase) nicht selbst den Arbeitsprocess ausführt, sondern seine Wärme oder einen Theil derselben an einen zweiten Körper abgiebt, der in der Maschine eingeschlossen ist und erst durch die Aufnahme von Wärme zur Ausführung eines Arbeitsprocesses befähigt wird, so hat man es mit der zweiten Classe der calorischen Maschinen zu thun, denen die Heissluftmaschinen und die Dampfmaschinen angehören.

Bezeichnet nun L_0 den Arbeitswerth von 1 kg Brennstoff, d. h. die Arbeit, welche der aus der Verbrennung hervorgehenden Wärmemenge (Heizkraft) entspricht, wenn man mit dem Heizkörper direct einen Arbeitsprocess ausführt, der aus theoretischen Gründen als der vortheilhafteste d. h. als derjenige nach-

gewiesen worden ist, welcher auf das Maximum der gewonnenen Arbeit führt und ist fernerhin L_e die effective Arbeit, welche die Maschine in gleicher Weise (an die Transmission) abgiebt, so ist das mit η_0 bezeichnete Verhältniss beider Werthe, also

$$\eta_0 = \frac{L_e}{L_0}, \tag{1}$$

dasjenige, was im Weiteren »effectiver Wirkungsgrad der ganzen Anlage« genannt werden mag. Wäre es nun möglich, die beiden Arbeitsquantitäten, die in Meterkilogrammen ausgedrückt werden mögen, zum Zwecke ihrer Berechnung durch analytische Ausdrücke darzustellen, so wäre damit ein Maass für die Beurtheilung der Güte der Maschinenanlage gegeben, welches nicht nur theoretisch, sondern auch vom rein praktischen Standpunkte aus, als vollkommen und allen Anforderungen entsprechend bezeichnet werden müsste.

Es möge nun weiter noch die »indicirte Arbeit L_i« in Rechnung gestellt werden, nämlich diejenige Arbeit, welche dem Indicatordiagramme direct entnommen werden kann und die zur Beurtheilung des eigentlichen Arbeitsprocesses, ohne Rücksicht auf die in der Betriebsmaschine auftretenden, der Reibung entsprechenden Arbeitsverluste vollständig hinreichend ist. Gl. (1) schreibt sich dann in der Form:

$$\eta_0 = \frac{L_i}{L_0} \cdot \frac{L_e}{L_i} \tag{2}$$

und hier möge nun das erste Glied der rechten Seite mit η bezeichnet, also

$$\eta = \frac{L_i}{L_0} \tag{3}$$

gesetzt werden; diesen Werth nenne ich den »thermischen Wirkungsgrad der Anlage«: derselbe ist, wie erwähnt, für die Beurtheilung des eigentlichen Processes, den die Maschine ausführt, schon vollkommen hinreichend, wozu auch noch der Umstand tritt, dass der andere in Gl. (2) vorkommende Verhältnisswerth $L_e : L_i$ den Beobachtungen entsprechend bei allen calorischen Maschinen zwischen engen Grenzen variirt; die äussersten Grenzen desselben können zwischen 0,80 und 0,85 angenommen

werden. Im Uebrigen ist es auch bei Beurtheilung der Dampfmaschinen ganz allgemein bereits Gebrauch geworden, statt der effectiven die indicirte Arbeit zum Anhalt zu nehmen.

Soweit gelten die vorstehenden Betrachtungen für beide Classen der oben unterschiedenen Systeme von calorischen Maschinen; für die zweite Classe derselben (die Heissluft- und Dampfmaschinen) lässt sich aber eine weitere Unterscheidung treffen.

Bezeichnet nämlich bei denselben L_m den Arbeitswerth derjenigen Wärmemenge, welche vom Heizkörper an den vermittelnden Körper abgegeben wird und beachtet man, dass sich Gl. (3) in der Form

$$\eta = \frac{L_m}{L_0} \cdot \frac{L_i}{L_m} \tag{4}$$

schreiben lässt, so kann man jetzt das erstere Verhältniss $L_m : L_0$, welches mit η_1 bezeichnet werden mag, den »Wirkungsgrad der Heizungsanlage« und das andere Verhältniss $L_i : L_m$ den »thermischen Wirkungsgrad der Maschine« nennen; bezeichnet man den letztern Werth mit η_2, so wäre demnach

$$\eta = \eta_1 \eta_2 , \tag{4a}$$

und wollte man endlich noch das Verhältniss der effectiven zur indicirten Arbeit, also $L_e : L_i$, mit η_3 bezeichnen, so wäre der »effective Wirkungsgrad der ganzen Anlage« nach Gl. (2) $\eta_0 = \eta_1 \eta_2 \eta_3$.

Bei den Untersuchungen über Heissluftmaschinen ist der Bestimmung des Arbeitswerthes L_m in § 58 S. 283 u. f. eine besondere Betrachtung gewidmet worden; das Vorstehende zeigt nun, wie auch dort schon ausdrücklich betont wurde, dass jene Darlegungen die Frage nur so weit beleuchten, als die Maschine selbst in Betracht fällt, während dieselben über die Wärmeerzeugung und die Güte der Feuerungsanordnung keinen Aufschluss gaben; sie führten eben nur auf den »thermischen Wirkungsgrad η_2 der Maschine«; es sind daher in der vorhin angezeigten Richtung die Untersuchungen zu erweitern.

§ 75. Ueber den »Arbeitswerth« der Brennstoffe.

Der oben mit L_0 bezeichnete Arbeitswerth der Gewichtseinheit Brennstoff oder die mechanische Arbeit, welche der aus der Verbrennung hervorgehenden Wärmemenge unter der Voraussetzung entspricht, dass mit dem Heizkörper (den Feuergasen) direct der vortheilhafteste Arbeitsprocess ausgeführt wird, ergiebt, wenn B_h kg Brennstoff in der Stunde verbrannt werden, als disponible Arbeit pro Secunde in Meterkilogrammen den Werth:

$$\frac{B_h L_0}{3600} .$$

Bedeutet fernerhin N_i die indicirte Arbeit der Maschine in Pferdestärken, so beträgt dieselbe in Meterkilogr. 75 N_i und das Verhältniss beider Werthe führt dann nach Gl. (3) auf den thermischen Wirkungsgrad der ganzen Anlage, nämlich auf:

$$\eta = 75 \cdot 3600 \cdot \frac{N_i}{B_h L_0} . \tag{5}$$

Nun hat zuerst Redtenbacher den Schluss gezogen, und dessen Angaben werden heute noch von Vielen als zuverlässig anerkannt, dass der in Wärmeeinheiten ausgedrückte Arbeitswerth des Brennstoffes, also $A L_0$, identisch sei mit der Heizkraft H, d. h. der Wärmemenge, welche bei der Verbrennung von einem Kilogramm Brennstoff frei wird, es wäre daher nach Gl. (5)

$$\eta = 75 \cdot 3600 \cdot \frac{A N_i}{B_h H} . \tag{5a}$$

Setzt man hier beispielsweise für Steinkohlen $H = 7500$ Cal. und beachtet man, dass für die besten calorischen Maschinen der Neuzeit (Compound-Dampfmaschinen mit geheizten Mänteln und Receiver) stündlich auf eine Pferdestärke (indicirt) gerade ein Kilogramm Steinkohlen gerechnet werden kann, so ergiebt vorstehender Ausdruck für eine solche Maschine den thermischen Wirkungsgrad der ganzen Anlage

$$\eta = 0{,}085 ,$$

oder es folgt, wenn man statt der indicirten Arbeit die effective

in Gl. (5) substituirt und für das Verhältniss $\eta_3 = \frac{N_e}{N_i}$ den erfahrungsgemäss günstigsten Werth $\eta_3 = 0{,}85$ voraussetzt, der »effective Wirkungsgrad der Anlage« $\eta_0 = 0{,}072$.

Da die besten hydraulischen Umtriebsmaschinen einen Wirkungsgrad von 0,75 bis 0,80 ergeben, so erscheint hiernach die Wärmeausnutzung selbst bei den besten calorischen Maschinen der heutigen Zeit als eine im höchsten Grade unvollkommene, sie tritt geradezu als eine erschreckende Verwüstung des uns von der Natur gebotenen kostbaren, weil in fortwährender Abnahme begriffenen Brennstoffes (der Steinkohlen) hervor. Diesen Schluss hat Redtenbacher in der That gezogen und sein Ausspruch, dass die besten calorischen Maschinen kaum 7 Procent derjenigen Arbeit nützlich verwerthen, die uns im Brennmaterial zur Verfügung stehen, ist in fast alle Lehrbücher der Physik übergegangen und man begegnet demselben selbst noch in solchen wissenschaftlichen Abhandlungen technischer Zeitschriften, die im Uebrigen die Sätze der Thermodynamik in richtiger Weise verwerthen.

Die Schlussfolgerungen Redtenbacher's sind aber unrichtig und entstammen einer Zeit, in welcher die Lehren der mechanischen Wärmetheorie in die Maschinentheorie kaum Eingang gefunden hatten. Der Arbeitswerth L_0 des Brennstoffes steht zu dem Heizwerthe H desselben keineswegs in der einfachen Beziehung $AL_0 = H$, vielmehr hängt der Arbeitswerth L_0 zugleich von der Art des Verbrennungsprocesses und den Temperaturgrenzen ab, zwischen welchen dieser Process überhaupt ausgeführt werden kann.

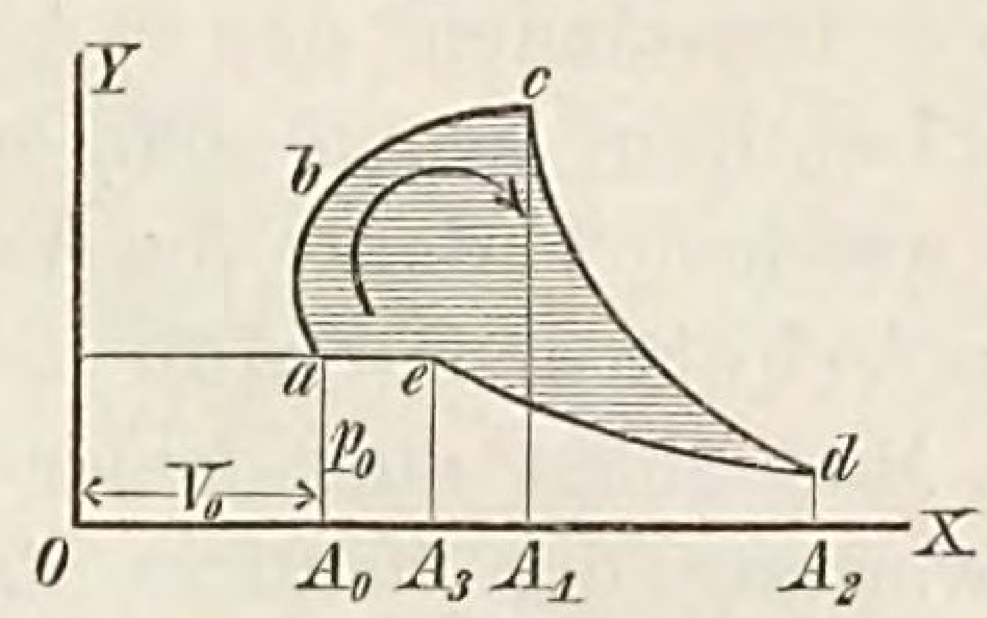
Aus der Verbrennung des Brennstoffes, mag derselbe fest, flüssig oder gasförmig sein, gehen im Verbrennungsraume zunächst die Feuergase hervor, die aus den gasförmigen Verbrennungsproducten und zugleich im Allgemeinen (wegen der Zuführung überflüssiger atmosphärischer Luft) aus Sauerstoff und Stickstoff bestehen.

Das Volumen der auf ein Kilogramm Brennstoff zugeführten Luft ändert sich während der bei der Verbrennung stattfindenden chemischen Vorgänge und zwar wächst dasselbe, insbesondere auch wegen der mit der Verbrennung verbundenen Wärmeent-

wicklung und starken Temperaturerhöhung; denkt man sich hierbei noch, um den Vorgang gleich von vornherein in allgemeiner Form vor Augen treten zu lassen, die Verbrennung finde in einem hermetisch abgeschlossenen Raume statt, in welchen die atmosphärische Luft durch eine Compressionspumpe, nachdem diese die Luft bei constantem atmosphärischem Drucke angesaugt hat, hineingedrückt wird, so liegen bei dem Verbrennungsprocesse neben den chemischen Vorgängen auch Druck- und Volumenänderungen vor.

Es sei in Fig. 65 das Volumen V_0 der atmosphärischen Luft, welche zur Verbrennung von 1 kg festem Brennstoff bei dem constanten atmosphärischen Drucke p_0 von der Pumpe angesaugt worden ist, durch die Strecke OA_0 dargestellt; es repräsentirt dann die über OA_0 stehende Rechteckfläche die Arbeit $V_0 p_0$, welche beim Ansaugen gewonnen worden ist; ist dagegen der Brennstoff gasförmig und wird derselbe mit der atmosphärischen Luft gleichzeitig angesaugt, so entspricht natürlich der Werth V_0 dem Volumen der Mischung beider Gasmengen. Die dem Punkte a entsprechende (absolute) Temperatur T_0 ist diejenige der äussern Atmosphäre, die gleichzeitig als untere Grenztemperatur anzusehen ist.

Fig. 65.



Nun möge im Punkte a die Verbrennung beginnen und durch die Curve abc das Gesetz dargestellt werden, nach welchem sich Druck und Volumen während derselben ändert; der Punkt c entspreche dem Ende des chemischen Vorganges der Verbrennung; die demselben entsprechende Temperatur (gewöhnlich die Verbrennungstemperatur genannt) sei T, die Curve abc möge kurz als Verbrennungs- (bez. Explosions-)Curve bezeichnet werden.

Der Verlauf derselben kann unendlich verschiedener Art sein; wenn zunächst über denselben besondere Annahmen auch nicht gemacht werden sollen, so ist doch so viel klar, dass die von der Verbrennungscurve abc umschlossene Fläche A_0abcA_1 die äussere Arbeit repräsentirt, die während der Verbrennung gewonnen worden ist.

Jetzt möge vom Punkte *c* aus mit den Feuergasen der Process weiter in folgender Art fortgesetzt werden. Man lasse die Feuergase zunächst vom Punkte *c* aus nach der Curve *cd* adiabatisch expandiren, bis im Punkte *d* die untere Temperaturgrenze T_0 erreicht ist und drücke dann dieselbe bei constanter niedrigster Temperatur T_0 (isothermisch, also unter entsprechender Wärmeableitung) zusammen, bis im Punkte *e* der atmosphärische Druck p_0 wieder erreicht ist; in diesem Zustande ist die Gasmasse technisch werthlos und werde nun mit constantem Drucke p_0 ins Freie geschoben, was einem Arbeitsaufwande entspricht, welcher durch die über OA_3 (Fig. 65) stehende Rechteckfläche dargestellt wird. Man hat hier, wie ersichtlich, einen geschlossenen Arbeitsprocess vor sich; die Indicatordiagrammfläche (in Fig. 65 schraffirt) ergiebt die Arbeit, welche durch diesen Process gewonnen wurde und diese Arbeit würde unter Umständen den »Arbeitswerth des Brennstoffes« repräsentiren, wenn man nämlich anzugeben im Stande wäre, bei welchem Verlaufe der Verbrennungscurve *abc* das Maximum der Arbeit erzielt wird.

Man stösst aber leider hier auf eine Frage, zu deren Beantwortung der heutige Stand der Thermodynamik noch nicht die Mittel bietet.

Es liegt hier ein nicht umkehrbarer Process vor, der sich ganz wesentlich von den früher betrachteten unterscheidet und der, obgleich eine geschlossene Indicatorfläche vorliegt, nicht als ein Kreisprocess bezeichnet werden kann, weil hier der vermittelnde Körper im Ausgangs- und Endpunkte *a* von verschiedener chemischer Beschaffenheit ist.

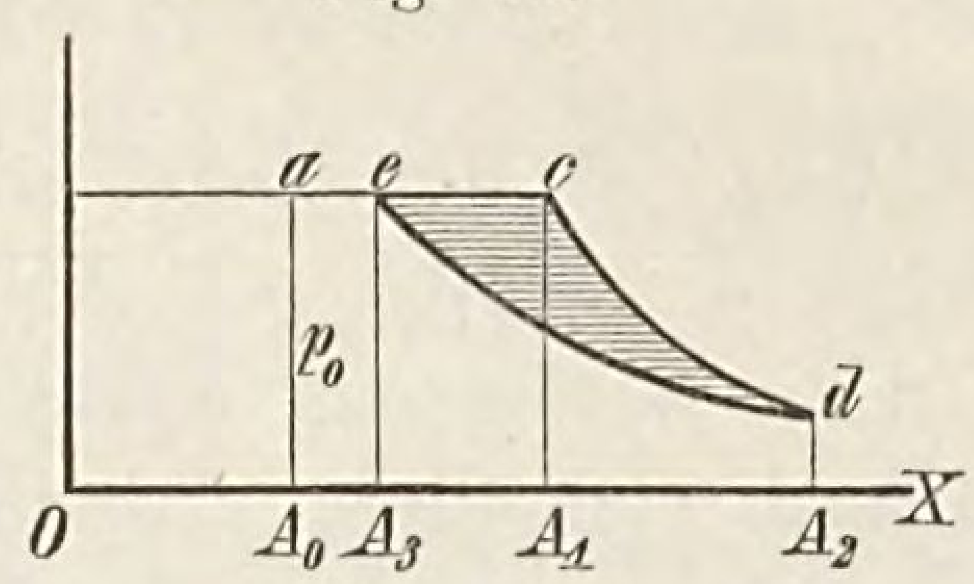
Die Wege *cd*, *de* und *ea* stellen allerdings umkehrbare Druckcurven vor, denn hier erleidet der vermittelnde Körper (die Feuergase) nur Aenderungen nach Druck, Volumen und Temperatur, so dass hier die für Gase entwickelten Grundformeln Verwendung finden können; nicht so ist es aber für den Verlauf der Verbrennungscurve *abc*, auf welcher neben Druck- und Volumenänderung zugleich fortwährend chemische Zustandsänderungen vorliegen; bei festen und flüssigen Brennstoffen findet auf diesem Wege auch noch eine Vermehrung des Gewichtes der arbeitenden Gasmenge statt, weil der Brennstoff hier allmählich in den gasförmigen Zustand übergeht, und end-

lich kann dieser Uebergang sogar noch mit Dissociationserscheinungen verbunden sein.

Es ist bei dem heutigen Stande der Thermodynamik wenig Aussicht vorhanden, dass alsbald eine befriedigende Lösung der Frage gelingen sollte, wie die Verbrennung geleitet, d. h. welcher Verlauf der Verbrennungscurve *abc* vorliegen müsste, um auf das Maximum der Arbeit zu gelangen; unter solchen Umständen bleibt für technische Untersuchungen nichts anderes übrig, als denjenigen Verlauf der Curve zu Grunde zu legen, der bei den wirklich ausgeführten Maschinen vorkommt und diesen bis auf Weiteres als den richtigen anzusehen.

Als endgültigen Abschluss der frühern Untersuchungen über Heissluftmaschinen und als Einführung in die später folgenden Betrachtungen über Dampfmaschinen möge daher der Arbeitswerth L_0 des Brennstoffes für den bei den genannten Maschinen vorliegenden Verbrennungsprocess und unter der Voraussetzung ermittelt werden, dass feste Brennstoffe angewendet werden. Der Vorgang der Verbrennung findet hier bei constantem atmosphärischem Drucke statt, es tritt daher, da hier die Verbrennungscurve *abc* in Fig. 65 in eine horizontale gerade Linie übergeht, an die Stelle des dort gegebenen Diagrammes das nebenstehende in Fig. 66.

Fig. 66.



Bezieht man hier die Arbeitsfläche *ecd* zunächst auf ein Kilogramm Feuergase und bezeichnet man das den Punkten *e* und *c* entsprechende specifische Volumen mit v_1 und v, während die zugehörigen Temperaturwerthe T_0 und T sind, so folgt die in Wärmeeinheiten ausgedrückte, auf dem Wege *ec* gewonnene Arbeit L_1

$$A L_1 = A p_0 (v - v_1) = A B (T - T_0)\ .$$

Die Arbeit L_2, welche bei der adiabatischen Expansion auf dem Wege *cd* gewonnen wird, findet sich (vergl. S. 135) aus der Gleichung

$$A L_2 = c_v (T - T_0)\ .$$

Endlich bestimmt sich aus der isothermischen Compression die auf

dem Wege *de* aufzuwendende Arbeit, wenn der Druck im Punkte *d* mit p_2 bezeichnet wird, mittels der Formel

$$A L_3 = A B T_0 \operatorname{logn} \frac{p_0}{p_2} \cdot \qquad \text{(Vergl. S. 133.)}$$

Die gewonnene Arbeit L_0 bestimmt sich durch $L_0 = L_1 + L_2 - L_3$ und wenn man hier die vorstehenden Ausdrücke benutzt und zugleich die bekannten Beziehungen

$$c_p - c_v = AB \quad \text{und} \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

verwerthet:

$$A L_0 = c_p \left(T - T_0 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}\right),$$

wobei c_p die specifische Wärme der Feuergase für constanten Druck bedeutet.

Ist endlich G das Gewicht der Feuergase auf ein Kilogramm Brennstoff bezogen, so folgt unter den gemachten Voraussetzungen der Arbeitswerth L_0 des Brennstoffes in Wärmeeinheiten gemessen

$$A L_0 = c_p G \left(T - T_0 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}\right) \cdot \qquad (6)$$

Das Gewicht der zur Verbrennung herbeigeführten Luftmenge beträgt hierbei $(G - 1)$ Kilogramm.

Um wenigstens annähernd eine Vorstellung zu gewinnen, wie hoch sich dieser Arbeitswerth im einzelnen Falle stellt, möge angenommen werden, die Temperatur der atmosphärischen Luft sei $t_0 = 20^0$ C. und die Verbrennungstemperatur im Feuerraume $t = 1200^0$, es sei also $T_0 = 293^0$ und $T = 1473^0$; ferner möge für die Heizgase die specifische Wärme bei constantem Drucke zu $c_p = 0{,}24$ angenommen und, Steinkohlenfeuerung vorausgesetzt, die Luftmenge auf 1 kg Steinkohlen zu 16 kg, also $G = 17$ kg gesetzt werden; dann folgt aus Gl. (6) der Arbeitswerth der Steinkohlen

$$A L_0 = 2884 \text{ cal.}$$

oder

$$L_0 = 1\,222\,816 \text{ mkg},$$

während man den Heizwerth der Steinkohlen gewöhnlich zu 7500 Cal. annimmt.

Die Benutzung dieses Zahlenwerthes in Gl. (5) S. 385 ergiebt den »thermischen Wirkungsgrad der ganzen Anlage«:

$$\eta = 0{,}221 \frac{N_i}{B_h},$$

und wenn man hier, wie dort, für die besten calorischen Maschinen 1 kg Steinkohle stündlich auf eine indicirte Pferdestärke rechnet, würde

$$\eta = 0{,}221$$

sein, also nahezu dreimal grösser, als man nach der oben als unzulässig bezeichneten Rechnungsart von Redtenbacher findet; allerdings erscheint auch der hier ermittelte Werth noch klein genug, um zu weitern Nachforschungen in der angegebenen Richtung anzuregen.

Um in der Untersuchung noch einen Schritt weiter zu gehen, möge bedacht werden, dass bei den vorausgesetzten Maschinen (Heissluft- und Dampfmaschine) die Feuergase an der sogenannten Heizfläche hinströmend einen Theil ihrer Wärme an den im Innern der Maschine eingeschlossenen vermittelnden Körper abgeben. Ist T' die Temperatur, mit welcher die Feuergase die Heizfläche verlassen und abströmen, so folgt die Wärmemenge Q, welche, auf ein Kilogramm Brennstoff bezogen, der Maschine selbst zur Verfügung gestellt wird:

$$Q = c_p G (T - T') ,$$

und die Arbeit L_m, welche hier gewonnen würde, wenn die Maschine zwischen den Grenztemperaturen T_1 und T_2 einen Carnot'schen Kreisprocess ausführte, fände sich nach Gl. (47) S. 283

$$L_m = \frac{Q}{A T_1} (T_1 - T_2) ,$$

welche Grösse dort als disponible Arbeit für die eigentliche Maschine hingestellt worden ist.

Bei der Besprechung von Gl. (4) S. 384 ist nun das Verhältniss

$$\eta_1 = \frac{L_m}{L_0}$$

als »Wirkungsgrad der Heizungsanlage« bezeichnet worden;

die Benutzung der vorstehenden Formeln ergiebt daher für diesen Wirkungsgrad:

$$\eta_1 = \frac{(T - T')(T_1 - T_2)}{T_1\left[T - T_0 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}\right]}. \tag{7}$$

Die untere Temperaturgrenze T_2 für den Carnot'schen Process kann mit der Temperatur T_0 der äussern Atmosphäre identisch gesetzt werden; die Temperatur T', mit welcher die Feuergase die Heizfläche verlassen, wird immer grösser als die obere Temperaturgrenze T_1 des Processes sein, welchen die Maschine vollführt; setzt man als äussersten Fall $T' = T_1$, so schreibt sich

$$\eta_1 = \frac{(T - T_1)(T_1 - T_0)}{T_1\left[T - T_0 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}\right]}. \tag{7 a}$$

Für eine bestimmte Verbrennungstemperatur T und einen bestimmten Werth der atmosphärischen Temperatur T_0 giebt diese Formel einen vortheilhaftesten Werth für T_1, d. h. für η_1 den Maximalwerth, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, $T_1 = \sqrt{TT_0}$.

Für die oben angenommenen Temperaturen $t_0 = 20°$ C. und $t = 1200°$ C. (s. S. 390) ergiebt sich $T_1 = 657°$ und hiernach $t_1 = 384°$; das Maximum des »Wirkungsgrades der Heizanlage«, das hier vorläge, wäre dann nach Gl. (7 a) $\eta_1 = 0{,}639$.

Der Temperaturwerth t_1, wie er hier gefunden wurde, könnte bei Heissluftmaschinen noch vorkommen; wenn nun aber früher bei Betrachtung dieser Maschinen ausgesprochen wurde, dass diese obere Temperaturgrenze so hoch wie möglich gewählt werden solle, so tritt jetzt die Einschränkung hervor, dass mit derselben ein gewisser oberer Werth nicht überschritten werden darf: der Wirkungsgrad η_2 (s. S. 384) der Maschine würde dadurch zwar erhöht, der Wirkungsgrad der Heizungsanlage aber vermindert.

Die ganze vorstehende Untersuchung, auf die übrigens bei Betrachtung der Dampfmaschine wieder zurückzukommen sein wird, möge als ein Versuch gelten, die Frage über den Wirkungsgrad der calorischen Maschinen zu verallgemeinern; aus dem ganzen Gange der vorstehenden Darlegungen ist ersichtlich, dass hier ein wichtiges technisches Problem vorliegt, welches

erst vollständig zur Lösung gebracht werden kann, wenn in den Grundformeln der Thermodynamik auch die chemischen Zustandsänderungen der Körper noch in Rechnung gestellt werden können und über etwaige Aenderungen der specifischen Wärmen c_p und c_v zuverlässige Aufschlüsse vorliegen. (Vergl. S. 136.)

§ 76. Ueber die verschiedenen Arten der Feuerluftmaschinen.

Der Gedanke, den Verbrennungsprocess in das Innere der Maschine zu verlegen und mit den Verbrennungsproducten, den Feuergasen, den eigentlichen Arbeitsprocess direct auszuführen, ist schon vor vielen Jahren praktisch durchzuführen versucht worden.

Dass damit eine bessere und vollkommenere Ausnutzung des Arbeitswerthes der Brennstoffe zu erwarten ist, dürfte als zweifellos hingestellt werden, schon weil gewisse Arbeitsverluste in Wegfall kommen, welche bei den offenen Heizanlagen unvermeidlich sind. Gegen die theoretische Begründung dieses Satzes, wie er in neuerer Zeit mehrfach unter Hinweis auf den Carnotschen Kreisprocess versucht worden ist, lassen sich aber begründete Einwendungen erheben: die Frage dürfte vielmehr in derjenigen Weise zu erörtern sein, wie es im vorigen Paragraphen unter Zugrundelegung von Fig. 65 S. 387 angegeben worden ist.

Für feste Brennstoffe den Gedanken zu verwirklichen, ist bei den Maschinen von Belou*), Windhausen und Huch**), Roper***) u. A. versucht worden, insbesondere hat Windhausen mit grosser Ausdauer die Frage zu fördern gesucht; in neuerer Zeit noch hat Todt†) für den eigentlichen Arbeitsprocess derartiger Maschinen Neuerungen in Vorschlag gebracht und zugleich seiner Abhandlung theoretische Betrachtungen angeschlossen.

Diesen Maschinen liegt die Idee zu Grunde, durch eine Compressionspumpe die atmosphärische Luft anzusaugen, zu compri-

*) Dingler's polytechn. Journal Bd. 177. Mit der Maschine von Belou hat Tresca 1861 Versuche angestellt und darüber in den Annales du Conservatoire des arts et métiers 1864 (t. V. p. 34) berichtet.

**) Dingler's polytechn. Journal Bd. 178.

***) Ebendaselbst Bd. 178. S. 249.

†) Zeitschrift des Ver. deutscher Ingenieure Bd. 25. 1881. S. 341.

miren und in den hermetisch abgeschlossenen Feuerraum zu drücken; die aus der Verbrennung des festen Brennstoffes hervorgehenden, hochgespannten Feuergase dann dem Arbeitscylinder zuzuführen, von wo aus dieselben, nachdem ihr Druck durch Expansion auf nahezu die äussere atmosphärische Pressung herabgesunken ist, mit constantem Druck ins Freie geschoben werden.

Die betreffenden Maschinen haben indess keine Erfolge aufzuweisen und daher soll hier auch ein näheres Eingehen auf die Theorie derselben unterbleiben, obgleich es keine Schwierigkeit bietet, wenigstens auf dem Näherungswege den Process derselben zu verfolgen.

Eine andere Idee war, feste Explosivstoffe, beispielsweise Schiesspulver oder flüssige Brennstoffe (zerstäubtes Petroleum) in Anwendung zu bringen; bis jetzt ist es jedoch hier beim blossen Vorschlage geblieben; es ist aber schwer, die Frage von sich zu weisen, ob es nicht möglich sein sollte, diese festen und flüssigen Brennstoffe, die Explosivstoffe der Neuzeit, in technischer, d. h. hier in eminent friedlicher Weise zu verwerthen. Der Arbeitswerth dieser Sprengstoffe muss zum Theil von enormer Grösse sein und daher käme es nur darauf an, wenn nicht die Erzeugungskosten derartiger Stoffe ihre technische Verwerthung zum Maschinenbetriebe unvortheilhaft erscheinen lassen sollten, deren Verbrennung und explosionsartige chemische Zersetzung gefahrlos der Art vor sich gehen zu lassen, dass die im abgeschlossenen Raume mit der Explosion verbundene Druckerzeugung nicht allzu plötzlich erfolgt und der erzeugte Maximaldruck gewisse als zulässig zu erachtende Grenzen nicht überschreitet. Diese Forderungen vermögen wir bei festen und flüssigen Explosivkörpern noch nicht zu erfüllen, wohl aber ist dies gelungen bei gasförmigen Explosiv- oder Brennstoffen und in der Anordnung und Construction der betreffenden Maschinen, den »Gasmaschinen«, die als eine besondere Art der Feuerluftmaschinen betrachtet werden müssen, sind in der neuesten Zeit Fortschritte gemacht worden, die als hochbedeutungsvoll bezeichnet werden müssen.

Es ist interessant, bezüglich des Entwickelungsganges der Erfindung und allmählichen Ausbildung der heutigen Gasmaschine, Vergleiche anzustellen mit den Vorgängen, die mit der Erfindung und der ersten Vervollkommnung der Dampfmaschine

verbunden waren. Bezüglich der Gasmaschine liegen die Verhältnisse augenblicklich ganz ähnlich, wie bei der Dampfmaschine unmittelbar nach Watt's bahnbrechenden Erfindungen. Die heutige Gasmaschine von Otto nimmt gegenüber allen Gasmaschinen, die vorher in Vorschlag und zur Ausführung gekommen sind, die Stellung ein, wie s. Z. die Watt'sche Dampfmaschine gegenüber den Maschinenanordnungen, welche Watt vorfand*).

Bei den Gasmaschinen benutzt man als Brennstoff das Leuchtgas, welches im Allgemeinen aus einer Mischung verschiedener Kohlenwasserstoffgase, sowie von Wasserstoff-, Kohlenoxyd- und Stickstoffgas in wechselndem Mischungsverhältnisse besteht; das Leuchtgas wird im Arbeitscylinder, gemengt mit atmosphärischer Luft und unter Umständen mit einem Theile der gasförmigen Verbrennungsproducte, die vom vorigen Spiele im Cylinder zurückgeblieben sind, unter Umständen auch nach vorausgegangener Compression, entzündet.

Am Ende der explosionsartig erfolgten Verbrennung umschliesst dann der Cylinder die gasförmigen Verbrennungsproducte im Zustande von hohem Drucke und hoher Temperatur; man lässt nun die Gasmenge soweit expandiren, bis am Ende des Kolbenschubes der Druck derselben auf nahezu die atmosphärische Pressung herabgegangen ist, um sie dann beim Rückgange des Kolbens im Arbeitscylinder vollständig oder unter Zurückhaltung eines Theiles derselben ins Freie zu schieben. Soviel im Allgemeinen über den Vorgang in der Gasmaschine; die nähere Betrachtung desselben erfordert aber zunächst noch einige Voruntersuchungen.

§ 77. Ueber das Verhalten brennbarer Gase bei der Entzündung.

Denkt man sich, weil dadurch alle vorkommenden Fälle umschlossen werden, ein brennbares Gas bestehe aus n_1 Atomen Kohlenstoff (C), n_2 Atomen Wasserstoff (H), n_3 und n_4 Atomen Sauerstoff (O) und Stickstoff (N), so wäre das chemische Zeichen dieses Gases

*) In der Beurtheilung der grossen Verdienste, welche sich Otto um den Bau der Gasmaschinen und deren Vervollkommnung erworben hat, theile ich vollständig die Ansicht von Reuleaux. Vergl. Zeitschrift der deutschen Ingenieure Bd. 30. 1886. S. 324.

$$(C_{n_1}\; H_{n_2}\; O_{n_3}\; N_{n_4}) \; . \tag{8}$$

Bezeichnet man der Reihe nach die Atomgewichte der einzelnen Elemente C, H, O und N mit e_1 e_2 e_3 und e_4, so ist das Molekulargewicht des vorgelegten Gases, welches mit m bezeichnet werden mag:

$$m = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + n_4 e_4 = \Sigma(n e) \; , \tag{9}$$

wobei zu setzen ist (vergl. S. 98)

$$e_1 = 12 \; ; \quad e_2 = 1 \; ; \quad e_3 = 16 \; ; \quad e_4 = 14 \; .$$

Die Constante B der Zustandsgleichung dieses Gases, nämlich der Gleichung $pv = BT$, findet sich aus der Beziehung Gl. (14) S. 98

$$Bm = B_0 m_0 \; ,$$

wobei die Werthe auf der rechten Seite sich auf Wasserstoffgas beziehen; da nun $m_0 = 2$ ist und für alle folgenden Untersuchungen mit hinreichender Genauigkeit $B_0 = 424$ gleich dem reciproken Werthe des Wärmeäquivalentes A der Arbeitseinheit gesetzt werden kann (vergleiche S. 97), so bestimmt sich B aus der Gleichung:

$$ABm = 2 \tag{10}$$

und dann folgt für gegebenen Druck p und gegebene Temperatur T auch sogleich nach der Zustandsgleichung das specifische Volumen v dieses Gases.

Dieses Gas möge nun gemischt werden mit einem andern Gase, welches aus einer Mischung von Sauerstoff und Stickstoff besteht und zwar in der Gewichtseinheit α kg Sauerstoff und β kg Stickstoff enthalte; q kg dieses Gases sollen auf ein Kilogramm des gegebenen Gases, welches als Verbrennungsgas bezeichnet werde, kommen. Setzt man m kg des letztgenannten Gases voraus, so besteht also die gesammte Mischung aus m kg Verbrennungsgas, $qm\alpha$ kg Sauerstoff und $qm\beta$ kg Stickstoff.

Die Constante B der Zustandsgleichung für das Verbrennungsgas folgt aus Gl. (10), die gleichen Constanten für Sauerstoff und Stickstoff sind der Tabelle auf S. 96 zu entnehmen, es ergiebt sich daher die Constante B_m, welche der gesammten Mischung entspricht, nach Gl. (19a) S. 101

$$B_m = \frac{\dfrac{2}{Am} + (26{,}472\,\alpha + 30{,}131\,\beta)\,q}{q + 1} \; . \tag{11}$$

Ist ferner für das Verbrennungsgas die specifische Wärme bei constantem Drucke c_p und c_v die bei constantem Volumen, und bezeichnen c_p' und c_v' dieselben Werthe für die gesammte Mischung, so folgt weiterhin nach den Gln. (13a) und (14a) S. 163

$$c_p' = \frac{c_p + (0{,}2175\ \alpha + 0{,}2438\ \beta)\ q}{q + 1} \tag{12}$$

und

$$c_v' = \frac{c_v + (0{,}1551\ \alpha + 0{,}1727\ \beta)\ q}{q + 1} \tag{13}$$

unter Benutzung der auf S. 111 und S. 116 gegebenen Werthe. Wäre die dem Verbrennungsgase beigefügte Mischung gewöhnliche atmosphärische Luft, so wäre in den vorstehenden Formeln nach S. 119 $\alpha = 0{,}2356$ und $\beta = 0{,}7644$ zu setzen, wäre dagegen statt Luft reiner Sauerstoff beigemischt, so hätte man $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ zu substituiren.

Diese Gasmischung soll nun entzündet werden; ist dabei die Verbrennung eine vollkommene, so verbrennt der Kohlenstoff zu Kohlensäure, der Wasserstoff zu Wasser und das Resultat ist ein neues Gasgemisch, welches besteht aus Kohlensäure, Wasserdampf, Sauerstoff und Stickstoff, vorausgesetzt, die Temperatur sei nach der Verbrennung so hoch, dass das entstandene Wasser als Wasserdampf vorhanden ist. Da ein Atom Kohlenstoff für den Uebergang in Kohlensäure (CO_2) zwei Atome Sauerstoff aufnimmt, also e_1 kg Kohlenstoff $2\,e_3$ kg Sauerstoff brauchen, so erfordern die im vorgelegten Gase vorhandenen n_1 Atome Kohlenstoff im Ganzen $2\,n_1\,e_3$ kg Sauerstoff, und das aus der Verbrennung hervorgehende Gewicht G_1 der Kohlensäure beträgt

$$G_1 = n_1\,(e_1 + 2\,e_3)\ \text{kg}\ . \tag{14a}$$

Dagegen kommt bei der Bildung von Wasser (H_2O) auf 1 Atom Wasserstoff ein halbes Atom Sauerstoff oder auf e_2 kg kommen $0{,}5\,e_3$ des letztern; da das vorgelegte Gas n_2 Atome Wasserstoff enthält, so sind für die Verbrennung desselben im Ganzen $0{,}5\,n_2\,e_3$ kg Sauerstoff verwendet worden; das Gewicht G_2 des entstandenen Wassers beträgt daher

$$G_2 = n_2\,(e_2 + 0{,}5\,e_3)\ \text{kg}\ . \tag{14b}$$

Weiterhin waren in dem vorgelegten Gase nach Gl. (9) $n_3\,e_3$ kg Sauerstoff vorhanden, die zugesetzte Mischung enthält davon

$q m \alpha$ kg. Das Gewicht G_3 der übrig gebliebenen Sauerstoffmenge ist daher

$$G_3 = (n_3 e_3 + q m \alpha - 2 n_1 e_3 - 0{,}5 n_2 e_3) \text{ kg}. \qquad (14\text{c})$$

Endlich beträgt das Gewicht G_4 der Stickstoffmenge am Ende der Verbrennung

$$G_4 = (n_4 e_4 + q m \beta) \text{ kg}, \qquad (14\text{d})$$

weil mit dem Stickstoffe keine Aenderungen vorgehen. Die Addition der vorstehenden vier Gewichte führt unter Beachtung von Gl. (9), wie es sein muss, wieder auf den Werth $m(q+1)$, d. h. auf das Gewicht der ganzen Mischung vor der Verbrennung.

Da nun der Reihe nach für die vier Gase, Kohlensäure, Wasserdampf, Sauerstoff und Stickstoff, die entsprechenden Constanten B der Zustandsgleichung betragen:

19,204; 46,954; 26,472 und 30,131,

ferner die specifischen Wärmen bei constantem Drucke (c_p) nach Tabelle S. 121

0,2169; 0,4805; 0,2175 und 0,2438,

sowie die specifischen Wärmen bei constantem Volumen (c_v)

0,1718; 0,3695; 0,1551 und 0,1727,

so berechnet sich jetzt für die aus der Verbrennung hervorgegangene Mischung nach den auf S. 101 und S. 163 gegebenen Formeln:

$$B = \frac{\Sigma(G B)}{\Sigma(G)}; \quad c_p = \frac{\Sigma(G c_p)}{\Sigma(G)}; \quad c_v = \frac{\Sigma(G c_v)}{\Sigma(G)}; \qquad (15)$$

während die betreffenden Werthe vor der Entzündung vorhin berechnet und mit B_m, c_p' und c_v' bezeichnet wurden.

Ist Druck, specifisches Volumen und Temperatur vor der Entzündung p', v' und T' und nach derselben p, v und T, so bestehen die Beziehungen:

$$p v = B T \quad \text{und} \quad p' v' = B_m T'.$$

Denkt man sich Druck und Temperatur nach der Verbrennung auf die Werthe zurückgeführt, welche vor der Zündung vorlagen, so ergeben die letzten beiden Ausdrücke:

$$\frac{v}{v'} = \frac{B}{B_m}, \tag{16}$$

woraus man schliessen kann, ob mit der Verbrennung eine Volumenänderung verbunden ist.

Die angegebenen Rechnungen machen nun freilich keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit, weil gerade für Kohlensäure und Wasserdampf die angegebenen Werthe der specifischen Wärmen unsicher sind, insbesondere bei der Kohlensäure, bei welcher sich diese Grössen stark mit der Temperatur ändern; auch unterwerfen sich beide Gase nicht der Zustandsgleichung der Gase und hier ist es besonders der Wasserdampf, bei welchem man sich nur bei geringen Pressungen und hoher Temperatur die Annahme erlauben dürfte, dass er dem Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetze folgt.

Die Verbrennungsgase haben gewöhnlich vor der Zündung die atmosphärische Temperatur; führt man dann nach der Verbrennung die Gasmischung auf die anfängliche Temperatur zurück, so ist das Wasser nicht mehr in Dampfform vorhanden, sondern erscheint fast vollständig condensirt; da das Wasservolumen gegenüber dem Volumen der übrigen Gase fast verschwindend klein ist, so hätte man zur Bestimmung von B nach den Gln. (15) richtiger statt des durch Gl. (14b) gegebenen Gewichtes das Gewicht des nach der Verbrennung vorhandenen Wasserdampfes $G_2 = 0$ zu setzen.

Zu einer besonderen Bemerkung giebt noch Gl. (14c) Anlass, welche das Gewicht des Sauerstoffes berechnen lässt, der nach der Verbrennung noch übrig geblieben ist. Setzt man $G_3 = 0$, so ergiebt sich hier aus der Beziehung

$$q m \alpha = (2 n_1 + 0{,}5 n_2 - n_3)\, e_3 \tag{17}$$

das Gewicht q der aus Sauerstoff und Stickstoff bestehenden Mischung, welche zur Verbrennung von 1 kg Gas mindestens zugeführt werden muss, um die vollständige Verbrennung herbeizuführen. Besteht diese Mischung aus atmosphärischer Luft, so ist, wie erwähnt, $\alpha = 0{,}2356$ zusetzen, während $\alpha = 1$ anzunehmen ist, wenn reiner Sauerstoff benutzt wird.

Es werde für einen speciellen Fall angenommen, der Hauptbestandtheil des gewöhnlichen Leuchtgases, nämlich Sumpfgas (Grubengas, leichtes Kohlenwasserstoffgas), solle verbrannt werden

unter Zuführung atmosphärischer Luft. Für dieses Gas gilt die chemische Formel CH_4, es ist daher nach Gl. (8) $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 0$, $n_4 = 0$, daher nach Gl. (9) das Molekulargewicht

$$m = 1 \cdot 12 + 4 \cdot 1 = 16$$

und nach Gl. (10) die Constante B der Zustandsgleichung

$$B = 53{,}000 .$$

Aus Gl. (17) folgt dann, wegen $e_3 = 16$,

$$q \alpha = 4 .$$

Es müssten daher zur vollkommenen Verbrennung mindestens 4 kg reiner Sauerstoff auf 1 kg Sumpfgas zugeführt werden; das Minimum der erforderlichen atmosphärischen Luft ist dagegen (wegen $\alpha = 0{,}2356$)

$$q = 16{,}978 \text{ kg} .$$

Es möge nun angenommen werden, dass in Wirklichkeit 1 kg dieses Gases mit $q = 24$ kg atmosphärischer Luft vor der Zündung gemischt sei; da nach der Tabelle auf S. 121 für Sumpfgas $c_p = 0{,}5929$ und $c_v = 0{,}4680$ anzunehmen ist, so findet sich nach den Gln. (11), (12) und (13) S. 397 für die gesammte Mischung vor der Zündung:

$$B_m = 30{,}218; \quad c_p' = 0{,}2518; \quad c_v' = 0{,}1872; \quad \frac{c_p'}{c_v'} = 1{,}345 .$$

Liegen vor der Zündung $m = 16$ kg Sumpfgas vor, so ist das Gesammtgewicht der Mischung

$$m(q + 1) = 400 \text{ kg} .$$

Nach der Verbrennung finden sich vor, wie die Benutzung der angegebenen Werthe in Gln. (14a) bis (14d) ergiebt: $G_1 = 44$ kg Kohlensäure, $G_2 = 36$ kg Wasser, $G_3 = 26{,}47$ kg Sauerstoff und $G_4 = 293{,}53$ kg Stickstoff. Aus den Gln. (15) folgt daher für die ganze aus der Verbrennung hervorgegangene Mischung:

$$B = 30{,}201; \quad c_p = 0{,}2604; \quad c_v = 0{,}1891; \quad \frac{c_p}{c_v} = 1{,}377 .$$

Die Werthe weichen wenig von denen ab, die der Mischung vor der Verbrennung entsprechen. Dabei ist das vorhandene Wasser als dampfförmig vorausgesetzt; wäre es in Folge nach-

träglicher Abkühlung der Verbrennungsgase flüssig geworden, so fände sich $B = 25{,}975$; im erstern Falle würden bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur das Volumen vor und nach der Verbrennung, v' und v, nach Gl. (16) fast genau gleich gross sein; im andern Falle läge eine Contraction vor und zwar wäre $v = 0{,}859 \cdot v'$.

§ 78. Ueber das Verhalten des Steinkohlen-Leuchtgases bei der Entzündung.

Das Leuchtgas ist aus einer Reihe einzelner Gase zusammengesetzt und zwar ist das Mischungsverhältniss sehr veränderlich; zum Zwecke allgemeiner Untersuchungen wird am Besten ein gewisses mittleres Mischungsverhältniss vorausgesetzt; um Vergleiche zu erleichtern, möge im Folgenden das Leuchtgas in derjenigen Zusammensetzung angenommen werden, welche Grashof *) und nach ihm Schöttler**) benutzt hat.

Um jedoch Rechnungen der hierher gehörigen Art zu erleichtern, mag zuerst für diejenigen Gasarten, aus deren Gemisch im Allgemeinen das Steinkohlen-Leuchtgas besteht, eine Hülfstabelle Platz finden, die sogleich näher besprochen werden soll.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Gasart	Chemisches Zeichen	Molekulargewicht m	B	Sauerstoffmenge s kg	Kohlensäure k kg	Wasser w kg	Specifische Wärme des Gases c_p	c_v
Sumpfgas[1])	CH_4	16	52.824	4.000	2.750	2.250	0.5929	0.4680
Elaylgas[2])	C_2H_4	28	30.185	3.428	3.143	1.286	0.4040	0.3326
Butylengas.....	C_4H_8	56	15.092	3.428	3.143	1.286	0.4040	0.3326
Wasserstoffgas .	H_2	2	422.591	8.000	—	9.000	3.4090	2.4123
Kohlenoxydgas .	CO	28	30.185	0.571	1.571	—	0.2450	0.1736
Stickstoffgas ...	N_2	28	30.185	—	—	—	0.2438	0.1727

Unter Zugrundelegung des allgemeinen chemischen Zeichens $(C_{n_1} H_{n_2} O_{n_3} N_{n_4})$ eines Gases (Gl. 8 S. 396) ist hier in Col. 2 nach Gl. (9) das Molekulargewicht des betreffenden Gases be-

*) Grashof, Theoretische Maschinenlehre. Leipzig 1875. S. 907.

**) Schöttler, Die Gasmaschine. Braunschweig u. Leipzig 1882. S. 76.

1) Grubengas, leichtes Kohlenwasserstoffgas oder auch Einfach-Kohlenwasserstoffgas genannt.

2) Auch Aethylen, ölbildendes Gas, schweres oder Zweifach-Kohlenwasserstoffgas.

stimmt und Col. 3 giebt die Constante B der Zustandsgleichung des Gases, hier nach Gl. (10) S. 396 berechnet.

In Col. 4 ist die Sauerstoffmenge in Kilogrammen angegeben und mit s bezeichnet, welche zur Verbrennung von einem Kilogramm des betreffenden Gases erforderlich ist. Sie ist, wie aus den Darlegungen im vorigen Paragraphen hervorgeht, nach der Formel

$$s = \frac{2 n_1 e_3 + 0{,}5 \cdot n_2 e_3 - n_3 e_2}{m} = \frac{32 n_1 + 8 n_2 - 16 n_3}{m} \qquad (18)$$

berechnet worden.

Col. 5 giebt, durch k bezeichnet, das Gewicht der Kohlensäure und Col. 6, durch w bezeichnet, das Gewicht des Wassers an, welches bei der Verbrennung von 1 kg des betreffenden Gases entsteht.

Der erstere Werth findet sich nach den am gleichen Orte gemachten Bemerkungen aus der Formel

$$k = \frac{n_1 (e_1 + 2 e_3)}{m} = 44 \cdot \frac{n_1}{m} \qquad (19)$$

und der andere aus der Formel

$$w = \frac{n_2 (e_2 + 0{,}5 e_3)}{m} = 9 \cdot \frac{n_2}{m} \,. \qquad (20)$$

Angenommen nun ein gewisses Leuchtgas wäre, auf ein Kilogramm bezogen, aus G_1 kg Sumpfgas, G_2 Elaylgas etc. zusammengesetzt und es würden auch die in Columnen 3 bis 6 angegebenen Werthe der Reihe nach mit dem in der Ueberschrift gegebenen Buchstaben und dem Index 1, 2 etc. bezeichnet, so berechnet sich die Constante B der Zustandsgleichung dieses Leuchtgases, welche, um Verwechselungen zu vermeiden, mit B_g bezeichnet werden mag, mit Hülfe der Formel

$$B_g = \Sigma (G B) \,. \qquad (21)$$

Ebenso findet sich die zur Verbrennung von 1 kg erforderliche Sauerstoffmenge s und die aus der Verbrennung hervorgehende Kohlensäure- und Wassermenge beziehungsweise durch

$$s = \Sigma (G s), \quad k = \Sigma (G k) \quad \text{und} \quad w = \Sigma (G w) \,, \qquad (22)$$

und endlich die specifische Wärme dieses Leuchtgases. bei constantem Drucke bez. constantem Volumen genommen:

$$c_p = \Sigma(G c_p) \quad \text{und} \quad c_v = \Sigma(G c_v) , \tag{23}$$

zu welchem Zwecke in vorstehender Tabelle aus der Tabelle S. 121 die entsprechenden Werthe wieder mit aufgeführt worden sind. Für Butylengas, für welches Beobachtungen über die specifische Wärme nicht vorliegen, sind hierbei die gleichen Werthe, wie für Elaylgas, gesetzt worden.

Für die von Grashof angenommene mittlere Zusammensetzung des Steinkohlen-Leuchtgases, nämlich:

Sumpfgas (0,54 kg), Elaylgas (0,10 kg), Butylengas (0,08 kg), Wasserstoffgas (0,05 kg), Kohlenoxydgas (0,15 kg) und Stickstoffgas (0,08 kg),

berechnet sich nach vorstehenden Formeln und mit Hülfe der Zahlenwerthe die Constante der Zustandsgleichung:

$$B_g = 60{,}823 .$$

Ferner ergiebt sich die für 1 kg Leuchtgas erforderliche Sauerstoffmenge $s = 3{,}262$ kg, die erzeugte Kohlensäuremenge $k = 2{,}286$ kg und die Wassermenge $w = 1{,}896$.

Endlich findet sich

$$c_p = 0{,}6196 \; ; \quad c_v = 0{,}4730 \; ; \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}310 . \tag{4}$$

Wird nun das vorliegende Gas mit q kg Luft gemischt und ist V das Volumen dieser Luft, so schreibt sich die Zustandsgleichung für dieselbe

$$Vp = q \,.\, B_l T ,$$

wobei für Luft $B_l = 29{,}269$ (s. S. 96) ist; für die Gewichtseinheit Leuchtgas ist dagegen

$$pv = B_g T .$$

*) Bei den Versuchen, welche Slaby in einem Aufsatze »über Gasmotoren« (Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung. 1883) veröffentlicht, hat derselbe ein Leuchtgas von der Zusammensetzung:

Sumpfgas (0,605 kg), Elaylgas (0,109 kg), Wasserstoffgas (0,127 kg), Kohlenoxydgas (0,159 kg)

benutzt.

Für dieses Leuchtgas berechnet sich $B_g = 93{,}717$, $s = 3{,}900$, $k = 2{,}256$, $w = 2{,}644$.

Die grosse Verschiedenheit, die besonders gegen den im Text berechneten Werth von B_g hervortritt, hat seinen Grund vorzugsweise in dem sehr verschiedenen Gehalt an Wasserstoffgas.

Daher folgt bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur das Verhältniss des Luftvolumens zum Leuchtgasvolumen für das vorliegende Leuchtgas:

$$\frac{V}{v} = 0{,}481 \, . \, q \, . \tag{24}$$

Da 1 kg Luft $\alpha = 0{,}2356$ kg Sauerstoff enthält, so bestimmt sich das Minimum der zur Verbrennung erforderlichen Luftmenge aus der Gleichung $q\alpha = s$ zu:

$$q = 13{,}85 \text{ kg} \, ,$$

wonach sich der Minimalwerth des Luftvolumens $V = 6{,}66 \, . \, v$ ergiebt.

Ist das vorliegende Gas mit q kg atmosphärischer Luft gemischt, wobei $q \gtreqless 13{,}85$ ist, so findet sich für die Mischung vor der Entzündung:

$$B_m = \frac{60{,}823 + 29{,}269 \, . \, q}{q + 1} \, ,$$

sowie

$$c_p{}' = \frac{0{,}6196 + 0{,}2375 \, . \, q}{q + 1} \quad \text{und} \quad c_v{}' = \frac{0{,}4730 + 0{,}1685 \, . \, q}{q + 1} \, ;$$

Dagegen ergiebt sich nach der Verbrennung, weil jetzt 2,286 kg Kohlensäure, 1,896 kg Wasser, $(0{,}2356 \, q - 3{,}262)$ kg Sauerstoff und $(0{,}7644 \, q + 0{,}08)$ kg Stickstoff vorhanden sind, unter Benutzung der auf S. 398 angegebenen Constanten:

$$B = \frac{48{,}984 + 29{,}269 \, . \, q}{q + 1} \, ,$$

sowie

$$c_p = \frac{0{,}7169 + 0{,}2375 \, . \, q}{q + 1} \quad \text{und} \quad c_v = \frac{0{,}6011 + 0{,}1685 \, . \, q}{q + 1} \, .$$

Hieraus folgt beispielsweise für das Minimum der Luftmenge $q = 13{,}85$ kg

vor der Verbrennung:

$$B_m = 31{,}394 \, , \quad c_p{}' = 0{,}2632 \, , \quad c_v{}' = 0{,}1890 \, , \quad \frac{c_p{}'}{c_v{}'} = 1{,}392 \, ,$$

nach der Verbrennung:

$$B = 30{,}597 \, , \quad c_p = 0{,}2698 \, , \quad c_v = 0{,}1976 \, , \quad \frac{c_p}{c_v} = 1{,}365 \, .$$

Die letzten Rechnungsergebnisse führen auf Sätze, die für die bei Gasmaschinen vorkommenden Rechnungen grosse Erleichterung und Vereinfachung gewähren. Obgleich hier für die Verbrennung unseres Leuchtgases das Minimum der Luftmenge vorausgesetzt wurde, so ergeben sich doch die physikalischen Constanten vor und nach der Zündung von nahezu gleicher Grösse; bei grösserer Luftmenge tritt die Gleichheit noch mehr hervor.

Beachtet man noch, dass einzelne der in die Rechnung eingeführten Grössen experimentell noch nicht sicher ermittelt sind, so darf man bis auf Weiteres bei technischen Rechnungen voraussetzen:

1) dass bei der Verbrennung des Leuchtgases in den Gasmaschinen nach vorhergegangener Mischung mit atmosphärischer Luft keine Volumenveränderungen stattfinden, vorausgesetzt die Mischungen seien nach der Verbrennung auf den anfänglichen Druck, und die anfängliche Temperatur zurückgebracht und das erzeugte Wasser in gasförmigem Zustande vorhanden;

2) dass die specifische Wärme, sowohl die bei constantem Drucke. als die bei constantem Volumen, vor und nach der Verbrennung als gleich gross vorausgesetzt werden dürfen und ihre Berechnung aus dem Mischungsverhältniss vor der Zündung erfolgen kann; und endlich

3) dass die so berechneten Werthe auch ihre Gültigkeit in dem Falle behalten, wo das Leuchtgas nicht nur mit atmosphärischer Luft, sondern auch mit Gasen gemischt ist, welche aus einer vorher stattgefundenen Verbrennung übrig geblieben sind.

Diese Sätze gelten aber unter der ausdrücklichen Voraussetzung, die vorläufig noch aufrecht erhalten werden muss, dass die specifischen Wärmen c_p und c_v der Gase unabhängig von Druck und Temperatur sind.

§ 79. Ueber den Heizwerth brennbarer Gase.

Zum Zwecke technischer Untersuchungen der hier vorliegenden Art ist es gestattet, die Versuchsresultate von Favre und Silbermann über den Heizwerth brennbarer Gase zu verwerthen, wenn auch die umfangreichen, neueren Untersuchungen von Berthelot und J. Thomsen jene älteren weit überflügelt haben; bei den

hier in Betracht kommenden Gasen liegen aber nur geringfügige Abweichungen vor.

Favre und Silbermann haben für diese Gase die Wärmemenge W beobachtet, welche bei der Verbrennung von einem Kilogramm derselben im Calorimeter frei wird.

Die Versuchswerthe W sind in Col. 2 der folgenden Tabelle angegeben.

1 Gasart	2 W cal.	3 H cal.	4 H_1 cal.	5 H_2 *) cal.
Sumpfgas....... CH_4	13063	11710	2930	2342
Elaylgas C_2H_4	11858	11090	3235	2504
Butylengas C_4H_8	?	10840	3162	2447
Wasserstoffgas .. H_2	34462	29060	3630	3229
Kohlenstoffgas .. CO	2403	2400	2100	1528

Nun hat aber Grashof (a. a. O.) die richtige Bemerkung gemacht, dass die von Favre und Silbermann angegebenen Versuchswerthe nicht die eigentlichen Heizwerthe darstellen. Da die Gase bei constantem atmosphärischen Drucke im Calorimeter verbrannt und dabei auf die anfängliche (atmosphärische) Temperatur wieder abgekühlt wurden, so wurde hierbei der entstandene Wasserdampf fast vollständig condensirt; es wurde ihm dabei eine gewisse Wärmemenge vom Calorimeter entzogen, die im Werthe W mit enthalten ist und die behufs Ermittelung der eigentlichen Heizkraft H in Abzug gebracht werden muss.

Nun ist, wie aus später folgenden Betrachtungen hervorgehen wird, die Wärmemenge, welche einem Kilogramm gesättigten Wasserdampf bei atmosphärischer Temperatur entzogen werden muss, um ihn bei constantem Drucke in Wasser zu verwandeln, rund zu 600 cal. anzunehmen; entstehen daher bei der Verbrennung von 1 kg Gas w kg Wasserdampf, so ist die betreffende Wärmemenge $600 \, . \, w$ und es folgt daher:

$$H = W - 600 \, . \, w \, .$$

Für die in vorstehender Tabelle angegebenen Gase sind die entsprechenden Werthe von w in der Tabelle auf S. 401 ent-

*) Die in der Tabelle gegebenen Werthe von H_2 weichen nur sehr geringfügig ab von den Werthen. welche Berthelot gegeben hat (Ann. de chim. et de phys. 4. Série. Bd. 22. S. 130).

halten; es liessen sich daher die in Col. 3 gegebenen Heizwerthe H, die mit den Angaben von Grashof übereinstimmen, berechnen; den für Butylengas gegebenen Werth hat Grashof durch Schätzung gewonnen.

Denkt man sich die Verbrennung durch reinen Sauerstoff bewerkstelligt und dividirt man die Heizkraft H durch das Gewicht s der Sauerstoffmenge, die auf 1 kg Gas zu rechnen ist (vergl. die Tabelle auf S. 401), so ergeben sich die Werthe H_1 in Col. 4 vorstehender Tabelle. (Bei Kohlenoxydgas ist durch 2 . 0,571 dividirt worden.)

Diese Grössen geben die Wärmemenge, auf 1 kg Sauerstoff bezogen, an. Welter hat aus den älteren Versuchen von Lavoisier und Rumford den Schluss gezogen, dass gleichen Sauerstoffmengen gleiche Wärmemengen entsprechen müssten; die Werthe H_1 müssten dann von gleicher Grösse sein; man sieht, worauf übrigens auch schon von Andern hingewiesen worden ist, dass der Welter'sche Satz keine Bestätigung findet.

Bezieht man dagegen die Heizkraft auf 1 kg Mischung von Gas und Sauerstoff, so ergeben sich die Werthe H_2 der Col. 5; sie sind hervorgegangen aus der Division von H durch $(k + w)$, welch' letztere Werthe der Tabelle auf S. 401 entnommen wurden.

Man erkennt, dass auch die Werthe H_2 kein einfaches Gesetz befolgen.

Denkt man nun an ein Gemisch von brennbaren Gasen (Leuchtgas) und bezeichnet man die in der Gewichtseinheit Mischung enthaltenen Gasgewichte, wie früher mit G_1, G_2 u. s. f. und deren Heizkraft H (der Col. 3 vorstehender Tabelle entnommen) mit H_1, H_2, H_3 u. s. f., so bestimmt sich die Heizkraft dieser Mischung

$$H = \Sigma (GH) \ . \tag{25}$$

Hieraus findet sich beispielsweise für das auf S. 403 angenommene Leuchtgas*)

$$H = 10\,113 \text{ cal.}$$

Nach den Untersuchungen in § 24 S. 126 ergab sich der

*) Für das in der Anmerkung auf S. 403 erwähnte Deutzer Leuchtgas, welches Slaby bei den von ihm berechneten Versuchen zu Grunde legte, ergiebt sich auf gleichem Wege $H = 12\,365$ cal.; für das gleiche Gas berechnet sich die specifische Wärme bei constantem Volumen $c_v = 0{,}6533$.

Wärmeinhalt J der Gewichtseinheit eines Gases oder die in Wärmeeinheiten ausgedrückte innere Arbeit U desselben:

$$J = J_0 + c_v T ,$$

wobei J_0 eine dem betreffenden Gase entsprechende Constante darstellt; im Weitern mag J kurz als die »Gaswärme« und J_0 als »Constante der Gaswärme« bezeichnet werden. Diese Constante bestimmt sich für die Gewichtseinheit eines Gemisches verschiedener Gase, wenn G_1, G_2, $G_3 \cdots$ die Gewichte der einzelnen Gase und J_0', J_0', $J_0''' \cdots$ ihre Constanten darstellen, nach Gl. 18 S. 165

$$J_0 = \Sigma(G J_0) . \tag{26}$$

Es sei nun für die Mischung eines Kilogrammes brennbarer Gase J_1 die Constante der Gaswärme, c_1 die specifische Wärme bei constantem Volumen für diese Mischung, B_1 die Constante der Zustandsgleichung; ferner seien dieselben Grössen für die Mischung nach der Verbrennung bez. mit J_2, c_2 und B_2 bezeichnet; Druck, Volumen und Temperatur seien vor der Zündung p_1, v_1 und T_1, nach der Verbrennung p_2, v_2, T_2; dann lässt sich der Vorgang der Verbrennung ganz allgemein durch Fig. 67 a. f. S. zur Anschauung bringen. Die Punkte A und B repräsentiren den Gaszustand vor und nach der Verbrennung und wenn während derselben Druck und Volumen sich, dem Verlaufe der beliebigen Curve AB entsprechend, verändert haben, so ist hierbei eine Arbeit L gewonnen worden, welche durch die Fläche $V_1 A B V_2$ dargestellt wird. Geschieht nun die Verbrennung ohne Wärmezuführung von aussen und ohne Wärmeentziehung, so ist offenbar die Gaswärme am Ende gleich derjenigen im Anfange, vermindert um die in Arbeit verwandelte Wärmemenge, also

$$J_2 + c_2 T_2 = J_1 + c_1 T_1 - A L ,$$

woraus

$$J_1 - J_2 = c_2 T_2 - c_1 T_1 + A L \tag{27}$$

folgt, während überdies noch die Beziehungen (28)

$$p_1 v_1 = B_1 T_1 \quad \text{und} \quad p_2 v_2 = B_2 T_2 \tag{29}$$

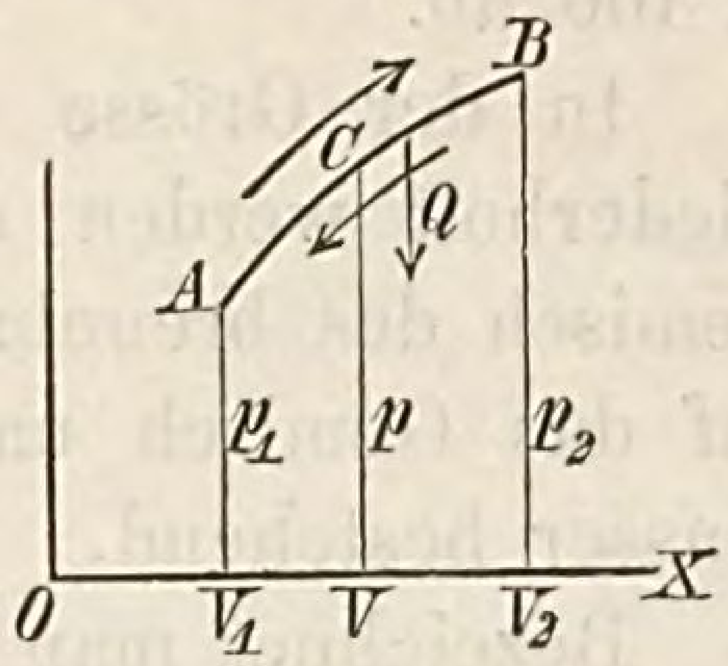
bestehen.

Es möge nun das Gasgemisch auf demselben aber umgekehrten Wege BA auf die anfänglichen Werthe von p_1 und v_1

zurückgeführt werden. Die Wärmemenge Q, welche hierbei abzuleiten ist, findet sich

$$Q = c_2(T_2 - T) + AL\,, \qquad (30)$$

Fig. 67.



wenn T die Temperatur der Mischung im Punkte A nach der Zurückführung ist.

Aus der Verbindung der Gleichung $p_1 v_1 = BT$ mit der ersten der Gln. (29) folgt übrigens

$$T = \frac{B_1}{B_2}\,T_1\,. \qquad (31)$$

Die Benutzung dieses Ausdruckes und die Elimination von AL aus den beiden Gln. (27) und (30) ergiebt dann

$$J_1 - J_2 = Q + \frac{c_2 B_1 - c_1 B_2}{B_2} \cdot T_1\,. \qquad (32)$$

Bei den Versuchen von Favre und Silbermann lag der hier erörterte Vorgang wirklich vor, nur dass dort Verbrennung und Zurückführung bei constantem Drucke p_1 erfolgte, die Curve AB also eine horizontale Gerade war.

Der hier mit Q bezeichnete Werth ist für die in der Tabelle S. 406 aufgeführten Gase mit dem Werthe H_2 der Col. 5 identisch und man kann für diese Gase, T_1 als mittlere atmosphärische Temperatur vorausgesetzt, die Differenz $J_1 - J_2$ berechnen, da aus den bekannten Mischungsverhältnissen vor und nach der Verbrennung die Werthe c_1 und c_2 sowie B_1 und B_2 sich bestimmen lassen. Unter der Voraussetzung, dass das betreffende Gas mit reinem Sauerstoff verbrennt, finden sich unter Zugrundelegung der Angaben in der Tabelle auf S. 401 und der Tabelle auf S. 121 die in der folgenden Zusammenstellung angegebenen Werthe:

Gasart	c_1	c_2	B_1	B_2	$J_1 - J_2$
Sumpfgas	0.2177	0.2607	31.74	31.74	2355
Elaylgas	0.1952	0.2292	27.31	27.31	2514
Butylengas	0.1952	0.2292	23.90	27.27	2449
Wasserstoffgas	0.4059	0.3695	70.42	46.95	3272
Kohlenoxydgas	0.1669	0.1718	28.80	19.20	1551

Die Werthe $J_1 - J_2$ der letzten Columne sind nach Gl. (32) für die mittlere Temperatur $t_1 = 20$, also für $T_1 = 293^\circ$ berechnet worden und weichen nur wenig von den Werthen H_2 auf S. 406 ab.

In der Grösse $(J_1 - J_2)$ bedeutet das erste Glied J_1, wie wiederholt werden mag, die Constante der Gaswärme für das Gemisch des brennbaren Gases mit Sauerstoff und J_2 bezieht sich auf das Gemisch nach der Verbrennung, aus Kohlensäure und Wasser bestehend.

Bezeichnet man nun diese Constante für das betreffende Gas mit J_0, sowie für Sauerstoff, Kohlensäure und Wasser bez. mit J_s, J_k und J_w, so bestehen nach Gl. (26) folgende Beziehungen, wenn, wie das bei der Berechnung der Tabelle S. 401 angenommen worden, auf 1 kg Gas s kg Sauerstoff kommen und daraus k kg Kohlensäure und w kg Wasser resultiren:

$$\left.\begin{aligned}(1 + s)J_1 &= J_0 + sJ_s \\ (1 + s)J_2 &= kJ_k + wJ_w\end{aligned}\right\} . \qquad (33)$$

Die Differenz ergiebt dann für das betreffende Gas:

$$J_0 = (1 + s)(J_1 - J_2) + kJ_k + wJ_w - sJ_s \,. \qquad (34)$$

Wären daher die Werthe J_k, J_w und J_s bekannt, so liesse sich für alle Gase von der Zusammensetzung $(C_{n_1} H_{n_2} O_{n_3})$ die Constante berechnen.

Bezüglich dieser Frage liegt nur ein Versuch der Lösung vor und zwar von Nordenskiöld*); aus den Versuchsresultaten von Favre und Silbermann über die Verbrennungswärme organischer Flüssigkeiten von vorstehender Zusammensetzung hat derselbe, allerdings unter der hypothetischen Voraussetzung, dass die Verbrennungswärme dieser Flüssigkeiten dem specifischen Gewichte derselben umgekehrt proportional sei, folgende Werthe für diese Constante J_0 gefunden:

für Sauerstoff: $J_s = 7317$ cal. ,
Kohlensäure: $J_k = 4312$ cal. ,
Wasserdampf: $J_w = 7275$ cal. .

Unter Zuhülfenahme dieser Werthe hat sich mir dann nach

*) Poggendorff's Annalen. Bd. 109. 1860 S. 184. S. auch Wüllner, Lehrbuch der Experimentalpysik. Bd. 3.

Gl. (34) mit Benutzung der entsprechenden Werthe der Tabellen auf S. 401 und 409 ergeben für:

$$\begin{aligned} CH_4 : J_0 &= 10\,734 \;, \\ C_2H_4 : \quad & \ \ 8\,997 \;, \\ C_4H_8 : \quad & \ \ 8\,706 \;, \\ H : \quad & \ 36\,387 \;\; [H_2 = 72\,774] \;, \\ CO : \quad & \ \ 5\,030 \;, \end{aligned}$$

wonach sich dann auch für jedes Gemisch dieser Gase die Constante J_0 berechnen liesse.

Eine genaue Bestimmung der betrachteten Grösse wäre für die weitere Ausbildung der Thermodynamik von grosser Bedeutung; vorerst sind die von Nordenskiöld gegebenen und die im Vorstehenden daraus abgeleiteten Werthe noch als hypothetische anzusehen.

§ 80. Thermodynamische Gleichungen für den Verbrennungsprocess eines Gases.

Ist die Gewichtseinheit eines brennbaren Gases mit s kg Sauerstoff, d. h. gerade mit so viel desselben gemischt, als zur vollständigen Verbrennung erforderlich ist, und besteht das Product aus k kg Kohlensäure und w kg Wasser, so wird in einem bestimmten Augenblicke z. B. im Punkte C der Verbrennungscurve AB (Fig. 67), in welchem soeben x kg Gas verbrannt ist, das Gesammtgewicht $1 + s = k + w$ kg der Gasmischung bestehen aus: $(1 - x)$ kg Gas, $(1 - x)s$ kg Sauerstoff; kx kg Kohlensäure und wx kg Wasserdampf; für diese Mischung liesse sich dann auf die angegebene Weise die specifische Wärme c_x bei constantem Volumen und die Constante B_x der Zustandsgleichung und dann aus dieser Gleichung selbst für gegebenen Werth des Druckes p und des Volumens v die Temperatur berechnen.

Die Constante J_x der Gaswärme (der Mischung) bestimmt sich dann, wenn J_0 für das brennbare Gas selbst gilt, aus der Beziehung:

$$(1 + s)\,J_x = (1 - x)\,J_0 + (1 - x)\,sJ_s + kx\,J_k + wx\,J_w$$

oder

$$(1 + s) J_x = J_0 + s J_s + (k J_k + w J_w) x - (J_0 + s J_s) x$$

und unter Berücksichtigung der Gln. (33)

$$J_x = J_1 - (J_1 - J_2) x \ . \tag{35}$$

Diese Formel gilt auch, wenn dem brennbaren Gase im Anfange neben Sauerstoff noch ein indifferentes Gas beigemischt ist; nur muss soviel Sauerstoff vorhanden sein, als zur Verbrennung des ganzen Gases nothwendig ist; der etwaige überschüssige Sauerstoff würde dann dem indifferenten Gase beizuzählen sein; wäre i kg solchen Gases vorhanden und J_i dessen Constante, so wäre statt Gl. (33) zu schreiben

$$\left.\begin{aligned} (1 + s + i) J_1 &= J_0 + s J_s + i J_i \ , \\ (1 + s + i) J_2 &= k J_k + w J_w + i J_i \ . \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Für den in Betracht gezogenen Punkt C der Verbrennungscurve AB (Fig. 67) findet sich auf gleichem Wege die specifische Wärme c_x bei constantem Volumen, sowie die Constante B_x der Zustandsgleichung:

$$c_x = c_1 - (c_1 - c_2) x \tag{37}$$

$$B_x = B_1 - (B_1 - B_2) x \ , \tag{38}$$

und die Zustandsgleichung der Mischung in diesem Augenblicke wäre:

$$p v = \left[B_1 - (B_1 - B_2) x\right] T \tag{39}$$

bei der zugehörigen Temperatur T.

Denkt man an die Gewichtseinheit Gasmischung, so ist der Wärmeinhalt im Punkte C der Curve AB durch $J_x + c_x T$, dagegen im Anfange durch $J_1 + c_1 T_1$ gegeben; die Differenz ergiebt die Zunahme des Wärmeinhaltes, wenn man die Gln. (35) und (37) benutzt,

$$c_1 (T - T_1) - \left[J_1 - J_2 + (c_1 - c_2) T\right] x \ .$$

Wenn man den Klammerausdruck, der als eine einfache Temperaturfunction hervortritt, da die constanten Grössen J_1, J_2, c_1 und c_2 für den vorgelegten Fall bekannt sind, mit ϱ bezeichnet, also

$$\varrho = J_1 - J_2 + (c_1 - c_2) T \tag{40}$$

substituirt, so würde für die gesammte Zunahme zu setzen sein

$$c_1 (T - T_1) - \varrho x .$$

Wäre nun während der Verbrennung, d. h. während der entsprechenden chemischen Umänderung, auf dem Wege AC der Curve AB der Masse von aussen her noch die Wärmemenge Q mitgetheilt und hierbei die äussere Arbeit AL gewonnen worden, so bestände die Beziehung

$$Q = c_1 (T - T_1) - \varrho x + AL ,$$

oder wenn man zum Differential übergeht:

$$dQ = c_1 dT - d(\varrho x) + Apdv , \tag{41}$$

wobei die Function ϱ durch Gl. (40) gegeben ist.

Die vorstehende Gleichung bildet das Resultat eines Versuches, die Grundgleichung der Thermodynamik für Gase auf den Fall zu erweitern, dass zugleich chemische Zustandsänderungen vorliegen. Fände eine Verbrennung während der Wärmezuführung nicht statt, so wäre $x = 0$ und constant; dann gelangt man wieder auf die Gleichung, wie sie auf S. 127 hingestellt worden ist. Dem ganzen Baue nach ist übrigens die vorstehende Formel mit derjenigen identisch, welche die später folgenden Untersuchungen für die Wärmemenge ergeben werden, welche zur Verdampfung von Flüssigkeiten erforderlich ist, mit dem einzigen Unterschiede, dass dort das zweite Glied der rechten Seite positiv erscheint.

Gl. (41) lässt sich übrigens durch Verbindung mit Gl. (39) leicht in andere Formen überführen.

Die explosionsartige Verbrennung der Gase findet fast ausnahmslos ohne Zu- und Ableitung von Wärme statt; es ist demnach $dQ = 0$, und Gl. (41) ergiebt dann

$$d(\varrho x) = c_1 dT + Apdv . \tag{42}$$

Es finde beispielsweise die Verbrennung eines Gases bei constantem Volumen statt; die Anfangstemperatur sei T_1, die Endtemperatur T_2. Bei vollständiger Verbrennung ist am Ende $x = 1$ (im Anfange $x = 0$). Die vorstehende Gleichung giebt daher, wegen $dv = 0$, durch Integration

$$\varrho_2 = c_1 (T_2 - T_1) ,$$

oder unter Benutzung von Gl. (40)

$$c_2 T_2 = J_1 - J_2 + c_1 T_1 . \tag{α}$$

Hieraus berechnet sich die Endtemperatur T_2 und nach den Gln. (29) S. 408

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{T_2}{T_1} . \tag{β}$$

So findet sich z. B. unter Benutzung der in der Tabelle auf S. 409 angegebenen Werthe, wenn man die Anfangstemperatur $t_1 = 20^\circ$ C., also $T_1 = 293^\circ$ voraussetzt, für Wasserstoff-Knallgas (Wasserstoff-Sauerstoff)

$$T_2 = 9177^\circ, \quad t_2 = 8884^\circ \text{ C. und } \frac{p_2}{p_1} = 20{,}88 .$$

Dagegen für Kohlenoxyd-Knallgas (Kohlenoxyd-Sauerstoff)

$$T_2 = 9312^\circ, \quad t_2 = 9036^\circ \text{ C. und } \frac{p_2}{p_1} = 21{,}21 .$$

In beiden Fällen würde demnach in Folge der Explosion bei constantem Volumen der Druck auf etwa 21 Atmosphären steigen, wenn Anfangs der atmosphärische Druck vorlag.

Nun hat aber Bunsen durch Versuche gefunden, dass bei Wasserstoff-Knallgas das Druckverhältniss $p_2 : p_1$ sich nur auf 9,6 einstellt, bei Kohlenoxyd-Knallgas wird für dieses Verhältniss 10,3 angenommen.

Will man sich vorübergehend die Annahme gestatten, dass diese Abweichungen darin ihren Grund haben, dass bei der Explosion nicht alles Gas zur Verbrennung gelangte, statt 1 kg nur x kg, so ergiebt sich aus Gl. (39)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left[1 + \frac{B_1 - B_2}{B_1} \cdot x\right] \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

die Integration von Gl. (42) giebt

$$\left[J_1 - J_2 + (c_1 - c_2)\, T_2\right] x = c_1 (T_2 - T_1) ,$$

und aus der Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn man das Druckverhältniss auf Grund der Versuche substituirt, für Wasserstoff-Knallgas:

$$x = 0{,}276 , \quad T_2 = 2576^\circ, \quad \text{also } t_2 = 2303^\circ \text{ C.}$$

und für Kohlenoxyd-Knallgas

$$x = 0{,}271 , \quad T_2 = 2769^\circ, \quad \text{also } t_2 = 2496^\circ \text{ C.}$$

Es würde hiernach in beiden Fällen nur etwa 27 % des Gases zur Verbrennung gelangen und die Verbrennungstemperatur den Werth 2600° C. kaum erreichen.

Man erklärt aber die Erscheinungen nicht aus der unvollkommenen Verbrennung, sondern durch den Vorgang der Dissociation. Die Rechnungsergebnisse wären nur anzuerkennen, wenn die Dissociation auf die vor der Verbrennung vorhandenen Gase zurückführte.

Glücklicher Weise hat man es bei den Gasmaschinen nicht mit den vorgelegten einfachen Gasen zu thun; in Rücksicht auf die erwähnten zur Zeit noch nicht völlig aufgeklärten Vorgänge mag daher eine weitere Verwendung der im Vorstehenden entwickelten Formeln auf einfache Verbrennungsgase unterbleiben und auf den Fall übergegangen werden, der speciell bei der Verbrennung von Leuchtgas mit beigemischter atmosphärischer Luft vorliegt.

Hier fand sich nach den Schlusssätzen in § 78 S. 405, dass die specifischen Wärmen und die Constante der Zustandsgleichung vor und nach der Verbrennung gleich gross angenommen werden dürfen; setzt man daher, um zugleich auf die ursprüngliche Bezeichnungsweise zurückzukehren, in allen vorstehenden Entwickelungen $c_1 = c_2 = c_v$ und $B_1 = B_2 = B$, so giebt zunächst Gl. (32)

$$J_1 - J_2 = Q\,,$$

und da Q dort vorübergehend die auf 1 kg der gesammten Gasmischung bezogene Wärmemenge bezeichnete, so wäre, wenn H die Heizkraft von 1 kg Leuchtgas darstellt und dieses mit q kg Luft gemischt sein mag:

$$J_1 - J_2 = \frac{H}{1+q}\,.$$

Ferner ergiebt Gl. (40) $\varrho = J_1 - J_2$; diese Grösse tritt also nicht mehr als eine Temperaturfunction auf, sondern erscheint als eine constante Grösse und zwar wäre nun

$$\varrho = \frac{H}{1+q}\,. \tag{43}$$

Die Grundgleichung (41) schreibt sich dann weiter in der Form

$$dQ + \varrho dx = c_v dT + Apdv\,, \tag{44}$$

wobei nach Gl. (39) die Zustandsgleichung wieder in der einfachen Form

$$pv = BT \tag{45}$$

hervortritt. Aus Gl. (44) ist ersichtlich, dass die durch Verbrennung von dx kg Leuchtgas frei werdende Wärme ϱdx so aufgefasst werden darf, als würde sie der Gasmischung von aussen zugeführt, ohne dass in der Gasmischung chemische Vorgänge erfolgen.

Dieser Satz ist bei Besprechung von Gasmaschinen schon vielfach, aber ohne weitern Beweis seiner Zulässigkeit, benutzt worden; man erkennt aber jetzt, dass er nur näherungsweise richtig ist und nur unter den hier gemachten Voraussetzungen, nämlich bei brennbaren Gemischen (Leuchtgas) mit Beimischung von Luft im Ueberschuss und anderen indifferenten Gasen angewendet werden darf.

Die Gl. (44) lässt sich in Verbindung mit Gl. (45) auf der rechten Seite leicht in die Formen überführen, die früher auf S. 127 gegeben worden sind.

Ist der Verlauf der Verbrennungscurve AB (Fig. 67 S. 409) gegeben, so ist Gl. (44) sofort integrabel.

Um sogleich einen Fall zu behandeln, der unendlich viele Einzelfälle umschliesst, mag eine polytropische Curve, deren Gesetz durch $pv^n = p_1 v_1{}^n$ gegeben war, wenn n eine beliebige Constante ist, als Verbrennungscurve vorausgesetzt werden; hier ergiebt die Gl. (44) sogleich (vergl. S. 142 u. f.)

$$dQ + \varrho dx = c\,dT\,,$$

wobei die entsprechende specifische Wärme c durch den Ausdruck

$$c = \frac{n - \varkappa}{n - 1}\, c_v$$

(s. S. 143) gegeben ist. Die vorhergehende Formel lässt sich aber integriren; man erhält, da bei vollständiger Verbrennung des Gases $x = 1$ ist (Anfangs ist $x = 0$),

$$Q + \varrho = c\,(T_2 - T_1)\,. \tag{46}$$

Dabei ist Q die Wärmemenge, welche der Gewichtseinheit Mischung während der Verbrennung (Explosion) von aussen zugeführt wird; die Constante ϱ ist aus Gl. (43) bekannt. Ohne

Mittheilung von Wärme ist natürlich $Q = 0$; bei den Gasmaschinen dagegen, wo die Explosion in einem Cylinder stattfindet, dessen Wandungen durch kaltes Wasser gekühlt werden, wäre Q negativ in Rechnung zu stellen; würde die Verbrennung eine unvollständige sein und würden hierbei nur x kg Gas verbrennen ($x < 1$), so wäre ϱx an Stelle von ϱ zu setzen.

Gl. (46) dient nun dazu, aus der Anfangstemperatur T_1 die Endtemperatur T_2 zu berechnen; dann folgt nach den Gleichungen auf S. 144

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{und} \quad \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{47}$$

womit die gewöhnlich gestellten Fragen beantwortet wären, sofern nur die Verbrennungscurve als polytropische Curve angesehen werden darf. Bemerkenswerth ist noch, dass hier auch alle Sätze in Gültigkeit treten, welche früher über die »Abbildung« der Druckcurve gegeben worden sind (vergl. S. 66 und 149); auf diese technisch wichtige Frage wird zurückzukommen sein.

Wird in dem, im Vorstehenden behandelten Falle angenommen, die Explosion finde bei constantem Volumen statt, so ist in allen Formeln $n = \infty$ und $c = c_v$ zu setzen; bei der Verbrennung unter constantem Drucke dagegen ist $n = 0$ und $c = c_p$ zu substituiren.

Beispiel. Das Leuchtgas, für welches auf S. 407 der Heizwerth $H = 10\,113$ cal. gefunden wurde, möge mit $q = 19$ kg Luft bei constantem Volumen zur Explosion gelangen; hier ergiebt sich nach den auf S. 396 gegebenen Formeln für die Mischung vor der Explosion:

$$B = 30{,}846\,; \quad c_p = 0{,}2566\,; \quad c_v = 0{,}1837\,; \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}397$$

und nach Gl. (43)

$$\varrho = 505{,}7\ .$$

Bei vollständiger Verbrennung und $Q = 0$ folgt für die Anfangstemperatur $t_1 = 20^\circ$ C. oder $T_1 = 293$, ferner wegen $c = c_v$ aus Gl. (46)

$$T_2 = 3046^\circ \quad \text{oder} \quad t_2 = 2773^\circ \text{ C.}$$

und nach Gl. (47) das Druckverhältniss

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 10{,}4\ .$$

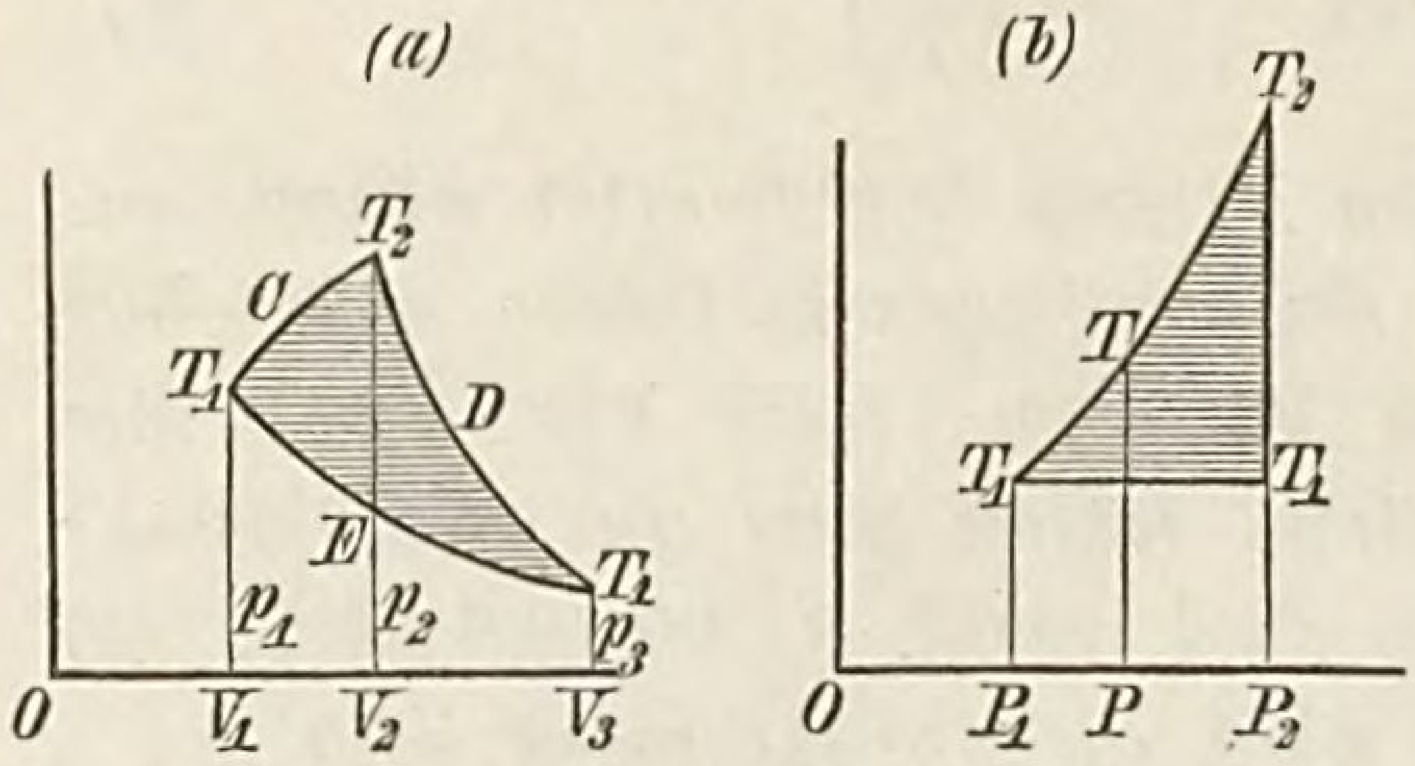
Diese Resultate weichen nur bezüglich der Verbrennungstemperatur T_2 von denen ab, wie sie bei Gasmaschinen vorliegen; denkt man aber daran, dass Wärmeableitung und möglicher Weise auch keine vollständige Ver-

brennung stattfindet, so dürften die Ergebnisse wenigstens die Ansicht bestätigen, dass bei den Gasmaschinen eine Dissociation **nicht** anzunehmen ist*).

Zu der Voraussetzung zurückkehrend, dass die Verbrennungscurve eine polytropische Curve sei, mag jetzt für die Gewichtseinheit der Mischung derjenige Arbeitsprocess untersucht werden, der auf S. 387 unter Zugrundelegung von Fig. 65 besprochen worden ist.

Es sei in Fig. 68a die Verbrennungscurve durch $T_1\,C\,T_2$ dargestellt; legt man durch den Endpunkt die adiabatische Curve $T_2\,D\,T_1$ und durch den Anfangspunkt die isothermische Curve $T_1\,E\,T_1$ bis zu ihrem Durchschnitte mit der adiabatischen Linie, so erhält man einen Arbeitsprocess, welcher oben S. 387 für die angenommene Verbrennungscurve als der vortheilhafteste betrachtet worden ist. Das entsprechende Indicatordiagramm wird durch ein Curvendreieck gebildet und zwar fallen **hier** die in Fig. 65 S. 387 mit a und e bezeichneten Punkte zusammen.

Fig. 68.



In Fig. 68b ist die Abbildung dieses Indicatordiagrammes skizzirt; $T_1\,T\,T_2$ ist die Abbildung der Verbrennungscurve $T_1\,C\,T_2$ und zwar dadurch gewonnen, dass die augenblicklich stattfindende Temperatur T als Ordinate und als Abscisse das Wärmegewicht P nach der Gl. (13) S. 151,

$$P = \frac{c}{A} \operatorname{logn} T\ ,$$

aufgetragen worden ist. Die verticale Strecke $T_2\,T_1$ ist die Abbildung der Adiabaten und $T_1\,T_1$ die der Isothermen, wobei vorausgesetzt wurde, dass die Verbrennung ohne Zu- und Ableitung von Wärme erfolgt. Die ganze bei der Verbrennung frei gewordene Wärme ist dann, in Arbeit gemessen, durch die Fläche $P_1\,T_1\,T\,T_2\,P_2$ dargestellt, welche von der Curve $T_1\,T\,T_2$ umschlossen wird, und zwar findet sich für dieselbe

*) Mallard und Le Chatelier fanden, dass eine merkliche Dissociation nicht vorliege, so lange bei Kohlensäure die Temperatur unter 1800°, bei Wasserdampf unter 2000° betrage. Annales des Mines. t. IV. 1883. p. 456.

$$\int T dP = \int \frac{c}{A} dT = \frac{c(T_2 - T_1)}{A} = \frac{\varrho}{A} \cdot \qquad (48)$$

Die durch den Arbeitsprocess gewonnene Arbeit L wird dagegen durch den schraffirten Theil der Fläche repräsentirt; zur Bestimmung derselben hat man von der ganzen Fläche die Rechteckfläche $P_1 T_1 T_1 P_2$ zu subtrahiren, ihr Inhalt ist

$$(P_2 - P_1) T_1 = \frac{c T_1}{A} \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1},$$

und daher ist die in Wärmeeinheiten ausgedrückte Arbeit

$$A L = c\left(T_2 - T_1 - T_1 \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1}\right) \cdot \qquad (49)$$

Genau dieselben Resultate hätte man auch direct aus Fig. 68a ableiten können; die dem Curvenverlaufe $T_1 C T_2$ entsprechende äussere Arbeit L_1 bestimmt sich nach Gl. (4) S. 144 durch

$$A L_1 = (c - c_v)(T_2 - T_1),$$

und die Arbeit L_2, welche während der adiabatischen Expansion gewonnen wird, durch

$$A L_2 = c_v (T_2 - T_1).$$

Die Addition beider Werthe giebt

$$A(L_1 + L_2) = c(T_2 - T_1) = \varrho .$$

Es liegt daher hier, wo eine polytropische Curve als Verbrennungscurve vorausgesetzt worden ist, das eigenthümliche Resultat vor, dass die ganze Fläche $V_1 T_1 T_2 T_1 V_3$, ebenfalls in Arbeit ausgedrückt, die bei der Verbrennung frei werdende Wärme (auf 1 kg Mischung bezogen) repräsentirt.

Der Werth L, durch Gl. (49) bestimmt, bezieht sich auf 1 kg Mischung; da nun $(q + 1)$ kg Mischung auf 1 kg Leuchtgas kommen, so berechnet sich der Arbeitswerth L_0 der Gewichtseinheit Leuchtgas aus:

$$A L_0 = c(q + 1)\left[T_2 - T_1 - T_1 \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1}\right], \qquad (50)$$

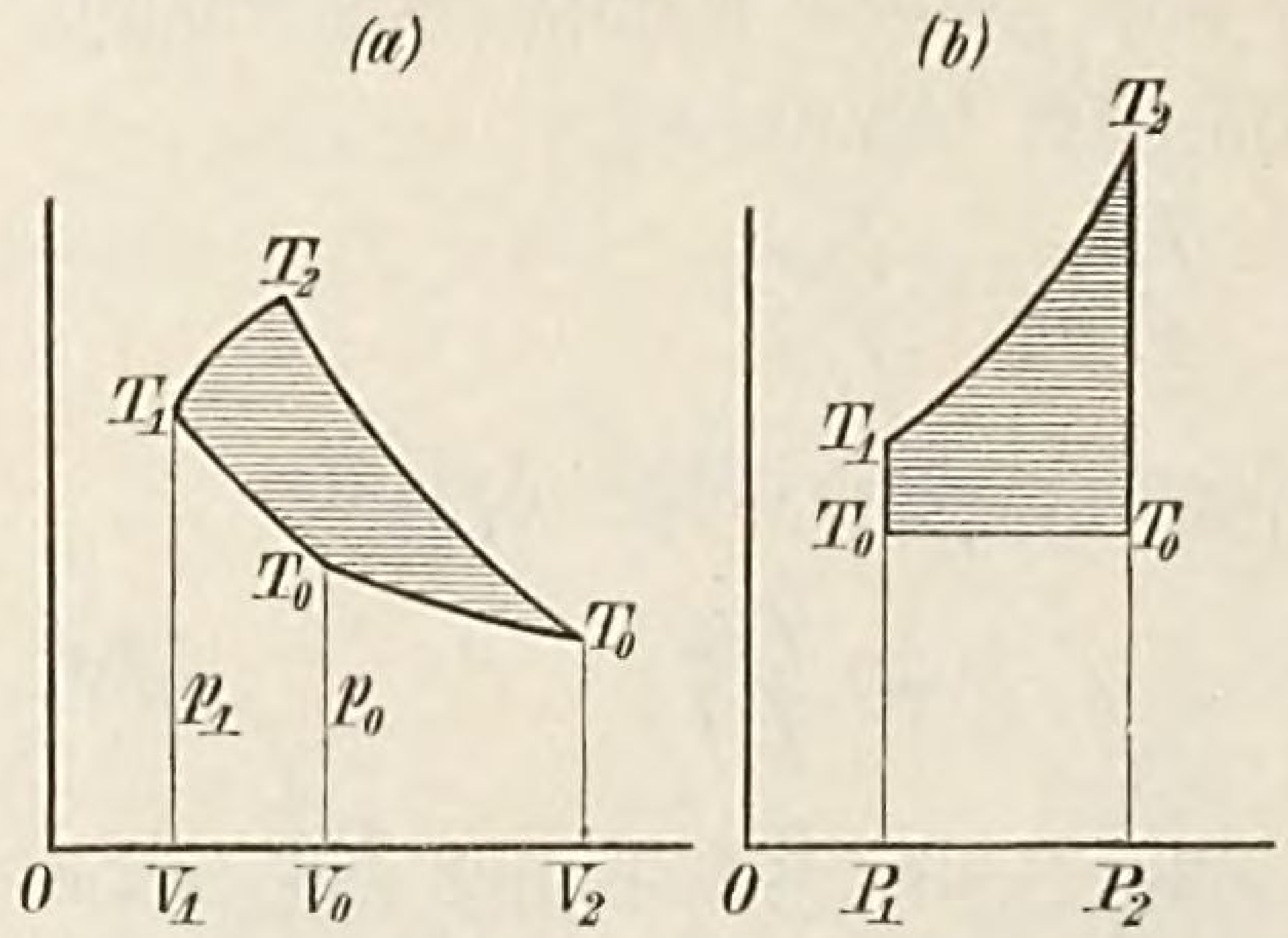
während der Heizwerth desselben nach Gl. (43)

$$H = \varrho(q + 1) = c(q + 1)(T_2 - T_1)$$

beträgt.

Setzt man, um die Frage zu verallgemeinern, voraus, dass vor der Zündung die Mischung erst adiabatisch comprimirt werde, dass also der durch Fig. 69a und b dargestellte Fall vorliege, so führen sich die Rechnungen aus, wie folgt:

Fig. 69.



Es sei p_0 und T_0 Druck und Temperatur im Anfange, p_1 und T_1 gelten für das Ende der Compression; die Endtemperatur nach der Verbrennung, die wieder nach einer beliebigen polytropischen Curve erfolge, sei T_2; dann ist

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \mu\,, \tag{51}$$

welches Verhältniss μ sich berechnen lässt, wenn die Pressungen p_1 und p_0 als gegeben angesehen werden.

Auf demselben Wege, wie vorhin, bestimmt sich unter Zuhülfenahme der Abbildung Fig. 69b der Arbeitswerth L_0 der Gewichtseinheit Leuchtgas durch:

$$A L_0 = c(q + 1)\left[T_2 - T_1 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1}\right] \tag{52}$$

und wie vorhin der Heizwerth:

$$H = c(q + 1)(T_2 - T_1)\,. \tag{53}$$

Aus Gl. (51) ermittelt sich T_1, aus Gl. (53) T_2 und dann aus Gl. (52) der gesuchte Arbeitswerth.

Durch Division der beiden letzten Formeln ergiebt sich

$$\frac{A L_0}{H} = 1 - \frac{T_0}{T_2 - T_1} \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1}\,. \tag{54}$$

Setzt man vorübergehend unter Beachtung von Gl. (53)

$$\frac{T_2 - T_1}{T_0} = \frac{H}{c(q + 1)\,T_0} = z\,,$$

so folgt

$$\frac{A L_0}{H} = 1 - \frac{1}{z} \operatorname{logn}\left(1 + \frac{z}{\mu}\right)\,.$$

Das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung soll nun so klein als möglich oder z so gross als möglich sein und das ist der Fall, wenn man den Werth $c(q + 1)$ möglichst klein macht. Ich schliesse daraus,

1) dass die Explosion mit der geringsten noch zulässigen Luftmenge erfolgen soll und
2) dass diejenige polytropische Curve als Verbrennungscurve gewählt werden soll, welche auf den kleinsten Werth von c führt; diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn die Explosion des Leuchtgases in unsern Maschinen bei constantem Volumen erfolgt, wie das bei den neueren Maschinen in der That nahezu der Fall ist.

Es wäre demnach der Arbeitswerth der Gewichtseinheit Leuchtgas durch die Formel

$$AL_0 = c_v(q + 1)\left[T_2 - T_1 - T_0 \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_1}\right] \qquad (52\,\text{a})$$

zu berechnen, wobei

$$H = c_v(q + 1)(T_2 - T_1) \qquad (53\,\text{a})$$

und

$$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

zu setzen ist.

Beispiel. Für das oben (S. 403) angenommene Leuchtgas war $H = 10\,113$ cal. Ist die Anfangstemperatur $t_0 = 20^\circ$ C. oder $T_0 = 293$ und kommen auf 1 kg Gas $q = 19$ kg atmosphärische Luft, so ist wegen $c_v = 0{,}1837$ (S. 417), wenn zunächst Compression nicht vorliegt, $T_0 = T_1 = 293^\circ$, nach Gl. (53a) $T_2 = 3046^\circ$ und hiernach der Arbeitswerth des Leuchtgases

$$AL_0 = 7593 \text{ cal. oder } L_0 = 3\,219\,430 \text{ mkg.}$$

Wäre dagegen die Mischung vor der Explosion von $p_0 = 1$ auf $p_1 = 3$ Atmosphären comprimirt worden, so wäre nach Gl. (51) $T_1 = 1{,}376\ T_0 = 403^\circ$, dann nach Gl (53a) $T_2 = 3156^\circ$. Hieraus findet sich

$$AL_0 = 7898 \text{ cal. oder } L_0 = 3\,348\,750 \text{ mkg.}$$

Aus der Zustandsgleichung des Gases $pv = BT$ findet sich, weil für dasselbe $B = 60{,}823$ (S. 403) ist, für atmosphärische Pressung $p = 10\,333$ kg und für die Temperatur von 20° C. das specifische Volumen $v = 1{,}7247$; das specifische Volumen der atmosphärischen Luft ist 0,8299 bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur; bei $q = 19$ kg ist daher das beigemischte Luftvolumen $V = 15{,}7681$, wonach auf 1 cbm Gas 9,14 cbm Luft ge-

rechnet worden sind. Hiernach liesse sich leicht der Arbeitswerth für die Volumeneinheit des Gases oder der entsprechenden Mischung von Gas und Luft bestimmen.

Dass der Arbeitswerth von einem Kilogramm Leuchtgas beträchtlich grösser als derjenige ausfällt, welcher oben S. 390 für ein Kilogramm Steinkohlen im Mittel gefunden wurde, ist erklärlich, denn man müsste bei Gasmaschinen, wenn man solche mit Dampfmaschinen vergleichen wollte, eigentlich diejenige Steinkohlenmenge in Rechnung stellen, welche zur Erzeuguug des Leuchtgases verbraucht wird.

Setzt man nach dem auf S. 390 berechneten Beispiele den Arbeitswerth der Steinkohle zu 2884 cal., dagegen für Leuchtgas nach vorstehendem Falle (Anfangscompression vorausgesetzt) 7898 cal., so ist der letztere Werth das 2,74fache des erstern; da man bei den besten Dampfmaschinen stündlich 1 kg Steinkohlen auf eine Pferdestärke, indicirt, rechnen kann, so käme bei einer Gasmaschine von gleicher Güte 0,365 kg oder 0,63 cbm Gas stündlich auf eine indicirte Pferdestärke, während man in Wirklichkeit bei den besten Otto'schen Gasmaschinen etwa 1 cbm, bei grossen Maschinen 0,75 cbm Gas rechnet. Wenn auch die Unterlagen vorstehender Rechnungen noch viele Unsicherheiten enthalten und nur als Näherungswerthe angesehen werden dürfen, so wird doch das Schlussresultat des angestellten Vergleiches wohl nur wenig von der Wahrheit abweichen; man darf vielleicht in demselben bis zu gewissem Grade eine Bestätigung der neu entwickelten Sätze über den Arbeitswerth der Brennstoffe und der oben gegebenen Theorie des Verbrennungsprocesses explosibler Gase erblicken.

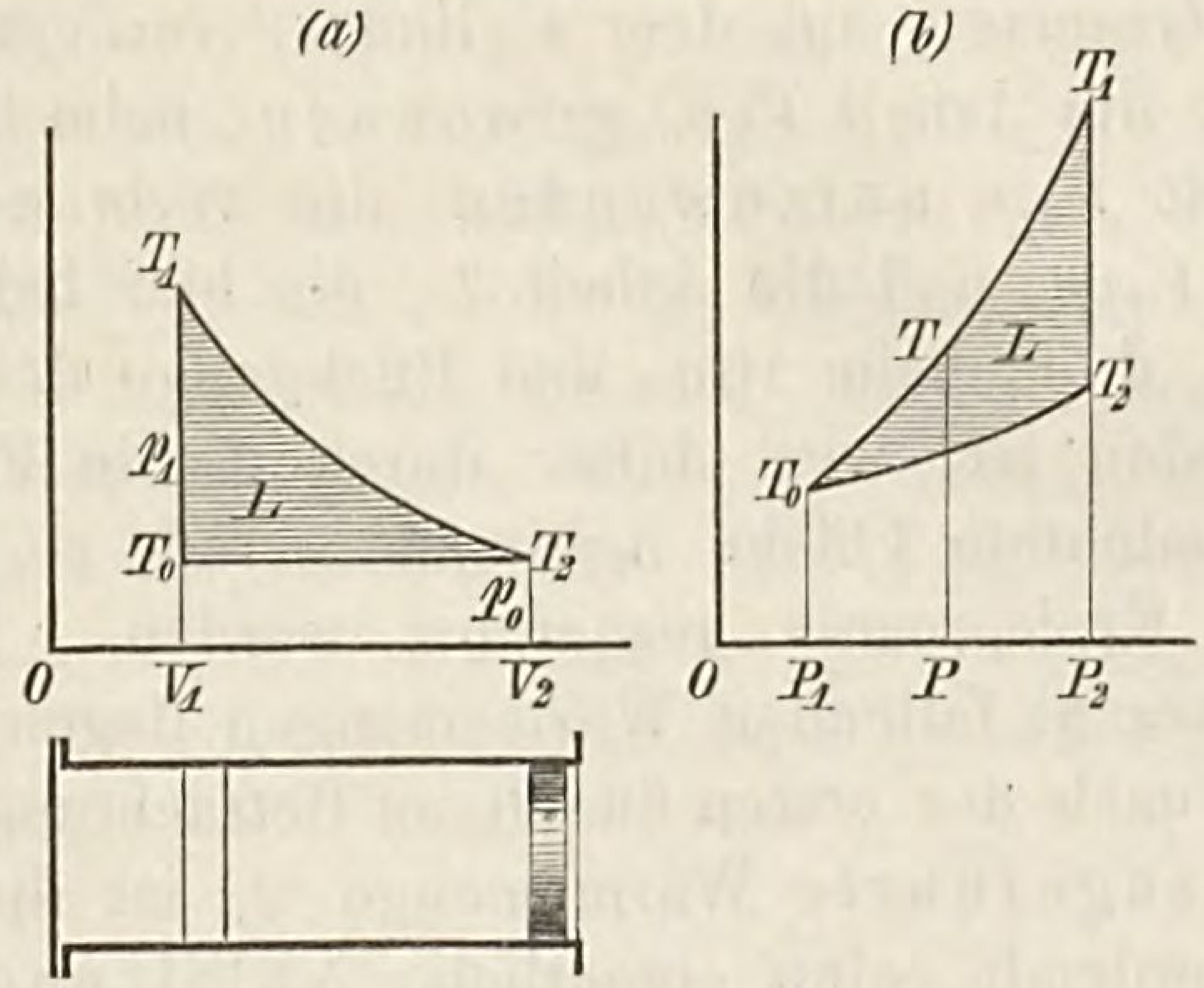
§ 81. Betrachtung ausgeführter Gasmaschinen.
System Lenoir.

Obgleich schon mehrere Jahrzehnte vorher verschiedene Vorschläge zur Construction von Gasmaschinen gemacht wurden, so ist doch erst im Jahre 1860 von Lenoir eine Maschinenanordnung angegeben worden, die als Vorläufer aller Constructionen der neuern Zeit anzusehen ist. Es ist hier nicht der Ort, die verschiedenen Systeme der in Vorschlag gekommenen Gasmaschinen*)

*) Vergl. Schöttler, »Die Gasmaschine«. Versuch der Darstellung

zu besprechen, die Untersuchungen sollen sich vielmehr darauf beschränken, nach den oben entwickelten Sätzen und Formeln an den wichtigsten Beispielen den Arbeitsprocess solcher Maschinen zu verfolgen. Für die in Absicht liegenden Betrachtungen würde es hinreichen, sogleich den vollkommensten Gasmotor der heutigen Zeit, die Maschine von Otto, zu untersuchen, weil aus den betreffenden Ergebnissen sich dann leicht Schlüsse auf die andern Maschinensysteme ziehen lassen; es möge aber doch vorerst die Maschine von Lenoir in Betracht gezogen werden, wenn auch dieselbe technisch ein Interesse nicht mehr bietet; die Besprechung ihres Arbeitsprocesses giebt aber die beste Gelegenheit, einige Voruntersuchungen zu erledigen, auf die dann im Weitern einfach zurückverwiesen werden kann.

Fig. 70.



Denke man sich, im Cylinder einer Lenoir'schen Maschine stehe der Kolben am linken Ende und sauge, während er den Raum $O V_1$ (Fig. 70 a) zurücklegt, G kg Gemisch von Leuchtgas und atmosphärischer Luft an und zwar bei constantem atmosphärischen Drucke p_0 und der Temperatur T_0; der Druck p_0 ist in der Figur durch die Ordinate $V_1 T_0$ dargestellt; nach Zurücklegung des Raumes V_1 finde die Absperrung und die Zündung statt; nimmt man an, die Verbrennung sei in einem Augenblicke vollendet und die Cylinderwandungen verhielten sich hierbei und im ganzen

ihrer Entwickelung und ihres Kreisprocesses. Braunschweig und Leipzig 1882. — G. Richard, Les Moteurs à Gaz. Paris, Dunod 1885.

weiteren Verlaufe der noch zu besprechenden Vorgänge vollständig indifferent, so wird der Druck $V_1 T_0 = p_0$ (Fig. 70a) plötzlich auf den Werth $V_1 T_1$ anwachsen; der betreffende Druck sei mit p_1 und die zugehörige Temperatur mit T_1 bezeichnet; nun weiche der Kolben weiter bis ans Ende seines Hubes zurück; die aus der Verbrennung hervorgegangene Gasmenge expandire hierbei adiabatisch, bis bei Erreichung des Volumens V_2 der Druck wieder auf den anfänglichen Werth p_0 herabgegangen ist, in welchem Augenblicke die Temperatur auf T_2 gesunken sein mag; schliesslich werde die gesammte Gasmasse mit constantem Drucke p_0 ins Freie geschoben.

Ob im ersten und zweiten Theile des Processes die besprochenen Vorgänge praktisch ausführbar sind, möge zunächst dahingestellt bleiben, hier aber vor Allem einmal der Vorgang betrachtet werden, der beim Rückgange des Kolbens, bei der Entfernung der Gasmasse aus dem Cylinder, vorliegt. Beim Ansaugen wurde die Arbeit $V_1 p_0$ gewonnen, beim Hinausschieben war die Arbeit $V_2 p_0$ aufzuwenden; die verbrauchte Arbeit ist daher $(V_2 - V_1) p_0$ und die Arbeit L, die hier bei einem Spiele der Maschine, d. h. beim Hin- und Rückgange des Kolbens gewonnen worden ist, wird daher durch die in Fig. 70a durch Schraffur angedeutete Fläche bestimmt, gerade so, als wäre ein umkehrbarer Kreisprocess ausgeführt worden. Bezüglich der hierbei in Betracht fallenden Wärmemengen liegen aber hier die Verhältnisse, nach der ersten flüchtigen Betrachtung zu urtheilen, anders. Die zugeführte Wärmemenge Q_1 ist die bei der Explosion freiwerdende, eine eigentliche Ableitung von Wärme findet aber in der Maschine selbst nicht statt, da vorerst die Cylinderwandungen als indifferent angesehen worden sind; es ist nun hier, wenn man auf die in § 38 S. 186 besprochenen Untersuchungen zurückgeht, der Cylinderraum als Abflussraum anzusehen und in der betreffenden Gl. (47a) S. 192 für vorliegenden Fall $d Q_x = 0$ und $dp = 0$ zu setzen, wonach $d T_x = 0$, also auch die Temperatur der Gasmasse im Cylinder während ihres Verdrängens $T_x = T_2$, als constant folgt. Ausserhalb des Cylinders, d. h. in der freien Atmosphäre, macht sich die Gasmasse unter Ueberwindung des constanten Druckes p_0 Raum und wird erst hier von der Temperatur T_2 auf die anfängliche Temperatur T_0 zurückgeführt, wobei die äussere atmosphärische Luft

den ausbreitenden Gasen die Wärmemenge $Q_2 = c_p G (T_2 - T_0)$ entzieht, demnach als Kühlkörper auftritt. Man erkennt hieraus, dass der Process dieser offenen Maschine auch bezüglich des Wärmeaustausches vollständig mit dem einer geschlossenen Maschine übereinstimmt, denn der für die abgeleitete Wärmemenge Q_2 gefundene Werth ist der gleiche, der sich für den Weg $T_2 T_0$ ergiebt, wenn der in Fig. 70a dargestellte Process einem gewöhnlichen umkehrbaren Kreisprocesse entsprechen würde. Die früher entwickelten Sätze über die Abbildung der Indicatordiagramme gelten daher auch hier und Fig. 70b giebt die Skizze der Abbildung des Processes Fig. 70a der Lenoirschen Gasmaschine, allerdings zunächst unter den gemachten einschränkenden Annahmen bezüglich der Expansionscurve, dass nämlich die Expansion nach der adiabatischen Curve erfolgt und dass die Cylinderwandungen für Wärme unempfänglich sind.

Da die drei Curven $T_0 T_1$, $T_1 T_2$ und $T_2 T_0$ in Fig. 70a polytropische Curven sind, so sind für die Abbildung dieser Curven die Sätze auf S. 151 zu benutzen. Nimmt man für die Abbildung des Punktes T_0 (Fig. 70b) das Wärmegewicht P_1 durch die Strecke $O P_1$, die willkürlich gewählt werden kann, als gegeben an und trägt man nach einem beliebigen Maassstabe die zugehörige Temperatur T_0 als Ordinate auf, so ist in der Abbildung der Explosionscurve $T_0 T_1$ für eine beliebige andere Temperatur T als Ordinate die zugehörige Abscisse OP nach Gl. (13a) S. 151 durch

$$P = P_1 + \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}$$

gegeben und für den Endpunkt T_1 durch:

$$P_2 = P_1 + \frac{c_v}{A} \operatorname{logn} \frac{T_1}{T_0}\,.$$

Ebenso leicht zeichnet sich die Abbildung der horizontalen Druckcurve $T_0 T_2$ (Fig. 70a). Für eine beliebige Zwischentemperatur T berechnet sich die Abscisse OP durch

$$P = P_1 + \frac{c_p}{A} \operatorname{logn} \frac{T}{T_0}$$

und für den Endpunkt T_2

$$P_2 = P_1 + \frac{c_p}{A} \operatorname{logn} \frac{T_2}{T_0} \cdot$$

Die verticale Strecke $T_1 T_2$ (Fig. 70b) ist ohne Weiteres die Abbildung der Adiabaten $T_1 T_2$ der Fig. 70a.

Nach den früher entwickelten Sätzen stellt nun die schraffirte Fläche L_0 des Curvendreieckes $T_0 T_1 T_2$ der Abbildung Fig. 70b ebenfalls die durch den vorgelegten Process der Maschine gewonnene Arbeit dar und bei richtiger Wahl des Maassstabes würde diese Fläche mit der Arbeitsfläche L des Indicatordiagrammes Fig. 70a übereinstimmen.

Die unter der Curve $T_0 T_1$ der Abbildung liegende, über $P_1 P_2$ stehende Fläche, deren Inhalt durch das Planimeter bestimmt, mit L_1 bezeichnet werden mag, repräsentirt die in Arbeit gemessene Wärmemenge Q_1, welche bei diesem Processe zugeführt, d. h. im vorliegenden Falle bei der Verbrennung (Explosion) freigeworden ist, und die unter der Curve $T_0 T_2$ liegende über $P_1 P_2$ stehende Fläche, die mit L_2 bezeichnet werden mag, stellt in Arbeitseinheiten gemessen die Wärmemenge Q_2 dar, welche bei dem Processe abgeleitet wurde, d. h. im vorliegenden Falle der Gasmasse nach ihrem Austritt aus dem Cylinder von der äusseren Atmosphäre entzogen worden ist.

Bestimmt man mit dem Planimeter die drei Flächen L, L_1 und L_2 der Abbildung Fig. 70b, wobei auf die Grösse der Planimetereinheit und auf den Maassstab, nach welchem die Grössen P und T in der Figur aufgetragen wurden, nichts ankommt, und berechnet man die Verhältnisse $L_1 : L$ und $L_2 : L$, so finden sich, weil L die Arbeit der Maschine pro Umdrehung in Meterkilogrammen gemessen dargestellt, wie sie auch dem Indicatordiagramm Fig. 70a entnommen werden kann, die beiden Wärmequantitäten

$$Q_1 = \frac{L_1}{L} \cdot A\, L \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{L_2}{L} \cdot A L \; .$$

Ist überdies noch F der Kolbenquerschnitt und s der Kolbenhub der Maschine und reducirt man (mittelst des Planimeters) die schraffirte Arbeitsfläche L des Indicatordiagrammes Fig. 70a auf ein Rechteck von der Basis s, so erhält man in der Höhe desselben, die mit p_m bezeichnet werden mag, den sogenannten

mittleren specifischen Ueberdruck am Kolben, und die indicirte Arbeit L pro Umdrehung ist dann:

$$L = F s p_m \;. \tag{55}$$

Daher ergeben sich nach vorstehenden Formeln die beiden Wärmemengen Q_1 und Q_2, bezogen auf eine Umdrehung resp. ein Spiel:

$$Q_1 = \frac{L_1}{L} \cdot A F s p_m \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{L_2}{L} A F s p_m \;. \tag{56}$$

Man ersieht hieraus, dass das Indicatordiagramm das Mittel an die Hand giebt, nicht nur die indicirte Arbeit zu bestimmen, wozu man dasselbe bis jetzt allein benutzte, sondern auch Aufschluss über den hierbei stattfindenden Wärmeaustausch zu geben und zwar einfach durch das Mittel der Abbildung.

Freilich entsteht hier sogleich der Zweifel, ob diese bedeutsame Erweiterung in der Verwerthung der Indicatordiagramme auch noch Gültigkeit behält, wenn im Processe der Maschine gewisse nicht umkehrbare Einzelprocesse auftreten.

In dieser Beziehung ist vor allem von Wichtigkeit, die Vorgänge zu beleuchten, welche mit dem sogenannten Voraustritt verbunden sind. In Wirklichkeit wird nämlich sehr selten die Expansion so weit fortgesetzt, bis der Enddruck den äussern atmosphärischen Druck erreicht.

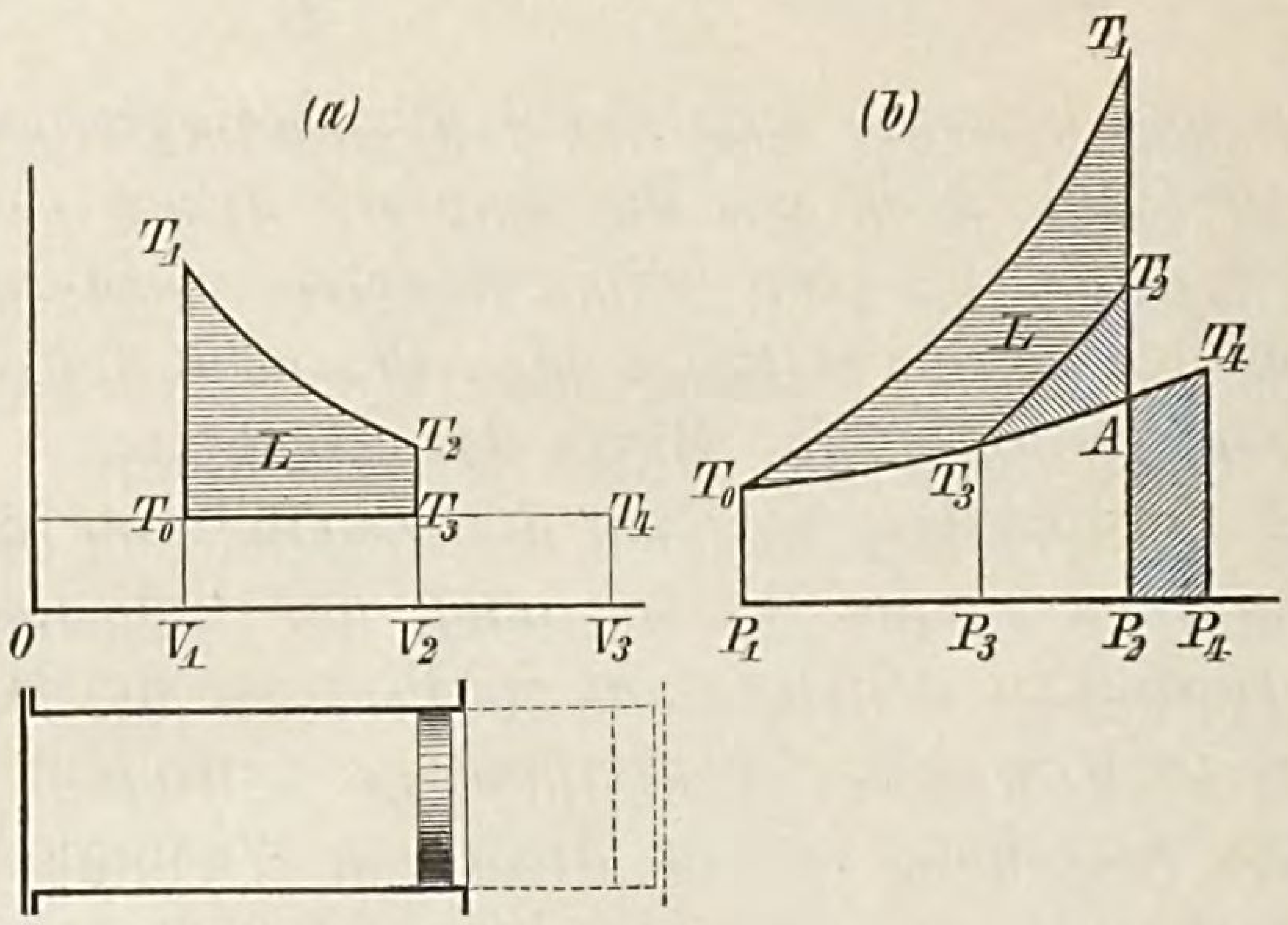
Hat (Fig. 71a) a. f. S. der Kolben nach Beschreibung des Volumens $O V_2$ das Hubende erreicht, so ist der durch die Ordinate $V_2 T_2 = p_2$ dargestellte Enddruck in der Regel grösser als der äussere Druck p_0, welcher durch $V_2 T_3$ dargestellt ist; liegt dieser Fall vor, so strömt, wenn jetzt der Austrittskanal geöffnet wird, ein Theil des Gases von selbst ins Freie, wobei, da der Kolben am Hubende als stillstehend angesehen werden kann, der Druck von p_2 auf p_0 herabsinkt; nun erst wird beim Rückgange des Kolbens der Rest des Gases mit constantem Drucke p_0 in die freie Atmosphäre geschoben. Der erste Theil des Austrittes umschliesst aber einen nicht umkehrbaren Process, der jetzt näher betrachtet werden soll.

Zu diesem Zwecke denke man sich das Cylindervolumen von V_2 auf V_3 vergrössert und das Gas während der Drucksenkung von p_2 auf p_0 nicht ins Freie strömend, sondern man stelle sich

vor, dass der Kolben unter Ueberwindung eines constanten äussern Gegendruckes p_0 noch das Volumen $V_3 - V_2$ und zwar so weit beschreibt, bis im Punkte T_4 die Gleichgewichtstemperatur und daher der Gleichgewichtsdruck p_0 wieder vorliegt.

Nun erst gehe der Kolben, die Gasmenge ins Freie drängend, um das ganze Volumen V_3 zurück. Während des Ueberganges aus dem Gleichgewichtszustande, welcher durch den Punkt T_2

Fig. 71.



(Fig. 71 a) gegeben ist, in das Gleichgewicht im Punkte T_4 auf dem angenommenen nichtumkehrbarem Wege, finde, da die Cylinderwandungen wieder als für Wärme unempfänglich angesehen werden sollen, eine Mittheilung und Entziehung von Wärme nicht statt; denkt man sich dagegen den Uebergang von T_2 nach T_4 auf dem umkehrbaren Wege $T_2\,T_3\,T_4$ bewerkstelligt und die beiden Wege $T_2\,T_3$ und $T_3\,T_4$ in Fig. 71 b abgebildet, so ergiebt die Fläche $P_3\,T_3\,T_2\,P_2$ die Wärmemenge, die abzuleiten und die Fläche $P_3\,T_3\,T_4\,P_4$ die Wärmemenge, welche hierbei zuzuführen gewesen wäre; die algebraische Summe beider Flächen ergiebt dann nach den Darlegungen auf S. 76 die Wärmemenge, die bei diesem nicht umkehrbaren Processe mitgetheilt worden ist; da diese aber im vorliegenden Falle Null gesetzt wurde, so sind die beiden erwähnten Flächeninhalte gleich gross, oder was auf dasselbe hinausläuft, die beiden in Fig. 71 b durch schräge Schraffur bezeichneten Flächen haben gleichen Inhalt, wobei aber die Fläche $T_3\,T_2\,A$ als negativ und die Fläche $P_2\,A\,T_4\,P_4$ als positiv zu betrachten ist. Wird nun beim Rückgange des Kolbens das Gasvolumen

$V_3 - V_1$ (Fig. 71 a) ins Freie gedrängt, so wird demselben ausserhalb des Cylinders von der äussern Atmosphäre eine Wärmemenge entzogen, welche in Fig. 71 b durch die Fläche $P_1 T_0 T_4 P_4$ dargestellt ist. Aus den angestellten Betrachtungen geht aber hervor, dass diese Fläche auch durch die Summe der beiden Flächen $P_1 T_0 T_3 P_3$ und $P_3 T_3 T_2 P_2$ gegeben ist. Beide Flächen geben aber auch die abzuleitende Wärmemenge unter der Voraussetzung, dass der Vorgang im Cylinder auf dem Wege $T_2 T_3$ und $T_3 T_0$ (Fig. 71 a) umkehrbar erfolgt wäre, man also am Ende des Kolbenhubes erst das Gas im Cylinder bei constantem Volumen von der Temperatur T_2 auf T_3 abgekühlt und dann erst mit constantem Drucke p_0 ins Freie geschoben hätte.

Ergänzt man die Abbildung Fig. 71 b noch durch Hinzufügung der Abbildung der Explosionscurve $T_0 T_1$ und der adiabatischen Curve $T_1 T_2$, so ergiebt sich in der Fläche des Curvenviereckes $T_0 T_1 T_2 T_3$ die Abbildung des ganzen Indicatordiagrammes, und diese Abbildung ist genau dieselbe und ist in der gleichen Weise zu benutzen, als wäre der in Fig. 71 a durch das Indicatordiagramm dargestellte Process der Maschine in allen seinen Theilen umkehrbar.

Erst durch den vorstehenden Nachweis tritt der grosse Werth der Theorie der Abbildung hervor.

§ 82. Betrachtung ausgeführter Gasmaschinen.

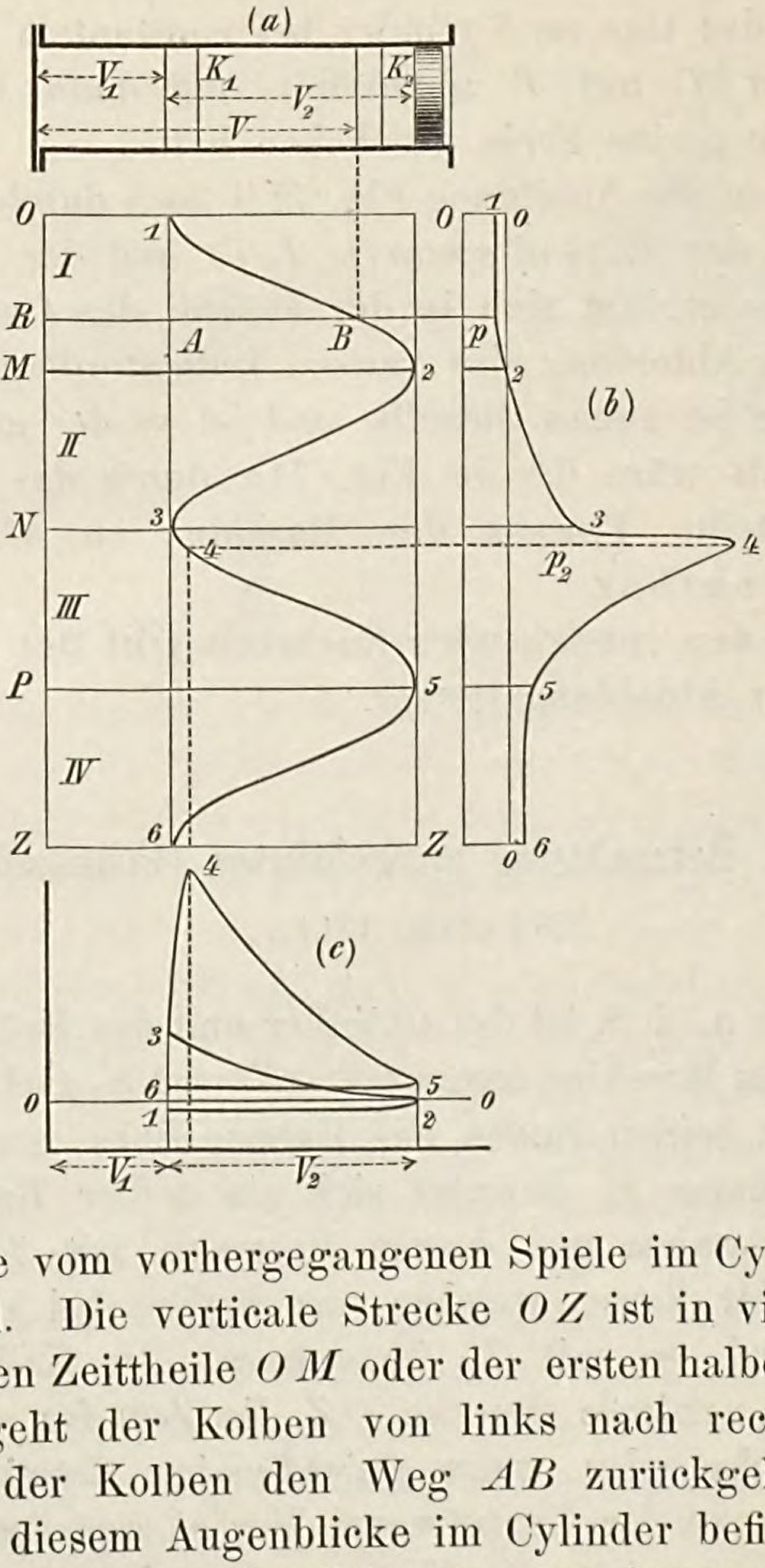
System Otto.

In Fig. 72a a. f. S. ist der Cylinder und das Kolbendiagramm einer Otto'schen Maschine dargestellt; K_1 und K_2 giebt die Kolbenstellung an den beiden Enden des Hubes; links von der äussersten Kolbenstellung K_1 befindet sich ein todter Raum, der als Compressionsraum und dessen Volumen mit V_1 bezeichnet werden mag; der Raum, welcher vom Kolben bei einem Schube beschrieben wird, sei mit V_2 bezeichnet. Im Kolbendiagramm repräsentirt die verticale Strecke OZ die Zeit für zwei Umdrehungen der Kurbel oder, wenn gleichförmige Rotation vorausgesetzt wird, den von der Kurbelwarze hierbei zurückgelegten Weg. Der ganze Process spielt, die Figur zu Grunde gelegt, links vom Kolben ab; rechts desselben herrscht, da hier der Cylinder offen

ist, der atmosphärische Druck, dessen Wirkung hier ausser Betrachtung fällt, da die Arbeit, welche die Ueberwindung desselben beim Hingange des Kolbens fordert, beim Rückwege regelmässig wieder gewonnen wird.

Beim Beginne des Spieles steht der Kolben bei (1), der Compressionsraum ist mit Verbrennungsgasen von nahezu atmosphärischer Pressung, aber verhältnissmässig hoher Temperatur gefüllt,

Fig. 72.



mit Gasen, die vom vorhergegangenen Spiele im Cylinder zurückgeblieben sind. Die verticale Strecke OZ ist in vier Theile getheilt, im ersten Zeittheile OM oder der ersten halben Umdrehung der Kurbel, geht der Kolben von links nach rechts; zur Zeit $OR = t$ hat der Kolben den Weg AB zurückgelegt, das Volumen der in diesem Augenblicke im Cylinder befindlichen Gasmenge ist durch die Strecke RB gemessen; im zweiten Zeittheile MN geht der Kolben zurück und im dritten und vierten Zeittheile

wiederholt sich das Kolbenspiel. Der Arbeitsprocess vertheilt sich also auf die vier Zeittheile, man hat daher die Maschine halbwirkende genannt oder sagt auch, die Maschine arbeite im Viertakt*). Fig. 72b stellt das zugehörige Kolbenkraftdiagramm dar, die Ordinate *Oo* repräsentirt den äussern atmosphärischen Druck, die verticale Linie *oo* daher die sogenannte atmosphärische Linie, *OZ* die Nulllinie.

Im ersten Takte (I) saugt der Kolben atmosphärische Luft und Leuchtgas an und es findet dabei bis zu gewissem Grade eine Mischung mit den anfänglich im Raume V_1 vorhandenen Verbrennungsgasen statt; der Druck im Cylinder ist durch die Ordinaten der Curvenstrecke 1 — 2 in Fig. 72b dargestellt; der Druck ist dabei bis nahezu an das Ende des Kolbenhubes kleiner, als der atmosphärische.

Im Punkte 2 findet Absperrung statt, und nun wird beim Kolbenrückgange das Gasgemenge auf das Volumen V_1 comprimirt, der Druck steigt hierbei nach der Curve 2 — 3.

Im Punkte 3 (also im ersten todten Punkte) findet jetzt die Zündung statt, der Druck wächst rasch, fast plötzlich nach der Curve 3 — 4 (Fig. 72b); da der Kolben hierbei schon auf dem Rückwege ist, so steigt in Wirklichkeit diese Curvenstrecke etwas geneigt an; im übrigen Theile des 3. Taktes (III) findet nun die Expansion statt und kurz vor dem Ende des Kolbenhubes wird schon der Austrittskanal geöffnet, so dass der letzte Theil der Curvenstrecke 4 — 5 Expansion mit Austritt umschliesst; endlich im vierten Takte wird die dem Hubvolumen V_2 entsprechende, aus der Verbrennung hervorgegangene Gasmenge ins Freie geschoben; der Druck, welcher durch die Curvenstrecke 5 — 6 dargestellt wird, ist nahezu constant und etwas grösser als der atmosphärische.

Aus dem Kolbenkraftdiagramme Fig. 72b ist nun das eigentliche Indicatordiagramm in Fig. 72c abgeleitet worden; über den Zusammenhang beider Diagramme ist schon oben bei der Besprechung der Heissluftmaschinen das Nähere gesagt worden, übrigens ist derselbe so einfach, dass es weiterer Erläuterungen hier auch nicht bedarf.

*) Der Gedanke, die Maschine im Viertakt arbeiten zu lassen, ist zuerst von dem franz. Ingenieur Alph. Beau de Rochas (1862) ausgesprochen worden.

Das Indicatordiagamm Fig. 72c (die Skizze entspricht im Allgemeinen den Diagrammen, wie sie wirklich beobachtet werden), wird durch eine schleifenartige Curve umschlossen; der obere Theil der Fläche enspricht positiver, gewonnener, der untere Theil dagegen negativer Arbeit; die letztere Fläche verschwindet aber bei den wirklich aufgenommenen Diagrammen fast vollständig, da hier die Curvenstrecken 5 — 6 und 1 — 2 sehr nahe mit der atmosphärischen Linie 0 — 0 zusammenfallen.

Bemerkenswerth ist, dass nach dem Vorgeführten Otto's Maschine im ersten und zweiten Takte eine Compressionspumpe ist, sie saugt Gas und Luft an und comprimirt das Gemenge; im dritten und vierten Takte erst ist sie eigentliche Betriebsmaschine, erst hier führt sie den wirklichen Arbeitsprocess aus. Beide Processe lassen sich trennen; man kann das Ansaugen und Comprimiren auch in einem besondern Cylinder (einer Compressionspumpe) vornehmen und bei der Compression das Gasgemenge in den zweiten Cylinder (den Arbeitscylinder) drücken, in welchem dann die Explosion, Expansion und das Verdrängen ins Freie erfolgt. Diese Anordnung liegt bei der Gasmaschine von Körting vor: hier erscheinen zwei Indicatordiagramme, die aber auf einander gelegt, ebenfalls auf das in Fig. 72c dargestellte Diagramm führen. Bevor nun auf eine nähere calorimetrische Untersuchung der Maschine von Otto eingegangen wird, mag, um spätere Betrachtungen nicht unterbrechen zu müssen, zuerst eine Voruntersuchung Platz finden, welche sich auf den Vorgang des Ansaugens im ersten Takte (Fig. 72a) bezieht.

Beginnt der Kolben vom Punkte (1) aus seine Bewegung und befinden sich im Compressionsraume V_1 dem Gewichte nach G_1 kg Verbrennungsgase von der Temperatur T_1 und dem äussern atmosphärischen Drucke p_0, so fragt es sich, wie gross das Gewicht G der Mischung von Leuchtgas und atmosphärischer Luft ist, welches pro Schub, also wenn der Kolben den Raum V_2 bei constantem Drucke p_0 zurückgelegt hat, angesaugt worden ist und welches die Temperatur T_2 der ganzen Mischung am Ende ist, wenn die äussere Temperatur zu T_0 angenommen wird. Dabei werde vorausgesetzt, dass der Druck im Cylinder mit dem äussern Drucke identisch ist, was zulässig erscheint, da in Wirklichkeit die Druckdifferenz nur sehr gering ist; ferner werde zunächst angenommen, dass die Cylinderwandungen keinen Einfluss auf

die Temperaturverhältnisse des Gasgemisches ausüben, eine Annahme, die in Wirklichkeit allerdings nicht zutreffend ist, da bei den ausgeführten Maschinen die Cylinderwandungen von aussen her durch kaltes Wasser, welches durch den Mantel strömt, abgekühlt werden. Ist nun V_0 das Volumen der G kg Leuchtgas und atmosphärischer Luft vor dem Eintritte und denkt man sich vorerst, die Mischung beider Gasarten sei schon vorher bewerkstelligt worden, so ist die Zustandsgleichung für dieselbe

$$V_0 p_0 = G B T_0 \ . \tag{57}$$

Für die im Compressionsraume befindliche Gasmenge gilt die Beziehung

$$V_1 p_0 = G_1 B T_1 \tag{58}$$

und für die ganze Mischung am Ende des Kolbenhubes nach dem Ansaugen (bei Beginn der Compression)

$$(V_1 + V_2) p_0 = (G_1 + G) B T_2 \ . \tag{59}$$

Hierbei ist die Constante B der Zustandsgleichung, wie früher unter der Voraussetzung bewiesen wurde, dass Luft im Ueberschuss vorhanden sei, in allen drei Formeln von gleichem Werthe und entspricht der Mischung von Leuchtgas und Luft vor der Zündung. Die Formeln bleiben aber auch ungeändert, wenn man das Leuchtgas und die Luft vor dem Eintritte nicht gemischt, sondern bei gleicher Temperatur T_0 und gleichem Drucke p_0 nebeneinander gelagert sich denken wollte; die Betrachtungen gelten daher auch für den Otto'schen Motor, bei welchem Gas und Luft aus getrennten Räumen und zwar im Anfange des Kolbenhubes nur Luft, dann eine Beimischung von Gas und zuletzt fast reines Leuchtgas angesaugt wird; ja selbst nach vollendeter Ladung braucht man, um die Richtigkeit der hier gegebenen Entwickelungen aufrecht zu erhalten, keineswegs an eine homogene Mischung zu denken, sondern kann Schichtung der Gase und Nebeneinanderlagerung irgend welcher Art voraussetzen.

Nun findet sich aber weiter nach frühern Sätzen der Wärmeinhalt J oder die Gaswärme der Mischung vor dem Eintritte $J = G (J_0 + c_v T_0)$; für die Verbrennungsgase im Compressionsraume ist dagegen die Gaswärme J_1, wenn man die zugehörige Constante mit J_0' bezeichnet, $J_1 = G_1 (J_0' + c_v T_1)$ und endlich die Gaswärme J_2 am Ende des Kolbenschubes

$$J_2 = G (J_0 + c_v T_2) + G_1 (J_0' + c_v T_2) \ ,$$

wobei vorausgesetzt wird, was nach frühern Entwickelungen zulässig ist, dass c_v in allen drei Formeln denselben Werth besitzt. Beim Eintritte in den Cylinder nimmt aber die Mischung von der äussern Atmosphäre die Arbeit $V_0 p_0$ auf und im Cylinder selbst wird die Arbeit $V_2 p_0$ abgegeben; man hat daher für den ganzen Vorgang die Grundgleichung

$$J + J_1 + A p_0 (V_0 - V_2) = J_2 \tag{60}$$

oder unter Benutzung der vorhergehenden Ausdrücke, sowie der Gln. (57) bis (59), wenn man noch die bekannte Beziehung $c_p - c_v = AB$ benutzt:

$$G T_0 + G_1 T_1 = (G + G_1) T_2 \tag{61}$$

oder nach denselben Gln. (57) bis (59) einfach

$$V_0 = V_2 \, . \tag{62}$$

Hieraus folgt der Satz, dass das Gas- und Luftvolumen, bei äusserm Drucke und äusserer Temperatur gemessen, welches bei einem Schube angesaugt wird, einfach gleich dem Volumen V_2 ist, welches der Kolben im Cylinder beim Ansaugen zurücklegt.

Lässt man bei Experimenten an Gasmaschinen das Leuchtgas durch einen Gasmesser gehen und wäre V' das Volumen desselben, so fände sich daher das angesaugte Luftvolumen pro Schub $V_2 - V'$.

Diese Art der Bestimmung der angesaugten Luftmenge ist in der That bis jetzt fast immer befolgt worden, die Zuverlässigkeit derselben wurde jedoch mehrfach angezweifelt und zwar mit Recht.

Die vorstehenden Resultate sind nur annehmbar, wenn man die Einwirkungen der Cylinderwandungen auf die eintretende Mischung ausser Acht lassen dürfte; um auch diesen Einfluss noch der Rechnung zu unterwerfen, möge mit Q die Wärmemenge bezeichnet werden, welche die Wandungen im ersten Takte an das eintretende Gasgemisch a b g e b e n; man hätte dann in Gl. (60) auf der linken Seite einfach Q zu addiren und erhält dann auf demselben Wege der Umformung an Stelle von Gl. (61)

$$\frac{Q}{c_p} + G T_0 + G_1 T_1 = (G + G_1) T_2 \tag{61 a}$$

oder unter Verwendung der Gln. (57) bis (59)

$$Q = \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1}(V_2 - V_0)p_0 \; . \tag{62a}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Beziehung $V_0 = V_2$ nicht mehr besteht, sobald zwischen der eintretenden Gasmischung und den Cylinderwandungen ein Wärmeaustausch stattfindet. Geben die Wandungen an die eintretende Mischung Wärme ab, so ist das Volumen V_0 von Gas und Luft pro Füllung, bei äusserm Drucke und äusserer Temperatur gemessen, kleiner als der Raum V_2, welchen der Kolben saugend zurücklegt; läge dagegen ein Wärmeentzug vor, so stellt sich $V_0 > V_2$ heraus.

Man erkennt hieraus, dass bei gründlichen experimentellen Untersuchungen der Gasmaschine nicht nur die Leuchtgasmenge, sondern auch die angesaugten Luftmengen durch directe Messungen mittelst Gasuhren bestimmt werden sollten, wie das zuerst von Brooks und Steward, sowie in neuester Zeit auch von Slaby geschehen ist. Die betreffenden Beobachtungen geben das allgemeine Resultat, dass allezeit $V_0 < V_2$ ausfällt, ein Beweis, dass in Gl. (62a) Q positiv ist, die Wandungen also Wärme an die eintretende Gasmischung abgeben. Die Differenz $V_2 - V_0$ muss demnach um so grösser werden, je höher die Temperatur des Kühlwassers im Mantel und je niedriger die Temperatur des ein-eintretenden Gemisches ist; die schönen Versuche von Slaby*) bestätigen diese Rechnungsresultate vollständig.

Die Elimination der Gewichte G und G_1 aus den drei Gln. (57), (58) und (59) ergiebt übrigens noch die Beziehung

$$T_2\left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_0}{T_0}\right) = V_1 + V_2 \; , \tag{63}$$

aus welcher sich die Temperatur T_2 der gesammten Gasmasse im Cylinder am Ende des Ansaugens berechnen lässt.

Beispiel. Bei einem der Versuche von Slaby (a. a. O.) war der Raum V_2, welchen der Kolben pro Schub zurücklegte, in Litern gemessen 7,946; der Compressionsraum $V_1 = 4{,}847$; das angesaugte Gas- und Luftvolumen $V_0 = 7{,}077$. Die mittlere Temperatur der Abgase war 412° C.; setzt man voraus, dass dieses auch die Temperatur t_1 im Compressionsraume beim Beginne des Ansaugens ist und dass die Temperatur der äussern

*) Slaby, »Der Einfluss der Wandungen in den Gasmotoren«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1886. Bd. 30. S. 690.

Atmosphäre $t_0 = 15^\circ$ betrug, so berechnet sich aus Gl. (63) die Temperatur am Ende des Ansaugens, also bei Beginn der Compression,

$$T_2 = 404^\circ \quad \text{oder} \quad t_2 = 131^\circ \text{ C.}.$$

Hierbei war die Temperatur des Wassers im Kühlmantel 16° C.

Bei einem andern Versuche, bei welchem diese Temperatur im Mantel 100° betrug, war bei derselben Maschine $V_0 = 6{,}346$ und $t_1 = 460^\circ$ C.; hier berechnet sich in gleicher Weise $T_2 = 447^\circ$ und daher $t_2 = 174^\circ$.

Im ersten Falle berechnet sich die Wärmemenge Q, welche die Wandungen an das eintretende Gemisch abgaben, nach Gl. (62a) zu 0,0728 cal., im andern Falle zu 0,1341 cal.

Es darf nicht unbemerkt bleiben, dass an den in Vorstehendem entwickelten Formeln noch weitere Correctionen nöthig wären; beim Ansaugen ist der Druck im Cylinder immer kleiner, als der äussere atmosphärische, und die Differenz ist um so grösser, je rascher die Maschine läuft; daraus ist auch ohne Rechnung begreiflich, was die Versuche von Slaby weiter ergeben, dass nämlich das angesaugte Gasvolumen, wie das Luftvolumen, abnimmt, je mehr die Maschine Umdrehungen in der Minute macht. Ferner ist auch das sogenannte Saugvolumen nicht genau dem Raume V_2 gleich, welchen der Kolben bei einem Schube zurücklegt; die Gasrückstände haben im Compressionsraume beim Beginne des Hubes immer einen Druck, der etwas grösser als der atmosphärische ist; diese Gase expandiren daher zunächst auf den Ansaugdruck, bevor der Eintritt der Gas- und Luftmischung beginnt; das Saugvolumen ist daher kleiner anzunehmen, als das Volumen ist, welches der Kolben im Ganzen beschreibt.

Endlich möge noch ausgesprochen werden, dass zu Zwecken weiterer Forschungen nicht unterlassen werden sollte, auch die Temperatur der äussern Atmosphäre und den Barometerstand zur Zeit der Versuche mit anzugeben.

§ 83. Calorimetrische Untersuchung der Gasmaschine von Otto.

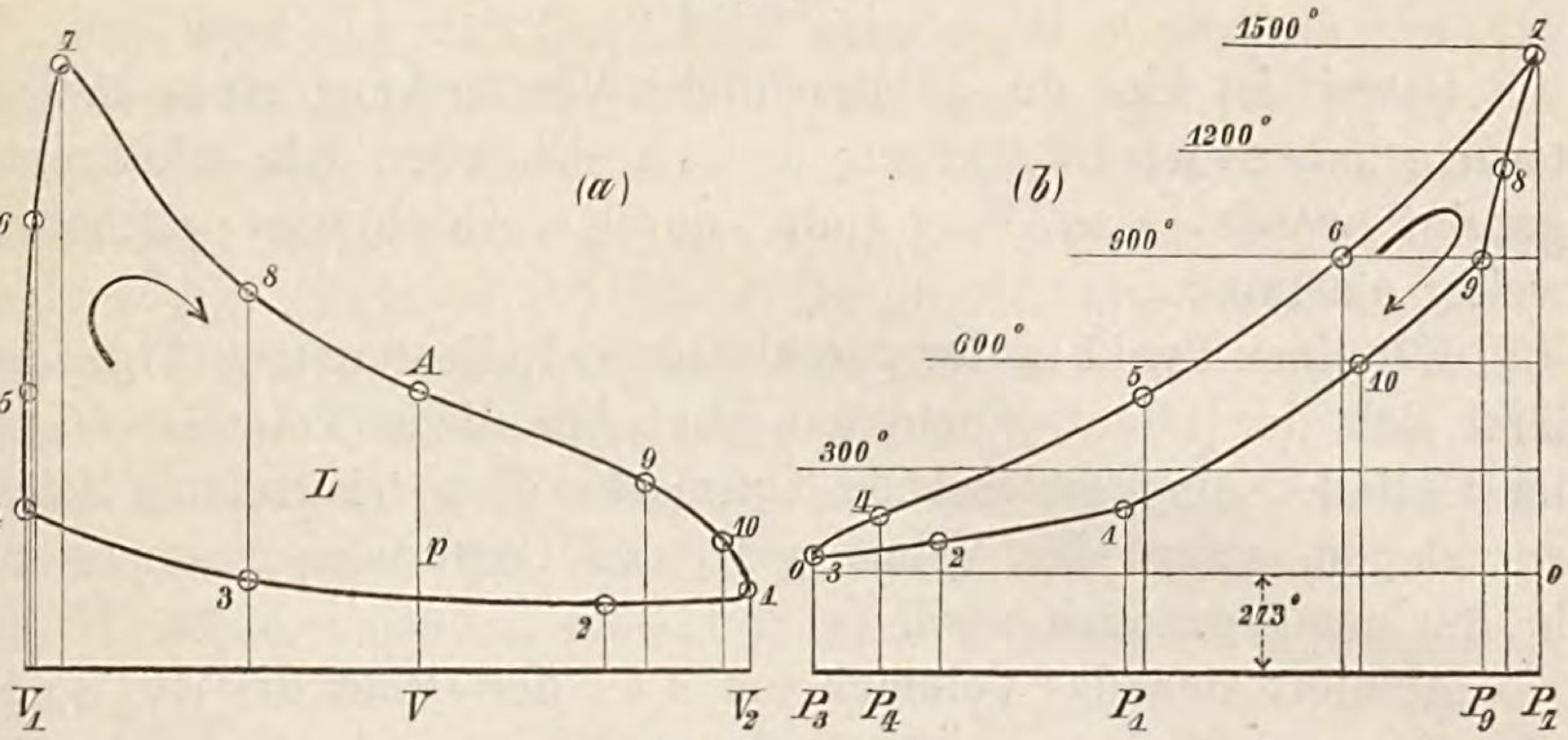
Fig. 73a zeigt das Indicatordiagramm einer Gasmaschine und zwar ist dasselbe, soweit es hier bei der Kleinheit des Maassstabes und bei einem Holzschnitte möglich ist, die getreue Copie eines Diagrammes, welches vorher im grössern Maassstabe, als mittleres Diagramm mehrerer wirklich abgenommener Indicatordiagramme gezeichnet, vorlag.

Das Diagramm erscheint vollständig geschlossen und die

Schleife (Fig. 72c) tritt hier nicht hervor, weil der Eintritts- und Austrittsdruck vom atmosphärischen Drucke kaum verschieden war.

Punkt (1) entspricht dem Augenblicke, wo der Cylinder eben durch Ansaugen von Gas und Luft vollständig gefüllt und nun beim Beginne des Kolbenrückganges der Abschluss erfolgt ist; auf dem Wege 1 — 2 — 3 — 4 findet daher Compression statt, bis bei (4) das kleinste Volumen erreicht ist und die Zündung erfolgt. Die Curvenstrecke 4 — 5 — 6 — 7 ist die Verbrennungscurve, die etwas gegen die Verticale geneigt aufsteigt, und die eine verticale Gerade sein würde, wenn die Verbrennung nicht

Fig. 73.



eine gewisse Zeit in Anspruch nähme; die Curvenstrecke 7 — 8 — 9 ist die Expansionscurve, die (ohngefähr) bei Punkt (9) abschliesst, weil hier bereits der Austritt (vor Beendigung des Kolbenschubes) beginnt; die Strecke 9 — 10 — 1 ergiebt die Druckänderungen während des Voraustrittes. Die ganze Arbeitsfläche planimetrirt (im ursprünglich im grössern Maassstabe gezeichneten Diagramme) und auf eine Rechteckfläche von der Basis des Kolbenhubes $V_1 V_2$ reducirt, ergab als mittlern Ueberdruck $p_m = 4{,}131$ kg; da nun der Cylinderdurchmesser 0,17 m und der Kolbenhub der Maschine 0,34 m betrug, so berechnet sich die indicirte Arbeit L in Meterkilogramm pro Spiel (für zwei Umdrehungen)

$$L = 318{,}8 \text{ mkg}$$

und hieraus die in Arbeit umgesetzte Wärmemenge:

$$AL = 0{,}7519 \text{ cal.}\ .$$

Die Maschine machte in der Minute 176 Umdrehungen, ihre indicirte Arbeit in Pferdestärken findet sich daher zu 6,23; sie ist (effectiv) als eine vierpferdige Maschine bezeichnet; dieselbe verbrauchte für ein volles Spiel 0,78 l Leuchtgas, also stündlich 4,120 cbm oder 0,661 auf eine indicirte Pferdestärke.

Der Compressionsraum der Maschine betrug $V_1 = 4,86$ l und der Raum, den der Kolben pro Schub beschrieb, $V_2 = 6,58$ l; hieraus berechnet sich aus Gl. (62) S. 434 unter der Voraussetzung, dass beim Ansaugen die kühlende Wirkung der Cylinderwandungen vernachlässigt werden darf, das Verhältniss des Gasvolumens 0,78 l zum angesaugten Luftvolumen 6,58 — 0,78 = 5,80 l zu

$$1 : 7,43^{*)} .$$

Soweit ist hier die gebräuchliche Verwerthung eines Indicatordiagrammes wiedergegeben; es lässt sich aber, wie schon oben gezeigt wurde, das Diagramm durch »Abbildung« desselben weiter ausnutzen.

Für einen Punkt A der geschlossenen Indicatorcurve (Fig. 73 a) lässt sich der Druck p und das augenblickliche Volumen V der im Cylinder eingeschlossenen Gasmasse dem Diagramme leicht entnehmen, sofern das Volumen V_1 des Compressionsraumes mit in Rechnung gezogen wird.

Aendert sich das Volumen um dV, der Druck um dp, so ist die dieser Veränderung entsprechende, von aussen zuzuführende Wärmemenge dQ nach Gl. (12a) S. 161

$$dQ = \frac{A}{\varkappa - 1} d(Vp) + A p\, dV$$

oder

*) Das im Texte benutzte Indicatordiagramm verdanke ich Herrn Prof. Lewicki; die von demselben in Deutz selbst ausgeführten Versuche verfolgten aber einen besondern Zweck; es haben daher gewisse Erhebungen nicht stattgefunden, die für die vorliegenden Untersuchungen von Wichtigkeit wären; die verbrauchte Gasmenge ist durch Gasmesser bestimmt, eine besondere Analyse des Leuchtgases liegt aber nicht vor und ebenso ist auch die angesaugte Luftmenge nicht durch besondere Messungen ermittelt worden. Es sind daher auch die im weiteren Verlaufe des obigen Textes gewonnenen numerischen Werthe nur als annähernd richtig anzusehen; die Aufgabe ist ja auch nur, an der Hand eines Beispieles den Gang der calorimetrischen Untersuchungen vorzuführen und zu zeigen, wie künftig zu erwartende vollständige Versuchsreihen wissenschaftlich verwerthet werden können.

$$\frac{dQ}{A} = \frac{1}{\varkappa - 1}(Vp)\left[\frac{d(Vp)}{(Vp)} + (\varkappa - 1)\frac{dV}{V}\right]$$

$$= \frac{1}{\varkappa - 1}(Vp)\,d\left[\operatorname{logn}(Vp) + (\varkappa - 1)\operatorname{logn} V\right]$$

oder, wenn man den natürlichen Logarithmus durch den Briggschen ersetzt und und den Klammerausdruck mit P bezeichnet, also setzt

$$P = \log(Vp) + (\varkappa - 1)\log V\,, \tag{64}$$

$$\frac{dQ}{A} = \frac{\operatorname{logn}.10}{\varkappa - 1}\cdot(Vp)\,dP\,. \tag{65}$$

Nun lässt sich aber für jeden Punkt A der Indicatordiagrammcurve sowohl das Product Vp, wie auch nach Gl. (64) der Werth P berechnen und der letztere Werth, welcher dem »Wärmegewicht« proportional ist, in Fig. 73b als Abscisse und das Product (Vp), welches bei Gasen der zugehörigen absoluten Temperatur T proportional ist, als Ordinate auftragen. Man erhält dann in Fig. 73b die zugehörige »Abbildung des Indicatordiagrammes« und kann hierbei, da auf den Maassstab nichts ankommt, auch noch den constanten Factor auf der rechten Seite der Gl. (65) der Einheit gleich annehmen, also einfach schreiben:

$$\frac{dQ}{A} = (Vp)\,.\,dP\,. \tag{65a}$$

Hieraus folgt, dass die in Fig. 73b zwischen den einzelnen Curvenstrecken und der Abscissenaxe P_3P_7 liegenden Flächen den in Arbeitseinheiten ausgedrückten Wärmemengen proportional sind, welche auf diesen Strecken zu- oder abgeführt wurden. Bei den von links nach rechts laufenden Curvenstrecken ist die entsprechende Wärmemenge positiv, bei den andern negativ.

Fig. 73b zeigt die Abbildung des Indicatordiagrammes Fig. 73a der vorhin besprochenen Maschine, die als Beispiel hier weiter behandelt werden soll. In beiden Figuren sind die sich entsprechenden 10 Punkte mit gleichen Nummern versehen; bei genauen Untersuchungen sind möglichst viele Punkte zu wählen.

In der folgenden Zusammenstellung (einer Figur in grösserm Maassstabe entnommen) ergiebt die Col. 2 für das Indicatordiagramm die jedem einzelnen Punkte entsprechende Pressung p

in kg auf 1 Quadratcentimeter, Col. 3 giebt die entsprechenden Volumina V in Litern; das kleinste Volumen V_{min} bei No. 4 entspricht dem Compressionsraume; Col. 4 ergiebt die Differenzen $(V - V_{min})$, die in Fig. 73a als Abscissen mit den Werthen von p als Ordinaten aufgetragen, das Indicatordiagramm ergeben*).

1 Nr.	2 p	3 V Liter	4 $V - V_{min}$	5 Vp	6 P	7 $P - P_{min}$
1	1.44	11.44	6.58	16.474	1.6402	0.2845
2	1.17	10.12	5.26	11.840	1.4754	0.1197
3	1.54	6.83	1.97	10.518	1.3557	0.0000
4	2.87	4.86	0.00	13.851	1.4161	0.0604
5	4.95	4.91	0.05	24.304	1.6621	0.3064
6	7.53	4.97	0.11	37.424	1.8517	0.4960
7	10.97	5.10	0.24	55.947	2.0308	0.6751
8	6.70	6.84	1.98	45.828	1.9951	0.6394
9	3.49	10.46	5.60	36.505	1.9702	0.6145
10	2.47	11.17	6.31	27.590	1.8600	0.5043

Mit Hülfe der in Col. 5, 6 und 7 berechneten Werthe, für welche die Werthe P nach Gl. (64) unter der Voraussetzung $\varkappa = 1{,}400$ bestimmt wurden, lässt sich nun die Abbildung zeichnen. In Fig. 73b sind die Grössen $P - P_{min}$ als Abscissen und die Grössen (Vp) als Ordinaten aufgetragen und daher ergiebt die Curvenstrecke 1 — 2 — 3 — 4 die Abbildung der Compressionscurve; die Strecke 4 — 5 — 6 — 7 die der Explosionscurve; die Strecke 7 — 8 — 9 die Abbildung der Expansionscurve und endlich Strecke 9 — 10 — 1 die der Druckcurve für den Voraustritt.

Da die Ordinaten der absoluten Temperatur T proportional sind, so erkennt man jetzt die Temperaturänderungen während des ganzen Verlaufes des Processes; so findet bei der Compression (wegen der kühlenden Wirkung der Cylinderwandungen) auf dem Wege 1 — 2 — 3 Temperatursenkung, auf der Strecke 3 — 4 aber

*) In Veröffentlichungen über Untersuchungen calorischer Maschinen werden entweder gar keine oder nur sehr unvollkommen gezeichnete Indicatordiagramme beigegeben; es ist allerdings auch nicht möglich, durch Holzstiche oder Lithographie diese Diagramme so wiederzugeben, dass sie zu genauen Nachmessungen dienen können. Bei wichtigen Versuchen wäre es daher wünschbar, wenn die Abmessungen von Volumen und Druck tabellarisch (wie oben im Texte) aufgeführt würden, damit man das Diagramm leicht nachconstruiren kann.

Temperatursteigerung statt. Läge adiabatische Compression vor, so müssten die Punkte 1 bis 4 vertical über, bei isothermischer Compression horizontal neben einander liegen. Aus der Verbrennungscurve tritt die starke Temperaturerhöhung hervor; in der Abbildung der Expansionscurve ist die Temperatursenkung ersichtlich; läge adiabatische Expansion vor, so müssten die Punkte 7, 8 und 9 vertical unter einander liegen; da hier im Bilde die Curve sich nach links zieht, so hat bei der vorliegenden Maschine die Expansion unter Wärmeentziehung durch die Wandungen stattgefunden; auf der Abbildung der Curve für den Voraustritt findet Temperatursenkung, also Wärmeentziehung statt, welche theils durch die Wandungen, theils durch die äussere Atmosphäre ausserhalb des Cylinders erfolgt ist.

Wenn man nur für einen Punkt der geschlossenen Curve den Temperaturwerth wüsste, so liesse sich leicht der Temperaturmaassstab construiren.

Wäre z. B., um für die weitern Besprechungen einen Anhalt zu gewinnen, im tiefsten Punkte Nr. 3 die Temperatur zu 50° C. anzunehmen, so entspräche der Ordinate $P_3 3$ die absolute Temperatur $T_3 = 323°$; da nun die Temperaturwerthe im Verhältniss der in Col. 5 der vorstehenden Tabelle angegebenen Werthe stehen, so ergeben sich die Temperaturen in den Punkten 1, 4, 7, 9, beziehentlich $T_1 = 506°$, $T_4 = 425°$, $T_7 = 1718°$ und $T_9 = 1121°$ oder, nach Celsius gemessen, bez. $t_1 = 233°$, $t_4 = 152°$, $t_7 = 1445°$ $t_9 = 848°$.

Nach dem in der Figur für die Ordinaten benutzten Maassstab entspricht, weil für Punkt 3 der Werth $Vp = 10{,}518$ vorliegt, einem Grad Celsius die Länge 10,518 : 323 oder 0,0326.

Hiernach ist die Horizontale *oo*, welche für $T = 273°$ oder 0° C. gilt, und von da aus die Theilung für je 300° C. aufgetragen worden, so dass man für jeden Punkt der Abbildung die Temperatur der Figur sogleich entnehmen könnte. Selbstverständlich machen die vorstehenden Zahlenangaben durchaus keinen Anspruch auf Zuverlässigkeit, wegen der unsichern experimentellen Unterlagen; setzt man diese aber weiter als brauchbar voraus, so ergeben sich noch folgende weiteren Schlüsse.

Die geschlossene Fläche der Abbildung (Fig. 73b) giebt, wie oben bewiesen worden ist, in gleicher Weise wie das Indicatordiagramm die bei einem Spiele gewonnene Arbeit an. Die Fläche

ist (in einer Figur grösseren Maassstabes) mit dem Amsler'schen Planimeter umfahren worden und ergab 105 Pl. (Planimeter-Einheiten); da nun in der Berechnung S. 437 nach den Angaben des Indicatordiagrammes die Arbeitsfläche für ein Spiel (2 Umdrehungen) dieser Maschine 318,8 mkg betrug, so entspricht eine Planimetereinheit der Abbildung 318,8 : 105 d. h. 3,036 mkg oder durch 424 dividirt einer Wärmemenge von 0,007161 Calorien.

Für die Abbildung der Compressionscurve 1 bis 4 (Fig. 73b) ergab die Messung der unter derselben liegenden Fläche $P_1 P_3$ 3 1 in Planimetereinheiten 83, für die Fläche $P_4 P_3$ 3 4 aber 16,5; die Differenz ist 66,5 oder in Wärme ausgedrückt 0,476 Calorien und diese Wärmemenge ist der Gasmischung bei der Compression pro Schub durch die Wandungen entzogen worden.

Die unter der Explosionscurve 4 — 7 liegende Fläche P_4 — 4 — 5 — 6 — 7 — P_7 betrug 421 Planimetereinheiten, daher ist die entsprechende Wärmemenge 3,015 Calorien, und diese Wärmemenge ist es, welche bei der vorliegenden Maschine bei einer Explosion frei geworden ist.

Endlich ergab sich für die Abbildung der Expansionscurve 7 — 8 — 9 die unterhalb derselben liegende Fläche 66 Pl., woraus sich die Wärmemenge, welche während der Expansion die Cylinderwandungen dem Gasgemische bei einem Spiele entzogen haben, zu 0,473 Calorien berechnet; richtiger gesagt, entspricht dieser Werth der Differenz zweier Wärmemengen, nämlich derjenigen, welche durch die in die Expansionsperiode hinüberdauernde Verbrennung frei geworden ist und der, welche die Wandungen entzogen haben; im vorliegenden Falle überwiegt die letztere.

Was zuletzt die unter der Voraustritts-Druckcurve 9 — 10 — 1 liegende Fläche betrifft, so giebt diese zwar eine abgeleitete Wärmemenge an, doch nimmt hier die Cylinderwandung nur einen Theil dieser Wärmemenge auf; der andere, grössere Theil wird erst nach dem Austritte von den Gasen an die äussere atmosphärische Luft abgegeben; beide Theile getrennt zu bestimmen, dürfte auf grosse Schwierigkeiten stossen, doch liegt hierzu auch kein Bedürfniss vor.

Für die den vorstehenden numerischen Rechnungen zu Grunde gelegten Indicatorversuche einer bestehenden Maschine ergab sich vorhin die Wärmemenge, welche bei einer Explosion frei

wurde, zu 3,015 Calorien; da aber hierbei, wie oben angegeben, 0,78 l Gas zur Verwendung kam, so berechnet sich noch die Wärmemenge, welche bei der Verbrennung auf dem Wege 5 — 6 — 7 (Fig. 73b) von einem Cubikmeter Leuchtgas entwickelt wurde, zu:

$$\frac{3{,}015 \cdot 1000}{0{,}78} = 3865 \text{ Calorien} .$$

Leider muss hier eine weitere Verfolgung des Beispieles abgebrochen werden, schon deshalb, weil für das benutzte Gas keine Analyse vorliegt, sich also für dasselbe weder die Constante B der Zustandsgleichung, noch die specifische Wärme bei constantem Volumen (c_v), noch auch die Heizkraft berechnen lässt.

Nun hat zwar Slaby seine auf S. 403 citirten Versuche, ebenso wie Lewicki, in Deutz ausgeführt, giebt für das von ihm benutzte Gas eine Analyse (oben S. 403) und berechnet die Heizkraft desselben, auf 1 cbm bezogen, zu 4875 Cal.; es wäre aber gewagt, hieraus weitergehende Schlüsse zu ziehen, als den, dass im oben behandelten Falle in der eigentlichen Explosionsperiode nicht die gesammte berechnete Wärmemenge zur Entwickelung kommt.

Aus dem Vorgeführten dürfte aber doch wohl der grosse Gewinn hervorleuchten, welcher der Methode der Abbildung der Indicatordiagramme entspringt. Unzweifelhaft tritt der sehr energische Einfluss der durch kaltes Wasser gekühlten Cylinderwandungen auf den ganzen Arbeitsprocess hervor*).

Liegen erst einmal vollkommenere und ausgedehntere Versuche vor, so dürfte die Methode der Abbildung wohl zur Entscheidung mancher streitigen Fragen beitragen; bei derartigen Versuchen sollte aber nicht nur die verbrauchte Leuchtgasmenge,

*) Bezüglich der Wirkung der Cylinderwandungen ist die Gasmaschine, in deren Cylindermänteln kaltes Wasser circulirt, nicht mit den Vorgängen bei den Dampfmaschinen zu vergleichen; bei den letzteren ist der Einfluss der Cylinderwandungen auf den arbeitenden Dampf meiner Ansicht nach (vergl. »Calorimetrische Untersuchungen der Dampfmaschinen«, Civilingenieur Bd. 27 und 28, 1881 und 1882) vielfach überschätzt worden, bei den Gasmaschinen scheint er unterschätzt zu werden; nur Witz betont zuerst entschieden diesen Einfluss (Etudes sur les moteurs à gaz tonnant. Paris 1884), worauf im Text zurückzukommen sein wird.

sondern auch die angesaugte Luftmenge jederzeit durch Gasmesser bestimmt, sowie mit den Indicatorversuchen auch Analysen des benutzten Gases und experimentelle Bestimmungen der Heizkraft desselben verbunden werden. Man sucht in der Literatur vergeblich nach Angaben über die Verbrennungswärme des Leuchtgases, die durch directe Beobachtungen im Calorimeter gewonnen worden wären. Bei Versuchen an Gasmaschinen, die zu wissenschaftlichen Zwecken angestellt werden, sollte aber das benutzte Leuchtgas unbedingt in der angegebenen Richtung der Prüfung unterworfen werden. Alle Angaben über die Heizkraft der angewandten Leuchtgase sind auf dem oben vorgeführten Wege der Rechnung gewonnen worden; erhebt man Zweifel an der Zuverlässigkeit dieser Art der Bestimmung, und solche Zweifel kann man nicht ohne Weiteres abweisen, so muss man damit auch sogleich die Bemerkung verbinden, dass die bis jetzt veröffentlichten Versuche an Gasmaschinen unzureichend sind, alle hier einschlagenden Fragen zur Zeit mit Zuverlässigkeit zu beantworten.

Es darf nun nicht unterlassen werden, noch auszusprechen, dass die oben vorgeführte Methode der calorimetrischen Untersuchung von Gasmaschinen auf Voraussetzungen fusst, die nur unter gewissen Umständen zulässig erscheinen.

Einmal ist vorausgesetzt worden, dass die beiden specifischen Wärmen c_p und c_v, sowie die Constante B der Zustandsgleichung für das Gasgemisch vor und nach der Verbrennung als gleich gross angenommen werden dürfen, eine Annahme, die nur näherungsweise zulässig ist, die man aber hier für die Zündung einer Mischung von Leuchtgas bei einem Ueberschuss von atmosphäri- Luft nach den oben vorgeführten Rechnungen sicherlich machen kann. Andererseits stützt sich die Methode auf die volle Zuverlässigkeit des den Untersuchungen zu Grunde gelegten Indicatordiagrammes; hierbei kommt aber nicht nur die Güte des angewandten Indicators und die Zuverlässigkeit des Experimentators in Betracht, sondern man kann auch die Frage aufwerfen, ob der Curvenzug des Indicatordiagrammes in allen seinen Theilen als umkehrbar anzusehen ist. Hier könnte ein Zweifel in die Zuverlässigkeit des Verlaufes der Zündungscurve und des anfänglichen Theiles der Expansionscurve aufgeworfen werden; während und unmittelbar nach der Verbrennung ist zweifellos

die Gasmischung in heftigster, stürmischer Bewegung, so dass möglicher Weise während derselben der dem Diagramm entnommene Druck nicht als Gleichgewichtsdruck angesehen werden darf; in diesem Falle würde die Berechnung des Productes Vp und des Wärmegewichtes P nach Gl. (64) S. 439 auf Werthe führen, die etwas zu klein sind und der betreffende Curvenzug in der Abbildung würde die augenblickliche Temperatur und die bis dahin frei gewordene Wärmemenge nicht mit Sicherheit ergeben.

Ueber diese Frage werden erst weitere Forschungen und künftig zu erwartende zuverlässigere Versuche Aufschluss geben.

§ 84. Schlussbemerkungen.

Die bedeutsamen Fortschritte, welche in der neuern Zeit in der praktischen Ausführung der Gasmaschinen gemacht worden sind, haben begreiflicher Weise das Interesse der Ingenieure auf das Höchste erregt; gewisse Beobachtungen haben daher auch auf lebhafte Erörterungen in den technischen Zeitschriften geführt. Die betreffenden Streitfragen, auf die gelegentlich schon oben, ohne dass sie als solche bezeichnet worden sind, hingewiesen wurde, betreffen folgende Punkte:

1) Die Temperatur- und Drucksteigerung bleibt bei allen Gasmaschinen bei der Explosion beträchtlich hinter derjenigen zurück, auf welche die Rechnung führt, wenn man Verbrennung bei constantem Volumen voraussetzt und die aus der Berechnung hervorgegangene Verbrennungswärme des betreffenden Leuchtgases zu Grunde legt.

2) Bei der Maschine von Lenoir fällt die Expansionscurve rascher ab, als die adiabatische Linie, während bei der Maschine von Otto beide Curven einander näher rücken, in einzelnen Fällen trotz der künstlichen Abkühlung der Cylinderwandungen die Expansionscurve selbst oberhalb der adiabatischen Curve verläuft.

3) Die Maschine von Otto führt gegenüber der von Lenoir auf einen weit geringern Gasverbrauch; nach den auf S. 422 vorgeführten Rechnungen stellt sich dieselbe in der Wärmeverwerthung schon nahezu an die Seite der besten Dampfmaschinen, deren Vervollkommnung doch seit nahezu einem Jahrhundert in Theorie und Praxis die hervorragendsten Ingenieure beschäftigt hat.

Was nun die unter Punkt 1 erwähnte Beobachtung betrifft, so hat insbesondere mit Entschiedenheit der Engländer Clerk die Ansicht vertreten, dass der bemerkte Vorgang eine Folge der Dissociation sei, nach welcher die Verbrennungstemperatur nicht über eine gewisse Grenze hinauf gesteigert werden kann; ist diese Grenze erreicht, die bei verschiedenen brennbaren Gasen verschieden ist, so zerfallen die Gase in ihre Bestandtheile. Hiernach müsste am Ende des aufsteigenden Theiles der Indicatorcurve (der Explosionscurve) die dem Gasgemisch (dem Leuchtgase) entsprechende Dissociationstemperatur erreicht, zugleich aber eine bestimmte Gasmenge zerlegt sein; beim weitern Fortgange des Kolbens, also in der Expansionsperiode, würde dann die Wiederverbindung und weitere Verbrennung erfolgen und damit wäre dann zugleich das sogenannte »Nachbrennen«, d. h. die während der Expansion fortdauernde Wärmeentwickelung, erklärt. Dass eine solche Wärmeentwickelung bei den Gasmaschinen in der Expansionsperiode vorliegt, ist zweifellos, denn wäre sie nicht vorhanden, so müsste wegen der stattfindenden Abkühlung der Cylinderwandungen die Expansionscurve bei der Maschine von Otto, wie bei den ihr verwandten Anordnungen (die Maschine von Lenoir mag bei den weitern Besprechungen ganz ausser Betracht bleiben) rascher abfallen, als die adiabatische Curve, was im Allgemeinen nicht der Fall ist; in vielen Fällen läuft die Expansionscurve selbst über der Adiabaten hin, so dass die nachträgliche Wärmeerzeugung den Wärmeentzug überragt. Damit wäre dann auch eine Erklärung der vorhin unter Punkt 2 erwähnten Erscheinung gegeben; man hat jedoch in neuerer Zeit die früher von Clerk und Andern vertretene Ansicht fast allgemein verworfen und mit Recht*). Die höchste in den Gasmaschinen vorkommende Temperatur rechnet man zu ohngefähr 1500° C. und diese Temperatur liegt noch wesentlich unter derjenigen, welche Mallard und Le Chatelier (vergl. Citat S. 139) als Dissociationstemperatur der Kohlensäure und des Wasserdampfes gefunden haben. Man suchte daher nach einer andern Erklärung und hier erscheint denn vor Allem die

*) Die im Text berührten Fragen bespricht sehr ausführlich Schöttler in seinem Aufsatze »Die Verbrennung in der Gasmaschine«, Zeitschrift deutscher Ingenieure 1886. Bd. 30. S. 209 und S. 234.

Ansicht von Wichtigkeit, welche Otto selbst über die Vorgänge in seiner Maschine von Anfang an ausgesprochen hat und die insbesondere von Slaby auf das Lebhafteste unterstützt worden ist. Beim Beginne des Kolbenhubes und des Ansaugens befinden sich im Compressionsraume Verbrennungsgase, welche vom vorigen Spiele zurückgeblieben sind; die Anordnung der Otto'schen Maschine ist nun so getroffen, dass beim Vorwärtsschreiten des Kolbens Anfangs nur atmosphärische Luft und erst gegen das Ende des Kolbenhubes brennbares, reich mit Leuchtgas gesättigtes Gemisch angesaugt wird. Dieses Gemenge von Leuchtgas, Luft und Verbrennungsproducten bildet aber nach Otto's Ansicht nach der Absperrung kein homogenes Gemisch, sondern selbst nach der hierauf erfolgten Compression in den Compressionsraum, also unmittelbar vor der Zündung, liegen die einzelnen Gasarten gewissermassen neben einander, eine Lagerung, welche gewöhnlich kurzweg als »schichtenweise Lagerung« bezeichnet wird. In dieser eigenthümlichen Vorbereitung des Gasgemisches sucht man nun den Grund der verlangsamten Verbrennung, d. h. des Hinüberdauerns der Verbrennung aus der eigentlichen Explosions- in den Bereich der Expansionsperiode und des grossen Fortschrittes, der durch Otto in der Construction der Gasmaschinen erzielt worden ist. Dass in der That die besprochene eigenthümliche Schichtung der Gase vorliegt, ist durch besondere Beobachtungen erwiesen worden, aber nicht nur die Zuverlässigkeit der Resultate derselben, sondern auch die Grundanschauungen Otto's selbst sind von mehreren Seiten auf das Bestimmteste bestritten worden*).

In die Discussion trat nun Prof. Witz in Lille**) mit einer neuen Erklärung der Vorgänge ein. Auf Grund eigenartiger Versuche, die nicht an einer Gasmaschine, sondern an einem besonderen Apparate ausgeführt wurden und die sogleich näher besprochen werden sollen, kommt Witz zu dem Schlusse, dass die Verzögerung in der Verbrennung ganz einfach nur dem kühlenden Einflusse

*) Der Jahrgang (1886) der »Zeitschrift deutscher Ingenieure« enthält eine ganze Reihe von Aufsätzen über die Verbrennung in den Gasmaschinen.

**) Witz, Etudes sur les moteurs à gaz tonnant. Annales de Chimie et de Physique 1883; besonderer Abdruck bei Gauthier-Villars. Paris.

Traité théorique et pratique des moteurs à gaz. Paris, Bernard & Co. 1886.

der Cylinderwandungen zuzuschreiben sei und der Fortschritt in der Construction der Gasmaschine (geringerer Gasverbrauch) in der Compression des Gasgemisches unmittelbar vor der Zündung vollständig seine Erklärung finde. Aus seinen Versuchen zieht Witz weiter den Schluss, dass auch die Kolbengeschwindigkeit einen bedeutenden Einfluss habe und zwar in der Richtung, dass eine Gasmaschine um so vortheilhafter arbeiten müsse, je rascher sie läuft.

Schöttler (a. a. O.) und mit ihm Schröter*) schliessen sich rückhaltslos den Witz'schen Ansichten an; Slaby**) dagegen hat durch neue ausgedehnte Versuche an einer Gasmaschine gefunden, dass einerseits bei einer Umdrehungszahl von 90 und andererseits von ohngefähr 180 bei gleicher Leistung ein verschiedener Gasverbrauch nicht constatirt werden konnte und dass fernerhin auch die Temperatur des Wassers im Cylindermantel von untergeordnetem Einflusse sei; bei Versuchsreihen, bei denen diese Temperatur etwa 80 bis 90° C. betrug, war der Gasverbrauch bei gleicher Leistung ein wenig grösser, als bei Versuchen, bei denen diese Temperatur auf etwa 10 bis 12° C. gehalten wurde, während man doch nach Witz das umgekehrte Resultat erwarten müsste.

Man hat hier Versuchsreihen von zwei in der technischen Welt als sehr gewandt bekannten Experimentatoren vor sich, die sich in ihren Resultaten vollständig widersprechen.

Slaby bezweifelt denn auch nicht die Richtigkeit der Versuchsresultate von Witz, behauptet aber, dass dessen Versuche an dem besondern Versuchsapparate keine Schlüsse zulassen auf die Vorgänge an einer Gasmaschine, und in dieser Beziehung muss man ihm vollständig zustimmen, schon aus theoretischen Gründen und ohne Rücksichtnahme auf seine den Witz'schen widersprechenden, zweifellos richtigen Versuchsresultate.

*) Schröter, »Ueber den gegenwärtigen Stand der theoretischen Behandlung der Gasmaschine«, Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung. 1885.

**) Slaby, »Zur Theorie der Verbrennung in der Gasmaschine«. Zeitschrift deutscher Ingenieure 1866. Bd. 30. S. 325.

Derselbe, »Der Einfluss der Wandungen in den Gasmaschinen«. Ebendaselbst S. 690.

Witz experimentirte in folgender Art:

In einem vertical aufgestellten Cylinder von 200 mm Durchmesser befand sich ein Kolben, dessen Gewicht 14,5 kg betrug und bei dessen Fortbewegung ein Reibungswiderstand von 17 kg zu überwinden war; um diesen Kolben langsam und gleichförmig im Cylinder hinaufzuschieben, bedurfte es daher, wie sich leicht nachweisen lässt, von unten her eines Ueberdruckes von 0,1 kg oder, so lange von oben her der atmosphärische Druck zugleich zu überwinden war, eines Druckes von 1,133 kg auf ein Quadratcentimeter.

Nun füllte Witz einen gewissen Theil des Cylinderinhaltes unter dem Kolben mit explosiblem Gas und entzündete dasselbe durch einen elektrischen Funken. In Folge dessen »flog« der Kolben hinauf; dabei drückte derselbe die oberhalb befindliche Luft durch Oeffnungen hinaus, die im obern Cylinderdeckel angebracht waren und die bei den Versuchen verschieden eingestellt werden konnten, um den Kolben früher oder später in seinem Fluge aufzuhalten. Nach jeder Explosion sank dann der Kolben dem Grade der Abkühlung gemäss unter dem äussern Atmosphärendruck langsam wieder in die ursprüngliche Lage zurück.

Durch Mehrbelastung und Entlastung des Kolbens konnte die Zeit und Geschwindigkeit des auffliegenden Kolbens variirt werden.

Die Spannung unter dem Kolben wurde durch einen Richard'schen Indicator als Function des Kolbenweges graphisch zur Darstellung gebracht und überdies liess Witz noch durch sinnreiche Verwendung einer Stimmgabel die Zeitpunkte der einzelnen Stellungen des Kolbens während des Fluges markiren.

Vergleicht man nun die von Witz gefundenen Indicatordiagramme mit denen einer Otto'schen Maschine, so zeigt sich eine ganz auffällige Verschiedenheit, ganz besonders aber, wenn man von denselben in der auf S. 440 angegebenen Art die Abbildung zeichnet; ich unterlasse jedoch hier die Vorführung der letzteren, da bei der Herstellung derselben die der Theorie zu Grunde liegenden Bedingungen nicht erfüllt sind; gerade der Haupttheil des Processes der Witz'schen Versuche, nämlich die Entzündung und Expansion der Gasmischung, findet nämlich auf nicht umkehrbarem Wege statt, weil auf dem grössten Theile des Kolbenweges der Gasdruck gegen den Kolben bedeutend

grösser, als der äussere Gegendruck ist und der Ueberdruck auf Beschleunigung der Kolbenmasse verwendet wird; wenn daher Witz für verschiedene Kolbenstellungen auf Grund seiner Diagramme das Product Vp aus Volumen und Druck berechnet und daraus auf die augenblicklich stattfindende Temperatur, die nur im Gleichgewichtszustande diesem Producte proportionalist, Schlüsse zieht, so ist das theoretisch nicht zu rechtfertigen. Mit kurzen Worten: die Versuche von Witz könnten nur dazu dienen, die Vorgänge der Gasmaschinen »mit fliegendem Kolben« wie die der Maschine von Otto-Langen, des ältern, jetzt verlassenen Systemes, zu erläutern, nicht aber dazu, die Vorgänge aufzuklären, die bei einer mit Kurbelmechanismus arbeitenden Gasmaschine vorliegen, bei der während des ganzen Arbeitsprocesses Gas- und Gegendruck als von gleicher Grösse angesehen werden dürfen oder bei der, meiner Ansicht nach, nur auf kurzen Strecken (am Ende der Explosion beim Uebergang zur Expansion) vielleicht eine Störung der Gleichheit dieser Drucke vorliegt.

Dass bei den Versuchen mit fliegendem Kolben der Verbrennungsprocess sich fast über den ganzen Kolbenlauf erstreckt und die Druckcurve des Indicatordiagrammes, also auch die indicirte Arbeit sehr stark von der Kolbengeschwindigkeit und der Zeitdauer des Auffluges beeinflusst wird, ist daher ganz begreiflich.

Dass übrigens die Indicatordruckcurve bei den Versuchen von Witz keine Gleichgewichtscurve war, ist sogleich erkennbar; so stieg z. B. bei einer Versuchsreihe, die auch Schöttler (a. a. O.) aufführt, der Druck im Momente der Explosion von 1,033 kg auf 1,70 kg, während nach obiger Rechnung schon der Druck von 1,133 kg hinreicht, den Kolben fortzubewegen. Wäre der Kolben frei (ohne Wirkung des Luftkissens) aufgeflogen, so liesse sich nach den oben entwickelten Sätzen über nicht umkehrbare Processe der Vorgang bei den Witz'schen Versuchen leicht auf dem Rechnungswege verfolgen.

Nach allen muss man der Behauptung von Slaby zustimmen, dass die Versuchsergebnisse von Witz nicht dazu verwerthet werden können, die Vorgänge an den heutigen, mit Kurbelmechanismus arbeitenden Gasmaschinen zu erklären.

In einer Frage aber trete ich an die Seite von Witz; ich halte mit ihm den Einfluss der kühlenden Wirkung der Cylinder-

wandungen (durch das Kühlwasser im Mantel) auf den Arbeitsprocess der Gasmaschine für sehr bedeutend, wenn ich auch nicht soweit gehe, mit Witz zu sagen, »das ganze Geheimniss (in der streitigen Frage) liege im Einfluss der Wandungen«.

Das in Fig. 73a und b S. 437 gegebene Diagramm mit Abbildung zeigt in der Compressionsperiode 1 — 4, obgleich gerade in dieser zwischen Gas- und Wandungstemperatur die geringste Differenz vorliegen muss, einen sehr energischen Wärmeentzug, der auch dann noch beträchtlich genug erscheint, wenn man, wie es Slaby bei der Besprechung seiner ältern Versuche (Citat S. 403) gethan hat, den Curvenzug 1 — 4 im Indicatordiagramm Fig. 73a als isothermische Curve behandelt. Dieses Ergebniss gestattet doch wohl, diesen Einfluss auch in den andern Theilen des Arbeitsprocesses, insbesondere im Verlaufe der Explosionscurve, wo stürmische Bewegungen der Gastheile und viel höhere Temperaturdifferenzen vorliegen, anzunehmen.

Im Indicatordiagramme Fig. 73a liegt der höchste Punkt der Explosionscurve vor, nachdem die Kurbel vom todten Punkte aus gerechnet, einen Winkel von ohngefähr 23° zurückgelegt hat, daraus bestimmt sich die Explosionsdauer im Verhältniss zur Compressionsdauer zu etwa 0,13; die Zeitdauer der Explosion ist daher keineswegs gering und wenn man noch einen, wenn auch kleinen Theil der Expansionscurve hinzurechnet, so fällt es schwer, die Annahme von Witz einfach abzuweisen; man darf vielmehr zuverlässig sagen, dass das Zurückbleiben von Temperatur und Druck bei den Explosionen in den Gasmaschinen, das Hinüberdauern der Wärmeentwickelung in die Expansionsperiode (das Nachbrennen) wenigstens zum Theil eine Wirkung des Wärmeentzuges durch die Cylinderwandungen ist. Die Stärke dieses Antheiles zu bemessen und desjenigen, welcher der eigenthümlichen Vorbereitung des Gasgemisches in den Maschinen von Otto und der Verdünnung entspricht, welche das Leuchtgas durch die Beimischung indifferenter Gase erfährt, — das dürfte zur Zeit noch als eine offene Frage anzusehen sein.

Endlich möge hervorgehoben werden, dass die ganze streitige Frage vielleicht auch nach anderer Richtung ihre Lösung finden wird.

Bei allen Betrachtungen ist die Annahme gemacht worden, dass die Gasmischung vor und nach der Explosion der gewöhn-

lichen Zustandsgleichung der Gase folge und dass die specifischen Wärmen c_p und c_v constant, auch nach der Verbrennung von gleicher Grösse seien, wie vorher. Hält man die erstere Annahme aufrecht, verlässt man aber die andere, so können die Werthe c_p und c_v, wie auf S. 138 bewiesen worden ist, nur Functionen der Temperatur sein, ihre Differenz wäre aber constant und zwar gleich dem Werthe AB.

Setzt man nun

$$c_v = c + \tau \quad \text{und} \quad c_p = \varkappa c + \tau\,, \tag{66}$$

wobei τ irgend eine Temperaturfunction darstellt und die Grössen c und $\varkappa$ als noch zu bestimmende constante Grössen betrachtet werden, so ergiebt zunächst die Substitution der Gln. (39) S. 115 in die erste der Gleichungen (36) S. 114 ganz allgemein:

$$dQ = c_v \frac{\partial t}{\partial p} dp + c_p \frac{\partial t}{\partial v} dv$$

oder unter der Voraussetzung $pv = BT$ nach den Beziehungen (40) S. 115

$$dQ = \frac{1}{B}(c_v v\,dp + c_p p\,dv)\,,$$

und wenn man hier die beiden im Vorstehenden angegebenen Werthe von c_p und c_v substituirt:

$$dQ = \frac{c}{B}\left[v\,dp + \varkappa p\,dv + \frac{\tau}{c}\,d(pv)\right]\,, \tag{67}$$

welche Gleichung, wenn man noch die hier geltende Beziehung $AB = c(\varkappa - 1)$ berücksichtigt, an die Stelle von Gl. (53c) S. 127, die dort für Gase abgeleitet worden ist, treten würde.

Dividirt man vorstehende Formel auf beiden Seiten durch AT, so ergiebt sich das Differential des Wärmegewichtes P für vorliegende Verallgemeinerung:

$$dP = \frac{c}{A}\left[d \operatorname{logn}(pv^{\varkappa}) + \frac{\tau}{c}\frac{d(pv)}{pv}\right]$$

oder integrirt:

$$AP = AP_0 + c \operatorname{logn}(pv^{\varkappa}) + \int \tau \frac{d(pv)}{pv}\,, \tag{68}$$

welche Gleichung an die Stelle von Gl. (55a) S. 128 treten würde.

Da die Grösse τ als Function der Temperatur t oder der absoluten Temperatur T oder endlich, was hier dasselbe ist, als Function des Productes pv gegeben gedacht wurde, so wäre der in vorstehender Gleichung angezeigte Ausdruck im letzten Gliede integrabel.

Wäre beispielsweise $c_v = c + \beta t$, also nach den vorhin angenommenen Gln. (66) $\tau = \beta t = \beta (T - a)$, wobei $a = 273$ zu setzen ist, so folgt aus vorstehender Formel (68) nach einigen leicht zu verfolgenden Umformungen das Wärmegewicht:

$$AP = AP_0 + (c - \beta a) \operatorname{logn} pv + c(\varkappa - 1) \operatorname{logn} v + \frac{\beta}{c(\varkappa - 1)} Apv \,. \quad (69)$$

Für die adiabatische Curve wäre der Ausdruck rechts constant; für ein vollkommenes Gas ($\beta = 0$) folgt, wie es sein muss, die Gleichung dieser Curve $pv^{\varkappa} =$ Const.; im vorliegenden Falle dagegen nimmt die adiabatische Curve einen andern Verlauf an und zwar findet sich deren Gleichung

$$\operatorname{logn} pv^{\varkappa_1} + \delta pv = \text{Const.} \;,$$

wobei zu setzen ist:

$$\varkappa_1 = \frac{\varkappa c - \beta a}{c - \beta a} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{A\beta}{c(\varkappa - 1)(c - \beta a)} \,.$$

Die weitere Verfolgung zeigt, dass die Adiabate *weniger rasch sinkt*, als beim vollkommenen Gase.

Man erkennt hieraus, dass schon für die vorausgesetzte einfachste Erweiterung die Formeln der Wärmetheorie, auf Gase angewandt, eine sehr complicirte Gestalt annehmen.

Würden während und nach der Verbrennung in der Gasmaschine die specifischen Wärmen nach den Formeln $c_v = c + \beta t$ und $c_p = \varkappa c + \beta t$ bestimmt sein, so wäre für die Abbildung der Explosions- und Expansionscurve (Fig. 73 S. 437) das Wärmegewicht nach vorstehender Gl. (69) statt nach Gl. (64) S. 439 zu berechnen.

Die oben vorgeführte calorimetrische Untersuchung der Otto-schen Gasmaschine (§ 83 S. 436) würde dann auf andere numerische Werthe führen.

Noch viel verwickelter als bei vorstehender Erweiterung der Sätze über die Abbildung und der entsprechenden Darstellung

der Vorgänge in der Gasmaschine, würden sich aber die Grundformeln herausstellen, wenn man bezüglich der Veränderlichkeit der specifischen Wärmen die Untersuchungen von Mallard und Le Chatelier verwerthen wollte, welche oben S. 139 besprochen worden sind.

Der Versuch einer weitern Verfolgung des Problems in der angezeigten Richtung muss aber wohl zur Zeit noch als verfrüht bezeichnet werden.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Verlag von **Arthur Felix** in **Leipzig**.

Die Schiebersteuerungen

mit besonderer Berücksichtigung der

Locomotiven-Steuerungen

von

Dr. Gustav Zeuner,

Königl. Sächs. Geh. Bergrath, Prof. d. Mechanik und theoretischen Maschinenlehre, Director d. k. Polytechnicums zu Dresden u. d. k. Bergakademie zu Freiberg.

Vierte verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit 58 Holzschnitten und 6 lithographirten Tafeln.

In gr. 8. XIV. 253 Seiten. 1874. geb. Preis: 8 *M*.

Das

Locomotiven-Blasrohr.

Experimentelle und theoretische Untersuchungen

über die

Zugerzeugung durch Dampfstrahlen

und über die

saugende Wirkung der Flüssigkeitsstrahlen

überhaupt.

Von

Prof. Dr. **Gustav Zeuner.**

Mit 25 in den Text eingedr. Holzstichen und 2 lithogr. Tafeln.

In gr. 8. 1863. brosch. Preis: 5 *M*.

Abhandlungen

aus der

Mathematischen Statistik.

Von

Dr. Gustav Zeuner,

Professor am k. s. Polytechnicum in Dresden.

Mit 27 in den Text gedruckten Holzstichen u. mehreren Tabellen.

In gr. 8. VIII. 220 Seiten. 1869. brosch. Preis: 6 *M*.

Verlag von **Arthur Felix** in **Leipzig.**

Die Bewegung der Wärme
in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine.

Von

Dr. **Kirsch,**

Professor an den technischen Staatslehranstalten in Chemnitz.

Mit 7 lithographirten Tafeln.

In Lex.-8. XII. 100 Seiten. brosch. Preis: 6 ℳ.

Theorie der Dampfmaschinen

von

Gustav Schmidt,

k. k. Kunstmeister und Docent des Maschinenbaues.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.

In gr. 8. 1861. VIII. 272 Seiten. Preis: 5 ℳ.

Anlage und Betrieb der Dampfkessel.

Lehrbuch für angehende und Handbuch für ausübende Ingenieure, Rathgeber für Industrielle und Anweisung für Kesselwärter

von

Prof. H. von Reiche.

In zwei Bänden.

Erster Band:

Theorie der Dampfkessel-Anlagen und Construction ihrer Feuerungen.

Dritte Auflage nach des Verfassers Tode bearbeitet von

J. Reintgen,

Ingenieur u. ordentl. Lehrer des Maschinenbaues u. d. mechan. Technologie a. d. Real- und Gewerbeschule zu Aachen.

In gr. 8. XVI. 212 S. 1886. brosch. Preis: 7 ℳ.

Die Beurtheilung der Dampfkessel.

Von

Georg Schimming,

Ingenieur in Berlin.

Mit zahlreichen Holzschnitten.

In gr. 8. VIII. 158 Seiten. brosch. Preis: 5 ℳ 50 ₰.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Zeuner, Gustav,

Technische Thermodynamik

Bd.: 1

Leipzig 1887

BHS II K 142-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11558545-6